



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL

LUCAS ARRUDA TIENI

ANÁLISE NÃO LINEAR TERMOESTRUTURAL DE
TRELIÇAS ESPACIAIS DE AÇO ASSOCIADA A
MODELO FENOMENOLÓGICO

Maringá
2020

LUCAS ARRUDA TIENI

**ANÁLISE NÃO LINEAR TERMOESTRUTURAL DE
TRELIÇAS ESPACIAIS DE AÇO ASSOCIADA A MODELO
FENOMENOLÓGICO**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas, para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Wesley Wutzow
Co-orientador: Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo
Liberatti

**Maringá
2020**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

T562a

Tieni, Lucas Arruda

Análise não linear termoestrutural de treliças espaciais de aço associada a modelo fenomenológico / Lucas Arruda Tieni. -- Maringá, PR, 2021.
140 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Wesley Wutzow.

Coorientador: Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo Liberatti.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2021.

1. Engenharia de estruturas. 2. Análise termoestrutural. 3. Análise não linear. 4. Código computacional. 5. Treliças espaciais. I. Wutzow, Wilson Wesley, orient. II. Liberatti, Elyson Andrew Pozo, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

CDD 23.ed. 624.16

LUCAS ARRUDA TIENI

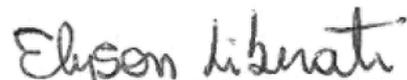
**ANÁLISE NÃO LINEAR TERMOESTRUTURAL DE TRELIÇAS ESPACIAIS
DE AÇO ASSOCIADA À MODELO FENOMENOLÓGICO**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 25/11/2020. Julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Wilson Wesley Wutzow
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Orientador



Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo Liberati
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Coorientador



Prof. Dr. Leandro Vanalli
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Dedico carinhosamente este trabalho à meus avós, Benedito e Dirce, por serem exemplos de vida para mim.

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos: A Deus pela vida, por sua imensa bondade e amor.

A minha esposa Maria Isabel, pelo seu amor, ajuda e estar ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus pais Carlos e Eliane, que nunca mediram esforços para que eu pudesse alcançar meus sonhos, não existem palavras que possam representar o amor e gratidão que sinto por vocês.

Ao professor Wilson, pela excelente orientação, pelos conhecimentos valiosos transmitidos e por sua disposição em ajudar sempre que preciso.

Aos professores Elyson A. P. Liberatti, Rodolfo A. K. Sanches, Luiz A. F. de Souza pelas contribuições como membros da banca de qualificação.

Aos colegas do PCV pela amizade, em especial ao caro Marcon Arcini.

A todos os professores e técnicos do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil e do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá que forneceram dentro do possível as melhores condições para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro dado sem o qual este trabalho não seria possível.

Resumo

Este trabalho consiste no desenvolvimento de um código computacional para análise termoestrutural não linear de estruturas de treliças espaciais. O algoritmo termoestrutural está associado a um modelo fenomenológico histórico que inclui efeitos de plastificação, flambagem, pós-flambagem inelástica, acúmulo de deformação plástica e degradação da tensão crítica de flambagem devido ao efeito Bauschinger. A estrutura é modelada em uma descrição Lagrangiana total através da formulação do método dos elementos finitos posicionais, o qual é baseado no teorema da energia potencial total mínima. MEFP é escrito em função das posições nodais e vetores generalizados e, portanto, intrinsecamente geometricamente não lineares. Para resolver o sistema de equações não lineares, é utilizado o método de Newton Raphson com controle pelo método de comprimento de arco de hiperplano fixo, que permite ultrapassar pontos limites no caminho de equilíbrio. A consideração de altas temperaturas é feita de forma simplificada, as análises são isotérmicas e a distribuição da temperatura no elemento é homogênea. A degradação da rigidez e resistência é governada pelos fatores de redução do Eurocódigo 3, assim como as expansões térmicas são governadas pelo fator de alongamento da mesma norma. A cada desenvolvimento do trabalho são feitos exemplos de aplicação de casos presentes na literatura e, por fim, todos os aspectos mencionados são reunidos e aplicados em exemplos, com a devida demonstração de precisão.

Palavras-chave: Treliça espacial. Análise não linear. Método do comprimento de arco. Análise termoestrutural. Modelo fenomenológico.

Abstract

This work consists in the development of a computational code for non-linear thermo-structural analysis of spatial truss structures. The thermo-structural algorithm is associated with a hysteretic phenomenological model that includes effects of yielding, buckling, inelastic post-buckling, accumulation of plastic deformation and degradation of the critical buckling stress due to the Bauschinger effect. The structure is modeled in a total Lagrangian description through a formulation of the positional finite element method, which is based on the theorem of minimum total potential energy written as a function of nodal positions and generalized vectors and, therefore, intrinsically geometrically non-linear. To solve the nonlinear system of equations, the Newton Raphson method is used with control by fixed hyperplane arc length method, which allows to exceed limit points in the equilibrium path. The consideration of high temperatures is made in a simplified way, the analyzes are isothermal and the temperature distribution in the element is homogeneous. The degradation of stiffness and resistance is governed by the reduction factors of Eurocode 3, as well as thermal expansions, are driven by the elongation factor. Examples of application of cases present in the literature are made for each development of the work and, finally, all the aspects mentioned are gathered and applied in examples, with due precision demonstrations. Experimental tests of heated truss elements and cyclic loads can also be performed to validate the model proposed in this work.

Keywords: Spatial truss. Nonlinear analysis. Arc length method. Thermo-structural analysis. Phenomenological model.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Generalidades	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Justificativa	3
2	Revisão Teórica	5
2.1	Análise não linear geométrica via elementos finitos posicional	5
2.2	Método de continuação	7
2.2.1	Newton-Raphson	8
2.2.2	Métodos incrementais-iterativos	8
2.2.3	Método do comprimento de arco	9
2.3	Análise Térmica	10
2.3.1	Revisão bibliográfica	12
2.4	Modelo Fenomenológico	14
3	Mecânica dos sólidos	19
3.1	Cinemática dos sólidos deformáveis	19
3.1.1	Mudança de configuração	19
3.1.2	Gradiente da função deformação	20
3.1.3	Mudança de volume	22
3.1.4	Mudança de área	23
3.1.5	Decomposição polar	24
3.1.6	Medidas de deformação	24
3.2	Equilíbrio	25
3.2.1	Tensor de Cauchy	25
3.2.2	Equilíbrio Euleriano	27
3.2.3	Equilíbrio Lagrangiano	29
3.2.4	Equilíbrio Lagrangiano por abordagem energética	30
3.2.5	Energia potencial das forças externas	31
3.2.6	Energia de deformação	32
3.2.7	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	32

3.3	Método dos elementos finitos posicional	33
3.4	Equilíbrio	38
3.4.1	Forças Internas	38
3.4.2	Forças Externas	40
3.4.3	Matriz Hessiana	41
4	Método de solução numérica	43
4.1	Newton-Raphson	45
4.1.1	Newton-Raphson Modificado	47
4.2	Incrementos por força	47
4.3	Controle de deslocamentos	49
4.3.1	Controle automático do incremento	52
4.4	Arc-Length	52
4.4.1	Restrição do hiperplano	55
4.4.2	Solução preditora	57
4.5	Aplicações numéricas	60
5	Análise Termoestrutural	67
5.0.1	Características do acoplamento proposto	67
5.1	Propriedades do aço em temperaturas elevadas	68
5.1.1	Relação constitutiva do aço em temperaturas elevadas	68
5.1.2	Expansão térmica	73
5.2	Considerações a respeito das deformações térmicas	75
5.3	Aplicações	81
5.3.1	Treliça de Von Misses	81
5.3.2	Treliça espacial hexagonal	83
5.3.3	Fechamento	85
6	Modelo Fenomenológico	87
6.1	Comportamento à tração elástica (TR1)	90
6.1.1	Comportamento à tração inelástica (TR6)	91
6.1.2	Comportamento à compressão (TR2)	91
6.1.3	Comportamento pós-flambagem (TR 3)	93
6.1.4	Comportamento de descarregamento-recarregamento partindo da compressão (TR4 e TR5)	96
6.1.5	Comportamento de descarregamento-recarregamento partindo de tração (TR7 e TR8)	98
6.1.6	Degradação da resistência à flambagem devido ao efeito Bauschinger	99
6.1.7	Regras de descarregamento a meio ciclo (TR9 e TR10)	100
6.2	Fluxograma do modelo fenomenológico	100

6.3	Aplicações	103
6.3.1	Barra simples	103
6.3.2	Treliça de Von Misses	111
6.3.3	Star Dome	113
7	Conclusões	117
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	118

Lista de Figuras

3.1	Movimento genérico de um sólido deformável.	20
3.2	Representação do movimento genérico da vizinhança de uma partícula. . .	21
3.3	Transformação de área.	23
3.4	Corpo em equilíbrio.	26
3.5	Componentes de tensão e conversão de sinais.	26
3.6	Variações das tensões e equilíbrio na direção 1.	28
3.7	Função de forma (b) para um elemento linear (a). Funções interpoladoras correspondentes (c) e (d)	35
3.8	Mapeamento das configurações iniciais e finais de uma barra reta.	36
4.1	(a) NR por incremento de carga, (b) NR com incremento de deslocamento e (c) método do comprimento de arco.	44
4.2	Pontos limites de carga e deslocamento, e efeito snap-back.	44
4.3	Iteração de equilíbrio utilizando método de Newton-Raphson.	46
4.4	Método do comprimento de arco com (a) restrição de hiperesfera, (b) restrição de hiperplano atualizado e (c) restrição de hiperplano fixo.	55
4.5	(a) Residual e componente de correção, (b) incremento e sub-incremento. .	56
4.6	Fase de incremento.	58
4.7	(a) $\Delta \mathbf{y}^F$ aponta no sentido de avanço no caminho do equilíbrio. (b) $\Delta \mathbf{y}^F$ aponta no sentido contrário ao sentido de avanço no caminho do equilíbrio.	58
4.8	Treliça de Von Mises na posição inicial e deslocada.	60
4.9	Solução por Newton Raphson com controle de força	61
4.10	Solução por Newton Raphson com controle de deslocamento	61
4.11	Domo hexagonal com 24 elementos	62
4.12	Trajetória de equilíbrio obtida no ponto de aplicação do carregamento, determinada através de Newton Raphson com controle de deslocamento . .	63
4.13	Trajetória de equilíbrio obtida no ponto de aplicação do carregamento, através do método do arc-length	63
4.14	Treliça espacial com 12 barras.	64
4.15	Caminho de equilíbrio no grau de liberdade w	64
4.16	Caminho de equilíbrio no grau de liberdade v	65

4.17	Geometria e propriedades do material do Domo de Schwedler.	65
4.18	Caminho de equilíbrio do Domo de Schwedler.	66
4.19	Caminho de equilíbrio do Domo de Schwedler com técnica de comprimento de arco.	66
5.1	Fatores de redução das propriedades do aço em função da temperatura. . .	69
5.2	Modelo qualitativo do (EN 1993-1-2, 2005) para descrever a relação tensão-deformação para aço carbono com temperatura T	70
5.3	Relações tensão-deformação para aço $f_y=250$ MPa e deformações $<2\%$	71
5.4	Curva tensão-deformação do EC3 e aproximação por métodos dos mínimos quadrados.	73
5.5	Alongamento relativo $\Delta L/L$ para o aço em função da temperatura.	74
5.6	Aquecimento uniforme de uma barra simplesmente apoiada.	76
5.7	Aquecimento uniforme de uma viga restrita axialmente.	77
5.8	Flambagem de uma viga com aquecimento uniforme de ΔT	77
5.9	Incêndio localizado.	78
5.10	Colunas sujeitas a mesma temperatura.	79
5.11	Modelo simplificado de uma coluna com restrições axiais.	80
5.12	Evolução das forças axiais em análise de colunas com temperatura crescente.	80
5.13	Curvas carga-deslocamento vertical para treliça elástica sujeita à várias temperaturas constantes ($\gamma = 30^\circ$).	82
5.14	Curvas carga-deslocamento vertical para treliça de Von Mises elástica para várias temperaturas ($\gamma = 5^\circ$).	82
5.15	Curvas carga-deslocamento para treliça de Von Mises elástica para temperaturas constantes ($\gamma = 5^\circ$).	83
5.16	Treliça espacial hexagonal.	83
5.17	Curvas carga-deslocamento para treliça espacial Star Dome, comparadas com os resultados analíticos de Yang et al. (2008).	84
5.18	Curvas completas carga-deslocamento para treliça espacial Star Dome para temperaturas constantes.	85
6.1	Comparação das curvas históricas obtidas pelo Abaqus e ensaios experimentais.	88
6.2	Loops Histereéticos variando o índice de esbeltez e relação D/t (D =diâmetro e t =espessura da parede).	89
6.3	Modelo fenomenológico histerético utilizado: (a) dois ciclos do modelo; (b) tração; (c) compressão; (d) descarregamento-recarregamento a partir da compressão; (e) degradação devido ao efeito Bauschinger; (f) descarregamento no meio ciclo; (g) descarga-recarga a partir de tração.	90
6.4	(a) Parâmetro de calibragem X_1 vs λ_m , (b) Parâmetro de calibragem X_2 vs λ_m	94

6.5	Parâmetro de calibragem S_l vs λ_m	94
6.6	(a) Parâmetro X_1 em função da temperatura; (b) Parâmetro X_2 em função da temperatura.	95
6.7	Tensão assintótica em função da temperatura.	95
6.8	Comparação de curvas de pós-flambagem com diferentes parâmetros.	96
6.9	(a) Simulação numérica que evidencia o efeito Bauschinger. (b) Degradação da tensão crítica de flambagem em função da esbeltez λ_m	100
6.10	Fluxograma do modelo proposto.	101
6.11	Barra simples axialmente carregada.	103
6.12	Resultados do primeiro ciclo do modelo desenvolvido.	104
6.13	Deformações correspondentes aos pontos de inversão de carga externa imposta, referente aos dados da Figura 6.14.	106
6.14	Um ciclo com carregamentos e descarregamentos aleatórios.	106
6.15	Deformações em que ocorreram inversão de carregamento.	107
6.16	Loops histeréticos obtidos pelo modelo proposto para temperatura de 20.	107
6.17	Curvas histeréticas para uma barra simples apoiada sujeita à várias temperaturas.	109
6.18	Comparação de curvas histeréticas de diferentes temperaturas mas com iguais pontos de inversão de cargas.	110
6.19	Comparação de curvas histeréticas de diferentes temperaturas com iguais pontos de inversão de cargas.	110
6.20	Comparação entre modelo elástico e modelo inelástico proposto: (a) Diagrama força-deslocamento e (b) Diagrama tensão-deformação.	111
6.21	Análise inelástica - Diagramas força-deslocamento para várias temperaturas.	112
6.22	Análise inelástica - Diagramas tensão-deformação para várias temperaturas.	112
6.23	Diagramas tensão-deformação individual para algumas barras da estrutura.	114
6.25	Diagrama força-deslocamento para várias temperaturas.	115

Lista de Tabelas

5.1	Redução das propriedades de aços estruturais em função da temperatura. .	69
5.2	Equações e parâmetros para obtenção dos diagramas tensão-deformação para os aços estruturais em temperaturas elevadas.	71
5.3	Coefficientes de aproximação das curvas tensão-deformação do EC3 para aço carbono.	72
6.1	Condições para direcionamento do modelo.	102
6.2	Valores de deslocamento que marcam a reversão do carregamento.	108

Capítulo 1

Introdução

1.1 Generalidades

Sistemas do tipo treliça têm sido amplamente utilizados como solução de engenharia para vários tipos de estruturas, incluindo telhados de grande vãos, pontes, torres, estruturas espaciais, plataformas offshore, entre outras. Na construção leve, essas estruturas são compostos de materiais metálicos, geralmente, modelados como elementos carregados axialmente. Tais elementos são altamente deformáveis e por isso podem apresentar comportamento elastoplástico. Além disso, devido à sua flexibilidade, as barras de treliça sob carregamento axial podem ser instáveis, ou seja, podem flambar. Assim, o projeto de estruturas de treliça envolve a modelagem de não linearidades geométricas e físicas, incluindo grandes deslocamentos, deformações elastoplásticas e comportamento pós-flambagem.

Na engenharia estrutural, a consideração da hipótese de linearidade geométrica nas análises estruturais significa admitir a proporcionalidade causa e efeito. Este tipo de hipótese é utilizada em casos de análises de pequenos ou moderados deslocamentos, porém, não pode ser utilizada em problemas envolvendo instabilidade estrutural. Esses problemas ocorrem sob regime de grandes deslocamentos, que para serem resolvidos é essencial a consideração dos efeitos de não linearidade geométrica. Nessa, o equilíbrio é avaliado na posição deslocada da estrutura, ou seja, depois de ocorrido as deformações e deslocamentos causados pelas forças externas aplicadas.

A consideração de não linearidades geométricas e físicas e efeitos de instabilidade tornam complexa a resposta estrutural frente aos esforços aplicados. Por consequência, o caminho de equilíbrio a ser obtido durante análise será complexo, apresentando diversos efeitos de instabilidade. Desta forma, para descrever o caminho de equilíbrio contornando todos os trechos complexos, são necessários os chamados métodos de continuação, os quais são técnicas utilizadas para resolver as equações de equilíbrio, tratando de forma adequadas as perdas de rigidez e os pontos limites de carga e deslocamento. Nesse trabalho,

é empregado um dos métodos mais eficazes para contornar pontos críticos no caminho de equilíbrio, o método do comprimento de arco ([FRANSSEN, 2000](#)).

A análise de grandes deslocamento se torna ainda mais necessária quando se pretende simular efeitos térmicos na estrutura. A análise de estruturas submetidas a ações térmicas típicas de incêndio tem se tornado uma consideração cada vez mais frequente nos projetos atuais devido à necessidade de elevar o nível de segurança das estruturas, a fim de preservar as edificações e, principalmente, reduzir a perda de vidas humanas. Existem diferentes abordagens de pesquisa para avaliar tal situação, as quais, resumidamente, dividem-se em estudos teóricos, análises experimentais e as aplicações numéricas.

Análises experimentais de estruturas submetidas a ações térmicas típicas de incêndio, apesar de fornecerem grande quantidade de dados consistentes sobre o comportamento da estrutura, são de alta complexidade e elevado custo ([YANG; LIN; LEU, 2008](#)). Devido a isso, atualmente se tem um grande interesse no desenvolvimento e aplicação de códigos computacionais, que simulam os efeitos de incêndios em estruturas de forma adequada.

O comportamento dos membros de aço sob temperaturas elevadas é complexo e é diretamente afetado pela restrição das extremidades dos membros ([SANTIAGO et al., 2008](#)). Em primeiro lugar, deve-se destacar que o comportamento de uma única barra de aço exposta a um incêndio padrão é significativamente diferente em comparação com o comportamento de toda a estrutura ([PORCARI; ZALOK; MEKKY, 2015](#)). Existem muitos estudos sobre o comportamento de estruturas de aço em elevadas temperaturas. No entanto, há poucos estudos que focam diretamente o comportamento individuais das barras de um treliça sujeita à elevadas temperaturas.

Portanto, nesse trabalho será empregado modelos fenomenológicos com a finalidade de descrever o comportamento individual de cada barra de uma estrutura de treliça espacial sujeita à elevadas temperaturas. Os modelos fenomenológicos fornecem uma abordagem simples e eficiente para simular o comportamento inelástico histerético de elementos uniaxiais. Devido à sua eficiência computacional, esses modelos são particularmente úteis para analisar grandes estrutura com grande quantidade de elementos. No entanto, estes modelos dependem de dados experimentais representativos e podem não ser apropriados para prever o comportamento fora da faixa de parâmetros experimentais usados para calibração do modelo.

Neste trabalho, devido a falta de modelos fenomenológicos para elementos carregados uniaxialmente sujeitos à elevadas temperaturas, será utilizado um modelo que segue regras histeréticas calibradas para dados experimentais em temperatura ambiente. Ao modelo serão adicionados os efeitos térmicos (degradação material e expansão térmica) de acordo com os critérios do [EN 1993-1-2 \(2005\)](#). Dessa forma, o presente trabalho não pretende apresentar um modelo calibrado, mas irá propor um modelo de comportamento descrito por equações simples, cujos coeficientes podem ser alterados posteriormente por dados calibrados resultantes de ensaios experimentais de membros sujeitos à carregamentos

térmicos.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um algoritmo para análise não linear termoestrutural simplificada em regime de grandes deslocamentos e pequenas deformações de treliças espaciais, associado a um modelo fenomenológico inelástico histerético.

Dentro desse contexto, são destacados os seguintes objetivos específicos:

- Aplicar formulação de elementos finitos posicional de treliça tridimensional;
- Incorporar o método de controle de comprimento de arco com restrição por hiperplano fixo à fase incremental do método de Newton-Raphson;
- Inserir no código de análise estrutural a deformação térmica e a degradação da resistência e rigidez do material devido a elevadas temperaturas;
- Codificar algoritmo do modelo fenomenológico e incorporar ao algoritmo de análise termoestrutural.

1.3 Justificativa

Quando uma estrutura de aço é exposta ao fogo, as temperaturas do aço aumentam e a resistência e rigidez são reduzidas, levando a possíveis deformações e rupturas, dependendo das cargas aplicadas e das condições de suporte. O aumento da temperatura do aço depende da gravidade do incêndio, da área do aço exposta ao fogo e da quantidade de proteção contra incêndio aplicada. Estruturas de aço desprotegidas tendem a ter um desempenho insatisfatório em incêndios em comparação com concreto armado ou estruturas robustas de madeira. Isso é devido aos membros de aço serem, geralmente, muito mais finos e o aço possuir condutividade térmica mais alta do que a maioria dos outros materiais.

É importante destacar ainda que a análise de estruturas em situação de incêndio comumente envolve grandes deslocamentos, apresentando um comportamento intrinsecamente não linear geométrico. Isto posto, neste trabalho é empregado o método dos elementos finitos posicional (CODA, 2003) que tem como característica principal ser de natureza não linear geometricamente exata.

Muitos autores desenvolveram trabalhos avançados sobre estruturas de aço em situação de incêndio utilizando elementos finitos, alcançando bons resultados. No entanto, de acordo com Yang et al. (2008), as curvas carga-deflexão obtidas na maior parte dos estudos numéricos utilizando métodos avançados não foram além dos pontos limites. Isso pode ser devido, em parte, à ausência de métodos adequados para tratar instabilidades

numéricas que surgem em torno de pontos limites e, em parte, à falta de conhecimento do comportamento estrutural após pontos limites. Portanto, um das formas de traçar o caminho de equilíbrio completo de um elemento durante análise é através dos métodos de continuação, como o método de controle por comprimento de arco, utilizado neste trabalho.

Para estruturas de treliças espaciais, o fogo apresenta uma das condições de projeto mais severas, pois as propriedades mecânicas do aço se degradam com o aumento da temperatura. É importante que o comportamento destas estruturas em altas temperaturas seja totalmente compreendido e que métodos confiáveis estejam disponíveis para calcular suas resistências. Para que um modelo computacional se aproxime do comportamento observado na prática ele deve contemplar diversos efeitos, como plastificação e acúmulo de deformações plásticas, flambagem e flambagem inelástica, carregamentos, descarregamentos e recarregamentos aleatórios, degradação da resistência e rigidez do material devido à elevadas temperaturas. Visto isso, foi empregado nesse estudo um modelo fenomenológico histerético para descrever o comportamento individual de cada barra da estrutura, o qual representa de forma aproximada todos os comportamentos estruturais citados.

Capítulo 2

Revisão Teórica

2.1 Análise não linear geométrica via elementos finitos posicional

A utilização de métodos computacionais na análise estrutural esta diretamente relacionada com o advento da computação. Inicialmente, o método das Diferenças Finitas se destacou. No entanto, com o tempo, o Método dos Elementos Finitos, cujo nome foi cunhado em [Clough \(1960\)](#), se sobressaiu como alternativa viável e mais versátil para resolução de problemas estruturais ([BATHE, 2014](#)). Com o desenvolvimento da computação, o método de elementos finitos também foi evoluindo, sendo difundido nas mais diversas áreas do conhecimento.

Desde então, o MEF se difundiu amplamente, passando a ser universalmente utilizado e proporcionando resultados satisfatórios nas mais diversas áreas do conhecimento. Apesar de existirem outras técnicas para análises estruturais, o MEF é mais utilizado para esse fim ([SANCHES, 2011](#)). Entre os trabalhos que colaboraram na evolução do MEF para análise de estruturas em regimes de grandes deslocamentos, é possível citar, por exemplo: [Belytschko, Schwer e Klein \(1977\)](#), [Argyris, Dunne e Scharpf \(1978\)](#), [Argyris \(1999\)](#), [Bathe, Ramm e Wison \(1975\)](#), [Crisfield \(1991\)](#), [Ogden \(1997\)](#), [Holzapfel \(2000\)](#) e [Bonet e Wood \(2008\)](#). Dentre as formulações desenvolvidas, se destaca a formulação co-rotacional, sendo uma das mais aplicadas atualmente.

Para correta análise de estruturas que apresentam grandes deslocamento é necessário a análise não linear geométrica. Para este fim, foram desenvolvidas formulações Langreanas para o MEF, como por exemplo [Mondkar e Powell \(1977\)](#), [Gadala, Dokainish e Orava \(1984\)](#), [Peterson e Petersson \(1985\)](#) e [Schulz e Filippou \(1990\)](#).

[Bonet et al. \(2000\)](#) e [Coda \(2003\)](#) introduziram uma formulação posicional do MEF que utiliza descrição Lagrangiana para análise não linear de estruturas. O nome do método deriva do fato de utilizar como parâmetros nodais as posições dos nós a partir de um eixo

de coordenadas fixo, ao invés de tradicionais deslocamentos como parâmetros nodais. A formulação do MEFP além de ser de fácil entendimento, proporcionando ainda resultados precisos.

O desenvolvimento do MEFP é feito a partir da determinação do tensor mudança de configuração (\mathbf{F}), que descreve a configuração atual (ou de equilíbrio), em função de um domínio fixo, caracterizado pela configuração inicial (indeformada). Por empregar como referência a configuração inicial, o método é classificado como Lagrangiano total.

A não linearidade geométrica é intrínseca ao método posicional, pois não são impostas quaisquer simplificações relativas à ordem de grandeza dos deslocamentos e rotações sofridos pelo corpo na definição de \mathbf{F} . Isso se deve ao emprego da medida de deformação de Green que é uma medida de deformação objetiva e adequada para a solução de problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações. O conjugado energético da deformação de Green é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (OGDEN, 1997).

A solução aproximada dos elementos finitos posicionais é constituída por uma interpolação das posições nodais através de polinômios de Lagrange. O princípio da energia potencial total estacionária é utilizado para a determinação dessas posições nodais. Um sistema não linear de equações é configurado ao estabelecer a nulidade da primeira variação do funcional de energia potencial total (HOLZAPFEL, 2000). A solução desse sistema não linear pode ser obtida por meio de uma técnica baseada no método de Newton-Raphson (KRENK, 2009). Uma descrição mais detalhada a respeito do MEFP pode ser encontrada em Coda (2018).

A potencialidade do MEFP foi comprovada em vários trabalhos, dos quais é possível citar: Coda e Greco (2004) no qual o MEFP é utilizado para análise estática de pórticos bidimensionais sujeitos à grandes deslocamentos. Em Greco e Coda (2006a) o MEFP foi empregado em análise de treliças elastoplásticas. Já em Greco e Coda (2006a), foi realizada análise dinâmica em pórticos planos.

Em Codá (2006) foram empregados elementos sólidos em análises não lineares estáticas e dinâmicas considerando o problema de impacto. Sanches (2006) acoplou formulações com referenciais Lagrangianos e Eulerianos com a finalidade de analisar a interação fluido-estrutura em problemas bidimensionais considerando a dinâmica de fluidos compressíveis e elementos finitos posicionais.

Pascon (2008) implementou modelos constitutivos hiperelásticos não lineares para elementos de casca não linear geométrico; Minski (2008) analisou o impacto bidimensional entre estruturas aneladas e anteparo rígido; Maciel (2008) realizou análise não linear geométrica dinâmica de pórticos e sólidos tridimensionais considerando plasticidade; Carrazedo e Coda (2010) estudaram impacto entre estruturas constituídas de material elastoplástico considerando efeitos térmicos.

Rigobello (2011) desenvolveu formulação para análises termoestruturais de estru-

turas de aço utilizando elementos finitos posicional. Neste trabalho, através de análises térmicas transientes foram determinados campos de temperatura nas seções transversais do elementos estruturais sujeitos a fogo utilizando elementos finitos de pórtico tridimensionais e critério tridimensional de plasticidade.

Pascon (2012) utilizou elementos sólidos hiperelásticos para implementar modelos constitutivos hiperelastoplásticos com gradação funcional em regime de grandes deslocamentos e elevadas deformações. Em Pascon J.; Coda (21-38) foi desenvolvida uma aplicação para análise de materiais elastoplásticos homogêneos via elementos finitos tetraédricos de alta ordem. No trabalho de Sanches e Coda (2017) foi apresentada uma metodologia de elementos finitos de bidimensional para lidar com sistemas dinâmicos multicorpos flexíveis, aplicados em análises de colapso progressivo.

Já Kzam (2016), estudou efeitos de instabilidade em elementos de barra simples, casca e barra geral empregando método arc-length e através da decomposição da matriz hessiana e cálculo de autovalores e autovetores pode determinar os modos de falha da estrutura. Felipe (2019) utilizou o MEFP para análise de colapso progressivo de estruturas de treliças em análises não lineares estática e dinâmica. Carvalho (2019) analisou problemas bidimensionais utilizando diferentes modelos constitutivos, como elasto-plástico, visco-plástico, visco-elástico e visco-elasto-plástico.

2.2 Método de continuação

A resolução de problemas estruturais com elementos finitos não lineares envolve invariavelmente a solução de um sistema de equações algébricas não-lineares. Acompanhando as pesquisas relativas às formulações de elementos finitos não lineares, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos com o objetivo de determinar a melhor estratégia para se processar a solução não linear.

A consideração de não linearidades físicas ou geométricas tornam complexa a resposta estrutural frente aos esforços aplicados. Apenas alguns problemas não lineares permitem solução direta e, na maioria das vezes, uma estratégia iterativa deve ser usada. Os chamados métodos de continuação, são técnicas que visam descrever caminhos de equilíbrio complexos, contornando pontos associados ao ganho e à perda de rigidez do sistema, pontos limites de carga (*snap through*) e de deslocamento (*snap back*).

Uma estratégia iterativa simples para resolução de sistemas não lineares é o método de Newton–Raphson. Esse método iterativo se torna eficiente para mecânica das estruturas quando associados à técnicas incrementais.

2.2.1 Newton-Raphson

No método de Newton–Raphson convencional, cada etapa da solução iterativa requer a solução de um conjunto linearizado de equações. Isso pode envolver um esforço computacional muito alto e, portanto, versões modificadas, nas quais as equações não são reformuladas em cada etapa, podem ser uma alternativa.

De [Borst et al. \(2012\)](#) destaca três variações do método de Newton-Raphson em relação a atualização da matriz de rigidez tangente: Newton Raphson convencional, como citado acima, no qual a matriz de rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração; Newton-Raphson modificado, no qual a matriz de rigidez é atualizada apenas a cada incremento de carga e Newton Raphson Rigidez Inicial, em que a matriz de rigidez é calculada somente no início da análise se mantendo constante durante todo o processo restante. Os dois últimos são menos custosos computacionalmente do que o método de Newton-Raphson convencional, no entanto, dependendo do problema, o ganho computacional pode ser suprimido pela convergência mais lenta ([OGDEN, 1997](#)).

2.2.2 Métodos incrementais-iterativos

Para processos puramente estáticos, o tempo não desempenha nenhum papel. No entanto, no lugar do tempo é necessário outro parâmetro para ordenar a sequência de eventos. Uma forma de simular o efeito tempo é aplicar a carga externa em uma série de etapas de carregamento (incrementos de carga). A cada incremento de carga é estabelecido um sistema de equações não lineares que deve ser resolvido iterativamente por Newton-Raphson mantendo o parâmetro carga constante. Como marco inicial no desenvolvimento do método de NR por controle de carregamento para solução não linear, é necessário destacar [Argyris \(1965\)](#).

No entanto, a abordagem de controle de carga fornece uma resposta imprecisa próxima de pontos limites e também sofre de dificuldades de convergência quando a matriz de rigidez tangente se torna mal condicionada devido à perda de capacidade de carga ([AL-AUKAILY; SCOTT, 2018](#)). Em vez de manter o vetor de carga fixa como restrição, foi descoberto que é vantajoso manter um deslocamento específico como restrição. Esta técnica de incremento de deslocamento teve sua origem em [Argyris \(1965\)](#) e modificações subsequentes foram feitas por [Pian e Tong \(1971\)](#). Importantes contribuições nesta área foram feitas por [Batoz e Dhett \(1979\)](#) e subsequentes generalizações neste método foram feitas por [Powell e Simons \(1981a\)](#) e [Simons, Bergan e Nygard \(1984\)](#). [Zienkiewicz \(1971\)](#) e [Crisfield \(1981\)](#) apresentaram uma modificação no método de Newton-Raphson, fazendo com que a matriz de rigidez só fosse atualizada a cada passo de carga.

O incremento do vetor de deslocamento como um todo ao invés de um componente de deslocamento específico deu origem ao conceito dos métodos chamados comprimento de arco. Nestes, um parâmetro conhecido como comprimento de arco é usado como restrição

para limitar os passos de deslocamento e carga simultaneamente, e fazer como que os incrementos retornem para o caminho de equilíbrio da estrutura. Dentre os métodos citados acima, os métodos de comprimento de arco provaram ser mais poderosos, pois podem lidar com todos os problemas complexos que surgem no rastreamento do caminho de deflexão de carga (KRISHNAMOORTHY; RAMESH; DINESH, 1996).

2.2.3 Método do comprimento de arco

Pioneiros no método do comprimento de arco, Riks (1979) e Wempner (1979) propuseram uma equação de restrição ao incremento carga-deslocamento na forma um hiperplano normal ao incremento carga-deslocamento tangente do caminho de equilíbrio. Uma contribuição importante é atribuída à Crisfield (1981) e Crisfield (1983) que sugeriu o uso de uma equação de restrição de hiperesfera. Outra contribuição notável neste campo é a de Fried (1984), que sugeriu o uso de uma equação de restrição ortogonal a trajetória. Relevantes, também, no desenvolvimento do método do comprimento de arco são os trabalhos de Ramm (1981), Forde e Stierner (1987) e Lam e Morley (1992).

Na pesquisa de Kouhia e Mikkola (1989) foi realizado um estudo para unificação dos métodos propostos por Wempner (1979), Riks (1979), Ramm (1981), Crisfield (1981) e Fried (1984). Em Fafard e Massicotte (1993) é apresentada a interpretação geométrica do método do comprimento de arco.

O ponto principal do método do comprimento de arco consiste em os incrementos de carga e deslocamento prescritos serem considerados como uma primeira estimativa, sujeitos a ajuste pelo algoritmo durante o processo de iteração, o que torna essa técnica robustas e adequada para a seleção automática de incrementos. Portanto, a determinação correta do sinal do incremento inicial é dos um dos aspectos mais importantes para a técnica.

Trabalhos como Crisfield (1981), Wagner e Wriggers (1988) e Clarke e Hancock (1990) mostram que o sinal do determinante da matriz de rigidez tangente pode ser uma medida precisa para determinação do sinal do parâmetro inicial de carga. Em outra definição equivalente, Crisfield (1991) recomenda que o sinal do incremento inicial do parâmetro de carga deve ser igual ao do incremento anterior. No entanto, de acordo com Meek e Tan (1984), essa estratégia pode falhar em estruturas que apresentam múltiplos autovalores negativos.

Krenk (1995) e Krenk e Hededal (1995) sugerem que o sinal do incremento inicial seja definido verificando o produto interno entre o deslocamento incremental obtido no passo de carga anterior e o incremento de deslocamento corrente. Estudos desenvolvidos por Feng, Perié e Owen (1996), Feng, Perié e Owen (1997) e por Neto e Feng (1999) utilizam método semelhante.

2.3 Análise Térmica

A engenharia de segurança das estruturas em situação de incêndio consiste em avaliar os efeitos da ação térmica nas edificações, em associação com o comportamento estrutural previsto à temperatura ambiente e, como resultado projetar os elementos estruturais destas edificações resistente às ações provocadas por tal situação.

Se comparada com a análise em temperatura ambiente, a análise do comportamento das estruturas em situação de incêndio, na maioria dos casos, é muito mais complexa. Isso se deve ao fato de que durante a análise alguns efeitos estruturais que são intensificados pelas altas temperaturas. A não linearidade geométrica causada por grandes deformações, a não linearidade do material causada pelo amolecimento e o efeito da deformação térmica no cálculo dos esforços na barra devem ser levados em consideração na análise. Em uma análise de incêndio, também é de interesse o mecanismo de falha ou colapso progressivo de estruturas sob cargas térmicas. Para tanto, um problema fundamental é analisar o ponto limite ou comportamento pós-flambagem de uma estrutura pré-carregada sob aumento de temperatura, ou uma estrutura pré-aquecida sob cargas crescentes.

Em elevadas temperaturas a situação é bem diferente por diversos fatores. As ações em situação de incêndio são temperaturas, ou mais fundamentalmente, são fluxos de calor, resultantes da exposição da estrutura a gases quentes e radiação. O aquecimento produz expansão nos elementos estruturais e após o fim do incêndio ou após trabalho do combate ao incêndio, o resfriamento da estrutura produz retração dos membros. Como os elementos estruturais expandem com a elevação da temperatura e como as partes da estrutura não são aquecidas em taxas iguais, surgem tensões diferenciais.

As normas que tratam tal assunto têm procurado simplificar e classificar os procedimentos de análise em níveis de complexidade crescente. As normas Eurocode 3 ([EN 1993-1-2, 2005](#)) e Eurocode 4 ([EN 1994-1-2, 2005](#)) estabelecem as seguintes alternativas para verificação dos elementos estruturais:

- (a) Ensaios: nestes, os dados utilizados para posterior dimensionamento são obtidos em ensaios em fornos sob condição de incêndio-padrão, e contemplam apenas as geometrias mais comuns de seções transversais. Esses métodos também podem ser utilizados para validação da precisão dos outros métodos. O teste de resistência ao fogo é geralmente caro e sujeito a certas restrições físicas. No entanto, a maioria dos códigos de resistência ao fogo disponíveis em vários países foram derivados dos resultados baseados em tais testes.
- (b) Métodos simplificados de cálculo: são soluções apropriadas para elementos estruturais individuais, que permitem obtenção da elevação da temperatura, de modo homogêneo, em todo o elemento de interesse. Tendo por base hipóteses conservadoras, as soluções

são atingidas por meio de simples equações analíticas. Como exemplo, podem ser citados [Yang, Lin e Leu \(2008\)](#) e [Yang et al. \(2008\)](#).

- (c) Métodos avançados de cálculo: são métodos em que os princípios de engenharia são aplicados de forma realística, considerando análise térmica transiente (temperatura varia no espaço e no tempo), com condições de contorno dependentes do tempo e com propriedades dos materiais dependentes da temperatura, o que atribui a tal análise uma natureza consideravelmente não linear. Idealmente, estes métodos devem ser aplicáveis para qualquer curva de incêndio, uma vez conhecidas as propriedades do material na faixa de temperaturas de interesse. Complementarmente, processos avançados de análises de estruturas em situação de incêndio devem simular simultaneamente um modelo de análise térmica (para distribuição de temperatura) e um modelo de análise mecânica (para comportamento estrutural). A maioria dos modelos avançados é desenvolvida com base no Método dos Elementos Finitos (MEF), como, por exemplo, [Najjar e Burgess \(1996\)](#), [Iu e Chan \(2004\)](#), [Landesmann, Batista e Alves \(2005\)](#), [Mesquita et al. \(2005\)](#).

Em técnicas avançadas de modelagem de incêndios é empregada a fluído dinâmica para descrever o fluxo de calor em um ambiente. Em seguida, os dados obtidos são utilizados como condições de contorno para determinação da variação de temperatura ou a variação no campo de temperaturas nos elementos estruturais. A análise térmica no elemento pode ser dividida entre o calor que flui por convecção e radiação vindo de fora do elemento e, a transferência de calor por condução no interior dos elementos estruturais.

Encontrada a distribuição de temperaturas para determinado instante, é feita em seguida a análise mecânica, que visa simular os deslocamentos, deformações e tensões internas na estrutura, considerando a perda de resistência e de rigidez do material estrutural com o aumento de temperatura. Uma distribuição não uniforme das temperaturas tem como consequência uma distribuição não uniforme das deformações. Portanto, é necessário desenvolver um modelo em elementos finitos que descreva a distribuição de temperatura e outro modelo para análise das variáveis mecânicas.

A exposição de uma estrutura a condições transientes de aquecimento leva a uma transferência de calor dos gases quentes para a superfície dos elementos estruturais. Dentro dos elementos, o calor é então transmitido por condução, governado pela lei tridimensional de transferência de calor de Fourier.

A distribuição da temperatura ao longo da seção da barra depende do grau de isolamento e massividade da seção. A massividade é inversamente proporcional ao fator de forma ($P/A = \text{perímetro}/\text{área}$) e é o fator dominante na determinação da temperatura atingida nas seções de aço sem proteções ([YARZA; CAVIA; PARKE, 1983](#)).

Métodos numéricos foram desenvolvidos para simular o fluxo de calor unidimensional, bidimensional ou tridimensional dentro do elemento de aço. No entanto, uma simplificação

conservadora seria considerar a temperatura uniforme na seção. Esta simplificação é baseada na alta difusividade térmica do aço ($\alpha = k/\rho c$; onde k é a condutividade, ρ a densidade e c o calor específico).

Treliças espaciais, geralmente, são compostas de seções tubulares de aço. Estas seções apresentam um fator de forma alto e para $P/A > 300 \text{ m}^{-1}$, a temperatura do aço pode ser considerada igual à temperatura dos gases quentes. Neste caso, não seria necessário levar em consideração o problema de transferência de calor (YARZA; CAVIA; PARKE, 1983).

As curvas carga-deflexão obtidas na maior parte dos estudos numéricos utilizando métodos avançados de cálculo de estruturas carregadas termicamente raramente foram além dos pontos limites (YANG et al., 2008). Isso pode ser devido, em parte, à ausência de métodos adequados para tratar instabilidades numéricas que surgem em torno de pontos limites e, em parte, à falta de conhecimento do comportamento estrutural após pontos limites. Visto isso, surge a necessidade de rastrear o comportamento pós-flambagem de estruturas sob cargas térmicas. Para isso, para um primeiro esforço pode ser analisado o comportamento não linear das treliças, para as quais o comportamento elástico pós-flambagem é bem compreendido, por exemplo, pode ser citado o trabalho de Pecknold, Ghaboussi e Healey (1985).

Treliças espaciais são normalmente indeterminadas estaticamente e, por consequência, o colapso global da estrutural é, em geral, provocado pela falha sequencial dos membros. Em treliças com conexões rotuladas, os membros são carregados axialmente e a falha pode ocorrer devido à plastificação a tração ou flambagem à compressão. Na prática, a maioria dos sistemas de treliça usa seções esbeltas, o que caracteriza flambagem de natureza plástica. Tal instabilidade no membro causa uma perda repentina da capacidade de carga do elemento.

A perda geral de resistência dos membros estruturais devido ao aumento da temperatura e ao efeito de flambagem plástica resulta em uma redistribuição das forças internas dentro da estrutura. Se a estrutura for capaz de suportar esta redistribuição, pode permitir um aumento da temperatura e fornecer uma maior resistência ao fogo. No entanto, se a redistribuição fizer com que outros membros falhem, então a falha pode ser progressiva e a estrutura finalmente se tornará um mecanismo. Uma estrutura também pode ser considerada inutilizável, se houver deflexões excessivas.

2.3.1 Revisão bibliográfica

A seguir são apresentados alguns trabalhos desenvolvidos no Brasil e no mundo, relacionados com análise estruturais em situação de incêndio, tanto no contexto numérico quanto experimental.

Franssen, Schleich e Cajot (1995), Franssen et al. (1996) avaliou as hipóteses do

Eurocode 3 a respeito da carga crítica de flambagem de elementos aquecidos carregados axialmente. Modelos numéricos e experimentais foram gerados variando propriedades geométricas e materiais. Um novo modelo foi proposto para calcular carga última ou temperatura última. [Usmani et al. \(2001\)](#) apresentou descrições teóricas dos principais fenômenos que governam o comportamento de estruturas de pórticos em situação de incêndio. Por meio da análise dos resultados de um trabalho experimental desenvolvido em paralelo, o autor concluiu que são as forças e deslocamentos induzidos termicamente, e não a degradação do material, que governam a resposta estrutural ao fogo.

[Wang \(2004\)](#) apresentou um estudo teórico do comportamento pós-flambagem de colunas aquecidas carregadas axialmente com restrições por membros estruturais adjacentes. Em seu trabalho concluiu que a temperatura de falha de uma coluna comprimida aquecida pode ser muito maior do que aquela que provocou a flambagem e quanto maior a esbeltez da coluna, maior a diferença entre as temperaturas de ruptura e a de flambagem. [Caldas \(2008\)](#) expõe o desenvolvimento de modelos numéricos não lineares para a análise térmica e mecânica de estruturas de aço, concreto e mistas de aço e concreto em situação de incêndio. Ele utiliza elementos de viga tridimensional com plasticidade distribuída e elemento de casca laminado com dano, para simular vigas e lajes, respectivamente, sujeitas à elevadas variações térmicas.

[Yang, Lin e Leu \(2008\)](#) analisou o efeito térmico no comportamento pós-flambagem de treliças elásticas e elastoplásticas. Nesse trabalho foi incluído o efeito térmico na formulação analítica que descreve pós-flambagem de elementos de treliça. Através de um exemplo simples foram analisadas situações de temperatura constante, mas cargas crescentes, e de cargas constantes, mas temperatura crescente. [Ribeiro \(2010\)](#) desenvolveu código computacional para simulação tridimensional do comportamento de elementos estruturais em situação de incêndio via MEF. Esse autor implementou e utilizou elementos sólidos para simular numericamente o comportamento não linear de elementos estruturais de aço e mistos em situação de incêndio com o programa THERSYS.

[Rigobello \(2011\)](#) desenvolveu formulação para análises termoestruturais de estruturas de aço aporticadas utilizando elementos de pórtico não linear 3-D para análise estrutural, enquanto o problema térmico é tratado em regime transiente e tridimensional por meio de elementos finitos. [Alves, Barra e Rocha \(2016\)](#) modelou computacionalmente o comportamento termoelastoplástico acoplado em treliças espaciais sob grandes deslocamentos e grandes deformações. Utilizou a equação de transferência de calor e um modelo constitutivo elastoplástico modificado para incluir a influência térmica. O método dos elementos finitos é usado para determinar o campo de temperatura na seção transversal das barras.

[Ho, Chung e Wong \(2011\)](#) estudou a performance estrutural e térmica de treliças de aço de grandes vãos. Através de estudo numérico de uma treliça espacial de 33,6 x 33,6 m, foi concluído que os efeitos de expansão térmica, mesmo para baixas temperaturas,

provoca grandes forças compressivas nos apoios restringidos. Zhou, Cardoso e Bahai (2019) desenvolveu um novo modelo de material para análise termo-mecânica de aço em situação de incêndio. O modelo material proposto combina endurecimento (*hardening*) isotrópico-cinemático desenvolvido para avaliar o comportamento de descarregamento-carregamento do aço sujeito ao fogo, levando em consideração o efeito Bauschinger e o comportamento de endurecimento transiente.

2.4 Modelo Fenomenológico

Considerando a hipótese de grandes deslocamentos em análises não lineares, os elementos de barra carregados axialmente podem estar sujeitos a suscetivos carregamentos, descarregamentos e recarregamentos, tanto em tração como compressão. Durante tais carregamentos e descarregamentos, os limites de flambagem e plastificação podem excedidos, caracterizando comportamentos inelásticos para materiais elatoplásticos.

De acordo com Thai e Kim (2011), o uso de uma representação correta de um elemento de treliça é importante para obter uma resposta estrutural precisa, bem como, para entender as características de falha dos membros individuais e por consequência o comportamento de colapso de toda a estrutura. Portanto, tais modelos devem simular efeitos de flambagem, pós-flambagem inelástica, plastificação, carregamento, descarregamento e recarregamento.

A análise estática não linear inelástica de treliças foi estudada extensivamente usando vários modelos e métodos de análise não linear, dentre eles podem ser citados Papadrakakis (1983), Kondoh e Atluri (1985), Freitas e Ribeiro (1992), Murtha-Smith (1994), Saffari, Fadaee e Tabatabaei (2008). A fim de representar de forma realista o comportamento inelástico do material de estruturas de treliça, Hill, Blandford e Wang (1989) propôs um modelo empírico inelástico baseado m uma formulação Lagrangiana linearizada e atualizada a partir relação tensão-deformação resultante dos dados experimentais de Black, Wenger e Popov (1980).

Segundo Thai e Kim (2011), utilizar uma equação empírica constitutiva para representar o comportamento inelástico do material traz o benefício de a expressão poder ser ajustada para uma variedade de históricos de carga e corresponder ao comportamento experimentalmente observado. Além disso, é bastante simples de implementar em um programa de análise de elementos finitos.

Blandford e Wang (1993) utilizaram o modelo de Hill et al. para analisar a falha progressiva de treliças de torres espaciais submetidas a várias combinações de cargas. Ramesh e Krishnamoorthy (1994) também usaram o modelo de Hill et al. na análise de pós-flambagem inelástica de estruturas de treliça, no entanto, em vez de utilizar Newton-Raphson, usaram um método de relaxamento dinâmico para realizar os cálculos iterativos com a técnica do comprimento de arco variável.

Kassimali e Bidhendi (1988) usaram a formulação Euleriana para investigar a estabilidade de uma treliça submetida a cargas dinâmicas. Zhu, Al-Bermani e Kitipornchai (1994) pesquisaram a resposta dinâmica de treliças espaciais sujeitas a carregamentos dinâmicos, considerando não linearidades geométricas e materiais. A não linearidade geométrica é considerada usando uma formulação Lagrangiana atualizada, enquanto a não linearidade do material é capturada usando o modelo constitutivo de Ramberg-Osgood.

Thai e Kim (2009) utilizaram o método de controle de deslocamento generalizado em vez do método de controle de comprimento de arco para análise de grandes deslocamentos em regime inelástico de treliças espaciais, empregando o modelo de Hill et al. Thai e Kim (2011) apresentam uma análise não linear inelástica dinâmica de treliça espacial sob cargas de terremoto, incluindo não linearidades geométricas e materiais. A não linearidade geométrica é considerada com base em uma formulação Lagrangiana atualizada, enquanto a não linearidade do material é capturada traçando uma relação empírica tensão-deformação na faixa elastoplástica. O modelo de treliça apresentado é capaz de capturar vários modos de falha da barra, como flambagem, escoamento, pós-flambagem inelástica, descarregamento e recarregamento. Um método de dimensionamento otimizado para treliças espaciais baseado em confiabilidade foi desenvolvido por Truong e Kim (2018), utilizando o modelo constitutivo de Thai e Kim (2009).

No estudo de estruturas sujeitas à repetidos ciclos de carregamento e descarregamento, como o de sismos, é comum serem utilizados modelos histeréticos, os quais consideram o acúmulo de deformação plástica. Essa deformação pode alterar as propriedades de rigidez do material ao carregamento e descarregamento, tornando o comportamento à tração ou compressão variável dependente do histórico de deformações. A resposta histerética descreve a dissipação da energia do carregamento devido às deformações inelásticas, provocados pela sequência de carregamentos e descarregamentos.

Segundo Zheng e Fan (2019), em análises histeréticas de membros carregados axialmente, podem ser encontrados muitos comportamentos complexos, como pós-flambagem inelástica, degradação da resistência à flambagem devido ao efeito Bauschinger, degradação da resistência ao escoamento e fratura devido à fadiga de baixo ciclo, os quais complicam a previsão do comportamento geral do elemento. Portanto, para que um modelo seja preciso, deve contemplar estes fenômenos.

Nas últimas décadas, diversos estudos experimentais foram realizados sobre o comportamento histerético de membros de aço carregados axialmente como elementos de contraventamento, como Black, Wenger e Popov (1980), Ikeda, Mahin e Dermitzakis (1984), Zayas, Popov e Mahin (1980), Shaback e Brown (2003), Tremblay, Archambault e Filiatrault (2003), Goggins et al. (2006), Fell et al. (2009), Chen e Hu (2017). Esses estudos revelaram a influência das geometrias transversais, índice de esbeltez, restrições de extremidade, protocolos de carregamento e conexões na resposta cíclica de barras de aço e forneceram uma base para o desenvolvimento de modelos analíticos como fontes de

referência.

De acordo com [Zheng, Fan e Long \(2017\)](#), atualmente, diversos modelos foram desenvolvidos para prever o comportamento de histerese de elementos carregados axialmente. Estes modelos podem ser divididos em três métodos diferentes: modelos de discretização espacial, modelos físicos e modelos de fenomenológicos.

Modelos de discretização espacial dividem os membros de aço em numerosos elementos sólidos ou de casca, e, normalmente utilizam softwares como Abaqus e ANSYS. Esses modelos são capazes de simular com precisão os comportamentos locais e globais e podem prever com razoável exatidão a resposta cíclica inelástica e os pontos de falha. No entanto, embora a tecnologia computacional vem sendo desenvolvida, problemas de larga escala são custosos computacionalmente para serem resolvidos por esta técnica. Podem ser citados os seguintes trabalhos: [Jin e El-Tawil \(2003\)](#), [Uriz, Filippou e Mahin \(2008\)](#), [Krishnan \(2010\)](#) e [Eslamlou e Asgarian \(2017\)](#).

O modelo físico simplifica um elemento de barra como sendo dois membros elásticos com extremidades rotulados e uma rótula plástica no meio do comprimento e, estabelece uma relação histerética entre força axial e deslocamento para esse elemento com base em seu comportamento físico ([POWELL; CHEN, 1986](#)). Modelos físicos foram desenvolvidos por [Remennikov e Walpole \(1997\)](#), [Jin e El-Tawil \(2003\)](#) e [Dicleli e Calik \(2008\)](#), que consideraram em seus modelos o chamado efeito crescimento, bem como a degradação da tensão crítica de flambagem devido ao efeito Bauschinger. [Li, Fahnstock e Li \(2013\)](#) utilizaram o modelo físico de [Dicleli e Calik \(2008\)](#) para realizar uma análise dinâmica histerética de barras de aço utilizadas em sistemas de contraventamento.

Como afirma [Zheng e Fan \(2019\)](#), a maioria dos modelos físicos existentes preveem com precisão o comportamento à tração, mas são imprecisos à compressão. Por exemplo, o efeito *pitching* resulta ligeiramente menor ([DICLELI; CALIK, 2008](#)) e, a carga de crítica de flambagem é superestimada ([DAVARAN; FAR, 2009](#)). Além disso, problemas de convergência podem ocorrer durante a resolução do sistema de equações não lineares ([ZHENG; FAN, 2018](#)).

Em contraposição, modelos fenomenológicos seguem regras histeréticas calibradas com dados experimentais e analíticos, e podem descrever o comportamento histórico de uma barra usando fórmulas matemáticas simples. Por essa razão, são computacionalmente mais eficientes do que modelos de elementos finitos e modelos físicos. Esta vantagem é particularmente importante para a análise não linear ou avaliação do colapso de estruturas de grande escala. Um contraponto de modelos fenomenológicos é o fato da precisão dos resultados dependerem dos parâmetros de calibração para cada situação específica.

Muitos estudos sobre esse modelo foram feitos na década de 80, como por exemplo, [Maison e Popov \(1980\)](#), [Ikeda, Mahin e Dermitzakis \(1984\)](#), [Fukuta et al. \(1989\)](#). Mais recentemente, em [Kashani et al. \(2014\)](#) e [Kashani et al. \(2015\)](#) foi proposto um modelo fenomenológico histerético para vergalhões de aço com e sem danos por corrosão. O modelo

simula a flambagem do reforço, a deterioração da resistência à compressão pós-flambagem devido ao histórico de deformações e o efeito da fadiga de baixo ciclo na resposta à tensão. [Zheng e Fan \(2019\)](#) desenvolveram um modelo histerético para barras de aço com seção oca utilizadas como contraventamento, considerando o efeito Bauschinger, o comportamento pós-flambagem inelástico e a fadiga de baixo ciclo através da teoria do dano cumulativo linear de Miner (Miner 1945) baseada em uma relação Coffin-Manson (Manson 1965).

Capítulo 3

Mecânica dos sólidos

3.1 Cinemática dos sólidos deformáveis

A cinemática dos sólidos deformáveis descreve o movimento de um corpo em um meio contínuo sem levar em consideração suas causas. O sólido deformável é definido como o agrupamento de pontos materiais cujas grandezas: posição, velocidade e aceleração são expressas por meio de funções contínuas (KZAM, 2016).

Funções contínuas que descrevem as grandezas dos pontos materiais associam a cada instante do movimento o lugar geométrico dos pontos sólidos descritos por meio de suas coordenadas geométricas, em relação a um referencial do espaço. Nesse caso, o espaço Euclidiano tridimensional.

De acordo com Holzapfel (2000), na Mecânica do Contínuo há duas abordagens para descrever o movimento das partículas: a descrição Lagrangiana, também chamada de referência material, e a descrição Euleriana ou referência espacial. A referência Lagrangiana descreve o comportamento da partícula material, considerando a posição inicial ou indeformada do corpo. Já na descrição Euleriana, o interesse está em um ponto do espaço e o que acontece neste ponto com o decorrer do tempo. Segundo Bonet e Wood (2008), a formulação Lagrangiana é mais adequada para quantificar as deformações que ocorrem nos sólidos deformáveis, portanto, será o modo de representação do movimento das partículas utilizado neste trabalho.

3.1.1 Mudança de configuração

A grandeza posição ou configuração é um campo vetorial que associa pontos materiais às suas respectivas posições ou coordenadas no espaço (HOLZAPFEL, 2000). Esta associação deve ser feita com relação a um referencial. Neste trabalho, no instante $t = 0$, as posições iniciais são representadas através do vetor posições iniciais \mathbf{x} e no instante $t > 0$, as posições são representadas pelo vetor posições atuais \mathbf{y} .

Na Figura 3.1 é o mostrado o movimento genérico de um sólido deformável.

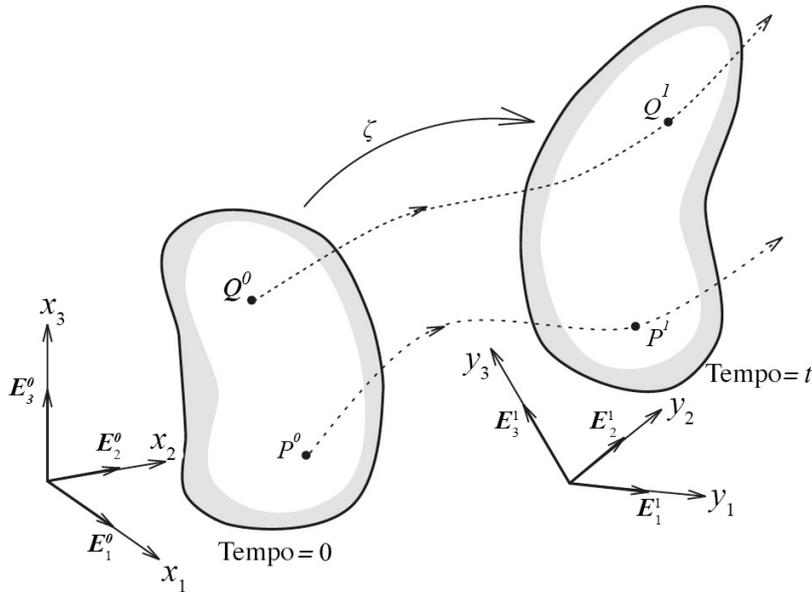


Figura 3.1: Movimento genérico de um sólido deformável.

Fonte: Adaptado de [Bonet e Wood \(2008\)](#)

O corpo é tratado com um conjunto de partículas materiais descritas pelas coordenadas \mathbf{x} em relação ao eixo cartesiano E_i^0 , na posição inicial no $t = 0$. Na posição atual, no tempo $= t$, as partículas são descritas pelas coordenadas \mathbf{y} em relação a uma base cartesiana alternativa E_i^1 . O movimento entre as posições inicial e final da partícula pode ser descrito matematicamente pelo mapeamento ζ conforme

$$\mathbf{y} = \zeta(\mathbf{x}, t). \quad (3.1)$$

Para valores fixos de t a equação acima representa o mapeamento entre corpo indeformado e deformado. Além disso, a equação (3.1) descreve o movimento ou a trajetória de uma partícula \mathbf{x} em função do tempo.

3.1.2 Gradiente da função deformação

O gradiente da função deformação \mathbf{F} é um parâmetro fundamental para análise de deformações finitas. É empregado em todas as equações que envolvam parâmetros anteriores à deformação e posteriores à deformação ([BONET; WOOD, 2008](#)). Por exemplo, sejam duas partículas Q_1^0 e Q_2^0 , vizinhas de uma partícula material P^0 na configuração inicial, pertencentes a um sólido que sofre deformação (veja Figura 3.2). O gradiente de deformação permite descrever a posição espacial relativa das duas partículas após a deformação, em termos de suas posições materiais relativas.

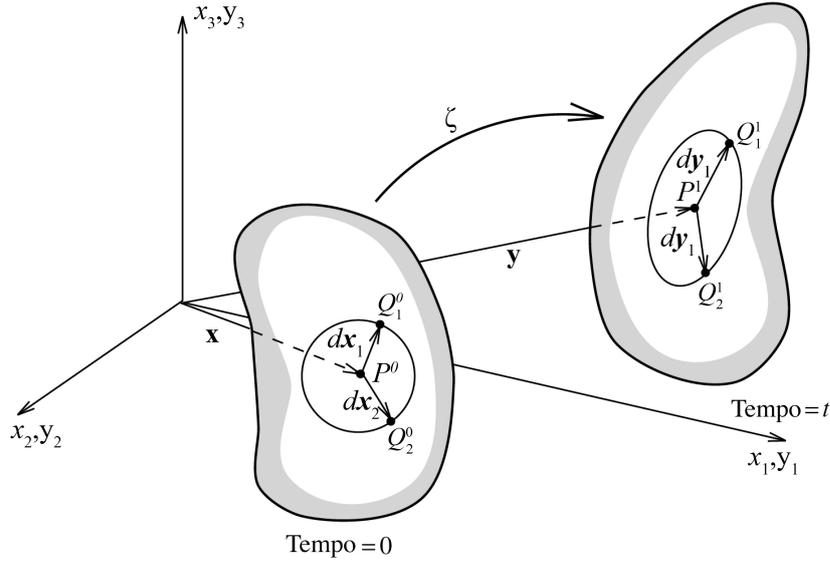


Figura 3.2: Representação do movimento genérico da vizinhança de uma partícula.

Fonte: Adaptado de [Bonet e Wood \(2008\)](#)

Nesse caso, as posições das partículas Q_1^0 e Q_2^0 relativas à P^0 antes da deformação, são expressas pelo vetores elementares $d\mathbf{x}_1^0$ e $d\mathbf{x}_2^0$ dados por

$$d\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}_{Q_1^0}^0 - \mathbf{x}_{P^0}^0; \quad d\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{x}_{Q_2^0}^0 - \mathbf{x}_{P^0}^0. \quad (3.2)$$

Após deformação, as partículas materiais Q_1^0 , Q_2^0 e P^0 assumem posições espaciais atuais, obtidas pela expressão (3.1) como

$$\mathbf{y}_p = \zeta(\mathbf{x}_p^0, t); \quad \mathbf{y}_{q_1} = \zeta(\mathbf{x}_{Q_1^0}^0, t); \quad \mathbf{y}_{q_2} = \zeta(\mathbf{x}_{Q_2^0}^0, t); \quad (3.3)$$

e os vetores elementares correspondentes, mostrados na Figura 3.2, são expressos por

$$\begin{aligned} d\mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_{Q_1^1} - \mathbf{y}_{P^1} = \zeta(\mathbf{x}_{P^0}^0 + d\mathbf{x}_1^0, t) - \zeta(\mathbf{x}_{P^0}^0, t); \\ d\mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_{Q_2^1} - \mathbf{y}_{P^1} = \zeta(\mathbf{x}_{P^0}^0 + d\mathbf{x}_2^0, t) - \zeta(\mathbf{x}_{P^0}^0, t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dessa forma, o tensor gradiente de deformação \mathbf{F} é definido por

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{|\mathbf{x}} \zeta, \quad (3.5)$$

onde o símbolo $\nabla_{|\mathbf{x}}$ representa o gradiente em relação a configuração material. O gradiente de deformação é definido de forma indicial por

$$F_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}. \quad (3.6)$$

Os vetores elementares $d\mathbf{y}_1$ e $d\mathbf{y}_2$ podem obtidos a partir de $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ como

$$d\mathbf{y}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{x}_1, \quad d\mathbf{y}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{x}_2. \quad (3.7)$$

O gradiente \mathbf{F} transforma vetores na configuração inicial em vetores na configuração atual, por isso é definido como um tensor de segunda ordem.

3.1.3 Mudança de volume

Um importante critério da mecânica do contínuo é a condição de impenetrabilidade. Essa condição estabelece que para o material não penetrar em si mesmo e não se aniquilar, o jacobiano da transformação, $J = \det(\mathbf{F})$, deverá ser positivo em qualquer ponto material.

O determinante de \mathbf{F} é uma função que transforma um volume V^0 de um sólido na configuração inicial, em seu respectivo volume V^1 na configuração atual. Considerando um volume infinitesimal dV^0 na configuração inicial, formado pelo produto dos três vetores unitários ortogonais $d\mathbf{x}_1$, $d\mathbf{x}_2$ e $d\mathbf{x}_3$, e o correspondente volume deformado dV^1 na configuração atual, formado pelo produto dos vetores elementares $d\mathbf{y}_1$, $d\mathbf{y}_2$ e $d\mathbf{y}_3$, a transformação para cada vetor é feita por

$$\begin{aligned} d\mathbf{y}_1 &= \mathbf{F}d\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} d\mathbf{x}_1; \\ d\mathbf{y}_2 &= \mathbf{F}d\mathbf{x}_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} d\mathbf{x}_2; \\ d\mathbf{y}_3 &= \mathbf{F}d\mathbf{x}_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} d\mathbf{x}_3. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O produto triplo desses três vetores elementares resulta no volume deformado

$$dV^1 = \mathbf{y}_1 \cdot (\mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \cdot \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \times \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.9)$$

A equação (3.9) pode ser reescrita como a função mudança de volume

$$dV^1 = \det(\mathbf{F})dV^0 = JdV^0. \quad (3.10)$$

A condição de impenetrabilidade, portanto, determina que

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV^1}{dV^0} > 0. \quad (3.11)$$

No caso de análise de sólidos unidimensionais, onde a dimensão de interesse é apenas o comprimento, a área transversal pode ser considerada constante antes e após deformação. Nessa situação, apenas a dimensão de comprimento é variável. Dessa forma, o gradiente \mathbf{F} transforma um vetor de comprimento $d\mathbf{l}^0$ na configuração inicial, em um

vetor $d\mathbf{l}^1$ na configuração atual, do seguinte modo

$$d\mathbf{l}^1 = \mathbf{F}d\mathbf{l}^0 = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{l}} d\mathbf{l}^0. \quad (3.12)$$

Para sólidos unidimensionais, no qual a área é considerada constante, a condição de impenetrabilidade se resume em

$$\mathbf{F} = \det(\mathbf{F}) = \frac{dl^1}{dl^0} > 0. \quad (3.13)$$

3.1.4 Mudança de área

Seja um elemento de área $d\mathbf{a}^0 = da^0 \mathbf{n}^0$ na configuração indeformada, que após deformação é transformado em $d\mathbf{a}^1 = da^1 \mathbf{n}^1$, sendo \mathbf{n}^0 e \mathbf{n}^1 vetores unitários ortogonais a $d\mathbf{a}^0$ e $d\mathbf{a}^1$, respectivamente, como ilustra a Figura (3.3). Considerando, também, um vetor $d\mathbf{l}^0$ que após deformação é transformado no vetor $d\mathbf{l}^1$. O produto escalar de $d\mathbf{l}^1$ e $d\mathbf{a}^0$ forma o volume dV^0 , que é expresso na configuração inicial e atual por

$$\begin{aligned} dV^0 &= d\mathbf{l}^0 \cdot d\mathbf{a}^0; \\ dV^1 &= d\mathbf{l}^1 \cdot d\mathbf{a}^1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

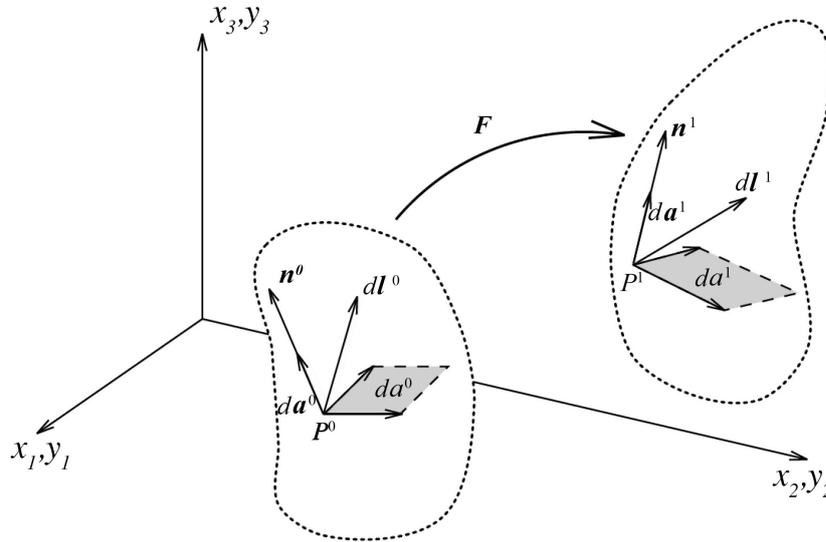


Figura 3.3: Transformação de área.

Fonte: Adaptado de Bonet e Wood (2008).

Desenvolvendo a equação (3.14) em termos do gradiente \mathbf{F} e do Jacobiano J , tem que

$$Jd\mathbf{l}^0 \cdot d\mathbf{a}^0 = (\mathbf{F}d\mathbf{l}^0) \cdot d\mathbf{a}^1, \quad (3.15)$$

o que permite escrever a transformação de área da configuração inicial para atual como

$$d\mathbf{a}^1 = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{a}^0. \quad (3.16)$$

3.1.5 Decomposição polar

Segundo [Bonet e Wood \(2008\)](#), a decomposição polar define o tensor gradiente \mathbf{F} como produto entre o tensor de rotação \mathbf{R} e o tensor de alongamento \mathbf{U} , sendo definido por

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (3.17)$$

onde \mathbf{U} é chamado de tensor de alongamento à direita (ou material), o qual mede a deformação pura de um corpo. O tensor \mathbf{U} é definido em relação a configuração inicial e é simétrico, ou seja, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$.

O tensor \mathbf{R} é chamado de tensor de rotação, o qual mede a rotação local de um corpo, ou seja, mede os movimentos de rotação sem que haja mudança de forma propriamente dita, portanto, $\det(\mathbf{R}) = 1$. Uma propriedade relevante do tensor de rotação é sua ortogonalidade, isto é, $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade.

Uma rotação de corpo rígido em torno de uma origem fixa ocorre, somente se, $\mathbf{U} = \mathbf{I}$, dessa forma, $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Como resultado, cada elemento de linha material (configuração inicial) $d\mathbf{x}$ é rotacionado em um único elemento de linha espacial (configuração atual) $d\mathbf{y}$ (e vice versa). Por outro lado, se $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, a deformação é denominada chamada de alongamento puro, dessa forma, $\mathbf{F} = \mathbf{U}$.

3.1.6 Medidas de deformação

Uma medida de deformação é um parâmetro que possibilita medir a alteração de forma, resultante da mudança da configuração inicial para atual. Tal medida deve ser objetiva, isto é, independente de movimentos de corpo rígido ou da escolha de eixos adotada.

Pode ser definida uma medida geral deformação da seguinte forma: considerando a alteração no produto escalar dos dois vetores $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$, a medida que se deformam em $d\mathbf{y}_1$ e $d\mathbf{y}_2$, como mostrado na Figura 3.2. Essa alteração implica tanto em alongamento, ou seja, mudança no comprimento, quanto na mudança do ângulo formado entre os dois vetores. Retomando a equação (3.7), o produto escalar na configuração atual $d\mathbf{y}_1 \cdot d\mathbf{y}_2$, pode ser obtido em termos dos vetores na configuração inicial $d\mathbf{y}_1 \cdot d\mathbf{y}_2$, por

$$d\mathbf{y}_1 \cdot d\mathbf{y}_2 = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{C}d\mathbf{x}_2, \quad (3.18)$$

onde \mathbf{C} é o alongamento à direita de Cauchy-Green, expresso em termos do gradiente de

deformação \mathbf{F} por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (3.19)$$

Na equação (3.19) é possível notar que o tensor \mathbf{C} opera com os vetores na configuração inicial $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ e, portanto, é classificado como uma medida Lagrangiana.

Pela decomposição polar, o alongamento à direita de Cauchy-Green pode ser escrito como

$$\mathbf{C} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T (\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{I} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2, \quad (3.20)$$

ou seja, o tensor \mathbf{C} é função apenas da parcela de alongamento puro de \mathbf{F} . Pela equação (3.20), também, é possível comprovar que em movimentos de corpo rígido, onde não ocorrem deformações, o tensor \mathbf{C} é igual a identidade \mathbf{I} , isto é, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$

Do tensor alongamento à direita de Cauchy-Green deriva outra medida de deformação conveniente, a deformação de *Green-Lagrange* \mathbf{E} . Com essa medida de deformação, a mudança no produto escalar dos vetores, entre a configuração inicial e configuração atual, pode ser obtida em termos dos vetores iniciais $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$. Essa mudança é expressa por

$$\frac{1}{2} (d\mathbf{y}_1 \cdot d\mathbf{y}_2 - d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{E} d\mathbf{x}_2, \quad (3.21)$$

onde o \mathbf{E} é escrito como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (3.22)$$

O tensor \mathbf{E} resulta no tensor nulo quando o sólido é submetido à apenas movimento de corpo rígido, por esse motivo, é chamado de normalizado. Outra particularidade do tensor \mathbf{E} comprovável, é que a medida que \mathbf{F} se aproxima da identidade, a deformação de Green se aproxima da clássica deformação de engenharia ε .

3.2 Equilíbrio

Embora, neste trabalho trabalho seja empregado a descrição Lagrangiana total para formulação, será seguido a formulação apresentada em Coda (2018). Inicialmente as equações de equilíbrio serão descritas em sua configuração Euleriana, e, em seguida, serão obtidas suas configurações Lagrangianas, através da utilização das equações de mudança de volume e de área. Essa abordagem se justifica pela relação direta entre estado de equilíbrio de um corpo e sua configuração atual.

3.2.1 Tensor de Cauchy

3.2.1.1 Definição geral de estado de tensão em um ponto

Seja um corpo Ω^1 deformável em sua configuração atual equilibrada, como mostrado na Figura 3.4, sujeito a um conjunto de forças concentradas e distribuídas em sua superfície.

Ao ser submetido a um corte imaginário, separando o corpo em duas partes conforme Figura 3.4, na parte à direita do corte deve aparecer uma distribuição de forças por unidade de superfície, chamada tensão, de modo a garantir o equilíbrio do corpo. Nota-se, pela terceira Lei de Newton, que na parte à esquerda, deve surgir uma distribuição de forças de mesma intensidade e direção, porém de sentido oposto.

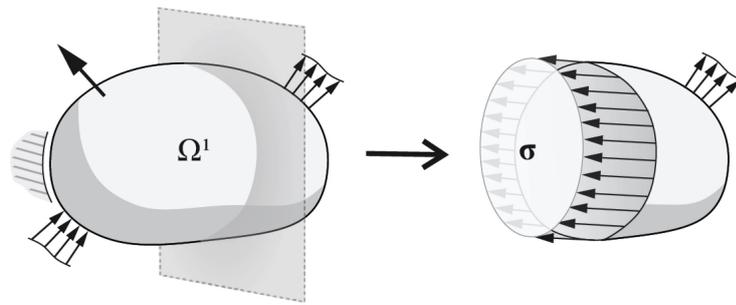


Figura 3.4: Corpo em equilíbrio.

Fonte: Adaptado de [Carvalho \(2019\)](#)

Se ao invés de um único corte, o corpo for submetido a seis cortes, paralelos dois a dois, ortogonais aos eixos coordenados e com distâncias infinitesimais entre si, de forma a separar do corpo um cubo infinitesimal em equilíbrio, como mostrado na Figura 3.5, as faces do cubo estarão sujeitas a tensões de entrada ou saída, que pelo princípio de ação e reação, possuem o mesmo valor. Estas tensões podem ser decompostas em três componentes, representadas por σ_{ij} , onde o índice i é referente ao plano onde atua e o índice j indica direção da componente.

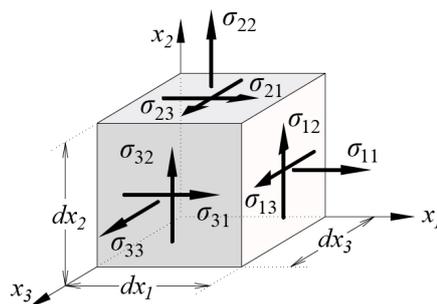


Figura 3.5: Componentes de tensão e conversão de sinais.

Fonte: [Carvalho \(2019\)](#)

As componentes ortogonais aos planos são chamadas de tensões normais, recebendo sinal positivo quando representam tração e sinal negativo para compressão. Além disso, as componentes com direção tangente ao plano que atuam são chamadas de tensões de cisalhamento e sua convenção de sinais é igual a convenção de força cortante adotada para

barras gerais. O estado de tensão exposto pode ser organizado convenientemente de modo tensorial, denominado tensor de tensões de Cauchy, expresso por

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Pelo equilíbrio de momentos do cubo infinitesimal, é comprovado o teorema de Cauchy, o qual determina a simetria do tensor de tensões de Cauchy, isto é, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

A tensão de Cauchy é uma medida de tensão descrita na configuração atual e, é também, denominada de tensão real, pois possui representação física explícita, a tradicional relação força por unidade de área, utilizada em análises lineares (BONET; WOOD, 2008).

3.2.2 Equilíbrio Euleriano

O elemento infinitesimal da Figura 3.5 representava um único ponto no corpo e sua apresentação serviu para a definição das componentes de tensão. Agora, considerando a primeira e segunda leis de Newton para descrever o equilíbrio e o movimento do infinitésimo de volume escrito em tensões, o infinitésimo é entendido como uma porção do contínuo que possibilita visualizar a variação de qualquer grandeza no interior do domínio. Nessa abordagem interessam as variações das componentes de tensão de Cauchy no interior do contínuo, além das forças de volume.

No infinitésimo as tensões se alteram de valor no contínuo segundo as direções cartesianas que indicam sua variação infinitesimal do plano de entrada para o plano de saída. A aceleração sofrida pelo infinitésimo é proporcional a resultante de forças e inversamente proporcional à sua massa, dada por $\rho dx_1 dx_2 dx_3$, onde ρ é a massa específica. Imaginando este elemento infinitesimal livre do contínuo que o circunda, porém submetido às tensões por este geradas, podem ser escritas três equações de equilíbrio de translação e três equações de equilíbrio em rotação, uma vez que, a aceleração angular do infinitésimo é inversamente proporcional à sua inércia de rotação e proporcional à resultante de torque.

Analisando o equilíbrio, enquanto em uma face do cubo infinitesimal atua a componente σ_{ij} , na face oposta atua a tensão escrita como $\sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} dy_i$, onde $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} dy_i$ é a variação infinitesimal de tensão que ocorre ao longo do cubo. Pela segunda lei de Newton, para todas as forças infinitesimais na direção x_1 (veja Figura 3.6), a equação de equilíbrio fica escrita como

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \sigma_{31} dx_1 dx_2 + \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \rho \ddot{y}_1 dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.23)$$

onde b_1 representa a força de volume na direção 1.

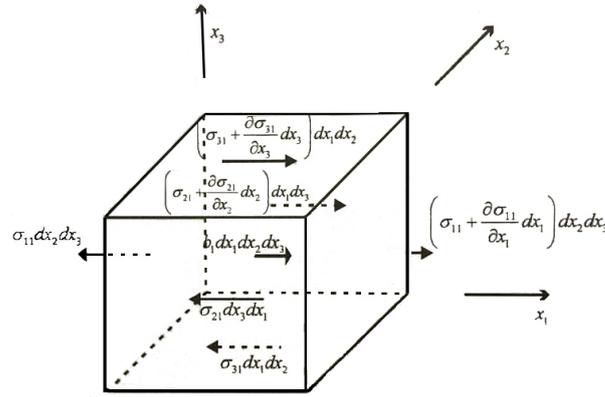


Figura 3.6: Variações das tensões e equilíbrio na direção 1.

Fonte: Coda (2018)

Excluindo os termos que se anulam e retomando que $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, a equação (3.23) resulta em

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 \right) dV = \rho \ddot{y}_1 dV. \quad (3.24)$$

Eliminando o volume dV ,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 \right) = \rho \ddot{y}_1, \quad (3.25)$$

e fazendo as mesmas operações para as direções x_2 e x_3 resultam as seguintes equações de equilíbrio,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 \right) = \rho \ddot{y}_2, \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 \right) = \rho \ddot{y}_3. \quad (3.27)$$

Portanto, em notação indicial, a chamada equação diferencial de equilíbrio local (ou de movimento) que representa matematicamente o equilíbrio euleriano local ou no ponto contínuo, é expressa como

$$\sigma_{ji,j} - b_i = \rho \ddot{y}_i. \quad (3.28)$$

Em notação dyadica, a equação diferencial de equilíbrio local euleriano pode ser escrita como

$$\nabla_{|\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \quad (3.29)$$

em que \mathbf{b} representa a força de volume ao longo do elemento infinitesimal; $\nabla_{|\mathbf{y}}$ é o divergente do tensor de tensões em relação à configuração atual. Integrando a equação (3.29) em relação ao domínio Ω^1 , é obtido a expressão

$$\int_{\Omega^1} \nabla_{|\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV^1 + \int_{\Omega^1} \mathbf{b} dV^1 = \int_{\Omega^1} \rho \ddot{\mathbf{y}} dV^1. \quad (3.30)$$

Em seguida, é aplicado à primeira parcela da equação (3.30) o Teorema de Gauss, o qual relaciona a integral do divergente de uma função no volume de um corpo com a integral do produto interno desta função com o versor normal à superfície do corpo. Assim, a equação (3.30) resulta em

$$\int_{\Gamma^1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da^1 + \int_{\Omega^1} \mathbf{b} dV^1 = \int_{\Omega^1} \rho \dot{\mathbf{y}} dV^1. \quad (3.31)$$

onde Γ^1 é área superficial do domínio Ω^1 , \mathbf{n} é o versor normal à superfície do corpo Ω^1 . O termo $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ pode ser entendido como uma força de superfície, sendo representado por \mathbf{p} . Dessa forma, a equação (3.31) resulta na equação de equilíbrio global Euleriano, expressa por

$$\int_{\Gamma^1} \mathbf{p} da^1 + \int_{\Omega^1} \mathbf{b} dV^1 = \int_{\Omega^1} \rho \ddot{\mathbf{y}} dV^1. \quad (3.32)$$

Segundo Coda (2018), em análises estáticas, o lado direito da equação (3.32) é nulo, sendo expressa por

$$\int_{\Gamma^1} \mathbf{p} da^1 + \int_{\Omega^1} \mathbf{b} dV^1 = 0. \quad (3.33)$$

Durante o processo de solução em que o equilíbrio do sistema ainda não tenha sido atingido, a equação (3.33) define a força residual \mathbf{R} como

$$\mathbf{R} = \int_{\Gamma^1} \mathbf{p} da^1 + \int_{\Omega^1} \mathbf{b} dV^1. \quad (3.34)$$

3.2.3 Equilíbrio Lagrangiano

Aplicando as fórmulas de variação de volume (3.10) e variação de área (3.16) na equação de equilíbrio estático Euleriano (3.33), é obtida a expressão

$$\int_{\Omega^0} J \mathbf{b} dV^0 + \int_{\Gamma^0} (J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{n}^0 da^0 = 0 \quad (3.35)$$

onde dA^0 e dV^0 são a área e o volume na configuração inicial; Γ^0 é a área superficial do domínio Ω^0 . As forças de volume \mathbf{b} são consideradas conservativas, isso implica que $\mathbf{b}^0 = J \mathbf{b}$. Neste ponto, é definido o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} de primeira espécie como

$$\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.36)$$

O tensor \mathbf{P} possui unidade de tensão, pois, o Jacobiano J e o inverso do gradiente \mathbf{F} são adimensionais. A equação (3.35) pode ser reescrita em termos do tensor \mathbf{P} como

$$\int_{\Omega^0} J \mathbf{b}^0 dV^0 + \int_{\Gamma^0} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{n}^0 d^0 = 0. \quad (3.37)$$

A equação (3.37) expressa o equilíbrio global Lagrangiano. Aplicando o Teorema de Gauss a esta equação e considerando a arbitrariedade do volume, resulta na equação de

equilíbrio local Lagrangiano, como

$$\nabla_{|\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{b}^0 = 0 \quad (3.38)$$

onde $\nabla_{|\mathbf{x}}$ indica o divergente do tensor em relação a configuração inicial.

3.2.4 Equilíbrio Lagrangiano por abordagem energética

Seguindo a formulação apresentada por Coda (2018), a abordagem energética é utilizada para obtenção do equilíbrio do sistema. Nessa abordagem, o funcional da energia mecânica total é escrito como

$$\Pi = \Pi_{def} + \Pi_{ext} + \Pi_{cin}, \quad (3.39)$$

em que Π_{def} é a energia de deformação, Π_{ext} é a energia potencial das forças externas e Π_{cin} é energia cinética. De acordo o princípio da estacionaridade da energia mecânica total, o sistema está em equilíbrio quando a primeira variação do funcional é nula, ou seja,

$$\delta\Pi = \delta\Pi_{def} + \delta\Pi_{ext} + \delta\Pi_{cin} = 0 \quad (3.40)$$

Em análises estáticas, a parcela da energia cinética é nula, por isso, nesse trabalho a energia relacionada a quantidade de movimento em função do tempo não será considerada.

$$\delta\Pi = \delta\Pi_{def} + \delta\Pi_{ext}. \quad (3.41)$$

Uma variação $\delta\mathbf{y}$ infinitesimal no campo de posições \mathbf{y} do sistema em equilíbrio representado pela equação (3.38) provocada por uma força \mathbf{g} , gera uma variação de trabalho, expressa por

$$\delta\pi = \mathbf{g}\delta\mathbf{y} = 0. \quad (3.42)$$

Integrando a equação (3.38) em relação ao volume inicial, é obtida a expressão

$$\delta\Pi = \int_{\Omega^0} \delta\pi dV = \int_{\Omega^0} (\nabla_{|\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{b}^0)\delta\mathbf{y}dV; \quad (3.43)$$

De acordo com Coda (2018), após algumas manipulações algébricas, a equação (3.43) pode ser reescrita como

$$\delta\Pi = \int_{\Omega^0} \mathbf{P}^T : \delta\mathbf{F}dV^0 - \int_{\Omega^0} \mathbf{b}^0\delta\mathbf{y}dV^0 - \int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0\delta\mathbf{y}da^0 = 0 \quad (3.44)$$

em que \mathbf{p}^0 é a força de superfície Lagrangiana conservativa.

Da equação (3.44) é possível concluir que o tensor \mathbf{P}^T é definido como conjugado do gradiente \mathbf{F} . O primeiro tensor Piola-Kirchhoff \mathbf{P} é um tensor não-simétrico de segunda

ordem, como tal, não está completamente relacionado à configuração inicial (Lagrangiana), visto que \mathbf{F} não é uma medida de deformação objetiva. Assim sendo, é definido um tensor de tensão simétrico totalmente em relação a configuração inicial, conhecido como o segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , escrito como

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}^T \quad (3.45)$$

Substituindo a equação (3.36) em (3.45), resulta em

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.46)$$

pela qual, é possível escrever a tensão de Cauchy em relação ao tensor \mathbf{S} , como

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (3.47)$$

A simetria de $\boldsymbol{\sigma}$ implica na simetria de \mathbf{S} . Portanto, da primeira parcela da equação (3.44) e da expressão (3.45), resulta que

$$\mathbf{P}^T : \delta \mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} = (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbf{S}. \quad (3.48)$$

Devido a simetria de \mathbf{S} , é possível concluir que

$$(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbf{S} = (\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{F})^T : \mathbf{S} = \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{S} = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}. \quad (3.49)$$

Portanto, o tensor \mathbf{S} é o conjugado energético da deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} . A equação (3.44) pode ser reescrita na forma da equação base para os desenvolvimentos do método dos elementos finitos lagrangiano total baseado em posições para análise estática não linear geométrica de estruturas, expressa por

$$\delta \Pi = \int_{\Omega^0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV^0 - \int_{\Omega^0} \mathbf{b}^0 \delta \mathbf{y} dV^0 - \int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0 \delta \mathbf{y} da^0 = 0. \quad (3.50)$$

3.2.5 Energia potencial das forças externas

A segunda e terceira parcelas da equação (3.50) são referentes a variação da energia potencial das forças externas, escrita como

$$\delta \Pi^{ext} = - \int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0 \delta \mathbf{y} - \int_{\Omega^0} \mathbf{b}^0 \delta \mathbf{y} dV^0. \quad (3.51)$$

Admitindo a existência de cargas concentradas \mathbf{f} nos nós da malha de elementos finitos, a equação (3.51) resulta em

$$\delta \Pi^{ext} = \mathbf{f} \delta \mathbf{y} - \int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0 \delta \mathbf{y} - \int_{\Omega^0} \mathbf{b}^0 \delta \mathbf{y} dV^0. \quad (3.52)$$

3.2.6 Energia de deformação

A energia de deformação é definida como a integral da energia específica de deformação ou energia livre de Helmholtz Ψ em relação ao volume do sólido, expressa como

$$\Pi^{def} = \int_{\Omega^0} \Psi dV^0. \quad (3.53)$$

A energia específica de deformação ou energia livre de Helmholtz Ψ define a lei constitutiva do material, ou seja, relaciona a deformação adotada com sua respectiva tensão conjugada. Portanto, a equação (3.53) pode ser reescrita como

$$\delta\Pi_{def} = \int_{\Omega^0} \delta\Psi dV^0 = \int_{\Omega^0} \mathbf{P}^T : \delta\mathbf{F} dV^0 = \int_{\Omega^0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV^0 = \int_{\Omega^0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV^0. \quad (3.54)$$

Assim, considerando a arbitrariedade do volume, a partir das expressões (3.54) é possível obter as medidas de tensão \mathbf{P} e \mathbf{S} , respectivamente, como

$$\mathbf{P} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{F}^T}, \quad e \quad \mathbf{S} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}}. \quad (3.55)$$

Os modelos constitutivos que, além de serem elásticos, tem sua expressão derivada de Ψ em função apenas das deformações atuais e que independe de fatores como histórico e taxa de deformação, são denominados de modelos constitutivos hiperelásticos.

3.2.7 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

De acordo com Coda (2018), o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é o modelo constitutivo mais simples de lei hiperelástica, pois é uma extensão lagrangiana direta da Lei de Hooke, isto é, há uma correspondência linear entre \mathbf{S} e \mathbf{E} , sendo aplicável somente em problemas de pequenas deformações. A expressão da energia de deformação do modelo Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) é dada por

$$\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E}, \quad (3.56)$$

que resulta na relação deformação dada por

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}} = \mathbf{C} : \mathbf{E}, \quad (3.57)$$

ou em notação indicial, como

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}. \quad (3.58)$$

onde \mathbf{C} é tensor constitutivo elástico de quarta ordem, que depende apenas dos parâmetros do material.

O modelo constitutivo para Saint-Venant-Kirchhoff deve ser utilizado apenas para

análise de pequenas deformações, pois, em grandes deformações o modelo deixa de atender a condição de crescimento, expressa por

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} \Psi = \lim_{J \rightarrow +\infty} \Psi = +\infty \quad (3.59)$$

Esse trabalho se restringe à pequenas deformações, portanto, o modelo SVK é satisfatório. Em análise de grandes deformações devem ser utilizadas leis hiperelásticas que atendam às condições de crescimento, como, por exemplo, modelo Neo-Hookeano, modelo de Ogden, modelo de Arruda-Boyce ou modelo Polinomial.

3.3 Método dos elementos finitos posicional

O princípio básico do MEF é substituir o contínuo por um conjunto finito de subdomínios, denominados elementos finitos. Estes elementos são constituídos de nós, aos quais são vinculadas as chamadas funções de forma e os parâmetros das variáveis de interesse (inclusive a geometria) (CODA, 2018). Uma combinação linear de equações lineares representam os campos das variáveis, sendo os coeficientes das equações os respectivos parâmetros nodais. Logo, um problema contínuo é aproximado pela combinação linear de equações discretas.

A discretização de elementos permite uma variedade de formas de elementos, por exemplo, linhas, triângulos e quadriláteros (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004). Tais elementos podem ser utilizados para formar elementos unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais (CHAPRA; CANALE, 2011). Cada elemento é formado pela conexão de um certo número de nós, que varia de acordo com o nível de discretização da malha adotada.

Em tratamentos tradicionais de MEF aplicado à mecânica dos sólidos, as variáveis nodais a serem aproximadas por polinômios são os deslocamentos dos elementos finitos. Já na formulação do método dos elementos finitos posicional (MEFP), elaborada por Bonet et al. (2000) e Coda (2018), as variáveis a serem aproximadas são as posições dos nós. A abordagem descrita para MEFP apresentada nesse capítulo é baseada em Coda (2018).

Neste trabalho, é adotado o elemento finito linear unidimensional de treliça, pois é o elemento mais simples e mais facilmente manipulável, visto que, o elemento estrutural (barras simples) se confunde com o próprio elemento finito de treliça. A utilização de um elemento mais simples se justifica pelo fato de permitir que esforços maiores sejam dedicados a implementações complementares ao MEFP, que serão apresentados nos próximos capítulos, visto que a formulação do MEFP para elementos mais complexos está validada por vários outros trabalhos (CODA, 2003; CODA; PACCOLA, 2007; CODA; PACCOLA, 2014; MACIEL, 2008; SANCHES R. A. K.; CODA, 3401-3418; PASCON, 2012; PASCON; CODA, 2017; RIGOBELLO, 2011; KZAM, 2016; WUTZOW, 2008).

As funções utilizadas para aproximar as variáveis dos elementos são chamadas de funções de forma, as quais são, geralmente, polinômios, pois são fáceis de manipular matematicamente. O grau do polinômio dependerá da quantidade de nós do elemento finito escolhido. Para o MEF é usual utilizar polinômios de Lagrange, pois os valores das constantes do polinômio serão os valores da função aproximada nos pontos base da aproximação. Os coeficientes do polinômio são denominadas funções interpoladoras.

Para o caso unidimensional, a alternativa mais simples é o polinômio do primeiro grau ou uma reta,

$$u(x) = a_0 + a_1x, \quad (3.60)$$

onde $u(x)$ é a variável dependente, x é a variável independente e a_0 e a_1 são constantes. A função linear deve passar pelos valores de $u(x)$ nas extremidades do elemento em x_1 e x_2 . Dessa forma,

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1x_1, \\ u_2 &= a_0 + a_1x_2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Resolvendo essas equações pode utilizando a regra de Cramer, são obtidos os coeficientes a_0 e a_1 , como

$$a_0 = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1}, \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.62)$$

Substituindo esses resultados na equação (3.60), e agrupando os termos, é obtida a seguinte expressão para função de forma

$$u = N_1u_1 + N_2u_2, \quad (3.63)$$

onde N_1 e N_2 são as funções interpoladoras, iguais a

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad e \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.64)$$

A Figura 3.7 mostra a função de forma juntamente com as funções interpoladoras correspondentes. É possível observar que a soma das funções interpoladoras é igual a 1.

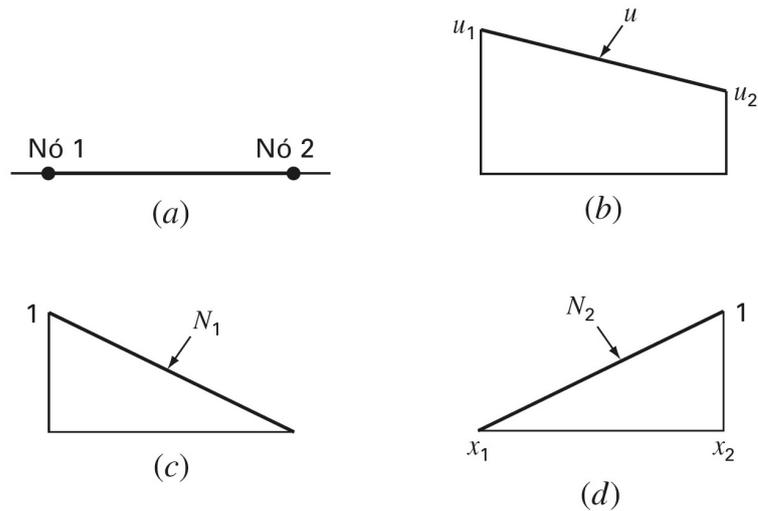


Figura 3.7: Função de forma (b) para um elemento linear (a). Funções interpoladoras correspondentes (c) e (d)

Fonte: [Lewis, Nithiarasu e Seetharamu \(2004\)](#)

No método dos elementos finitos chamados de isoparamétricos, as funções de forma são utilizadas no MEF para fazer a transformação dos elementos finitos no espaço adimensional para os elementos de formas geométricas complexas da engenharia. Isso é feito por que elementos adimensionais são simples, regulares na geometria e fáceis de calcular. A transformação é realizada pela correspondência um para um entre as coordenadas locais adimensionais ξ e os pontos nodais do elemento. Tal correspondência é feita pelas funções de forma.

Para elementos finitos unidimensionais de grau um, as funções interpoladoras, denominadas ϕ_1 e ϕ_2 , são descritas em função de uma coordenada adimensional ξ , definida no intervalo $[-1,1]$. O nó 1 corresponde a $\xi = -1$ e o nó 2 a $\xi = 1$, cada um assumindo valor unitário em seu nó correspondente e valor nulo no outro nó. Dessa forma, as funções interpoladoras são expressas por

$$\phi_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad e \quad \phi_2 = \frac{\xi + 1}{2}. \quad (3.65)$$

Retomando a equação (3.1), a função que faz o mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial e função de mapeamento do espaço adimensional para configuração atual, são escritas, respectivamente, como

$$\zeta^0 = \phi_\beta(\xi)x^\beta \quad (3.66)$$

$$\zeta^1 = \phi_\beta(\xi)y^\beta \quad (3.67)$$

onde $\zeta^0(\xi)$ é função de mapeamento da configuração inicial do elemento, que faz a transformação do elemento no espaço de referência para a configuração indeformada e

$\zeta^1(\xi)$ é função de mapeamento da configuração atual do elemento, que faz a transformação do elemento no espaço de referência para a configuração deformada. x^β denota a posição dos nós do elemento em relação ao eixo local x da barra na configuração inicial, e y^β representa a posição dos nós do elemento em relação ao eixo local y da barra configuração atual, como pode ser visto na Figura 3.8. O índice β indica o nó do elemento (ou a função interpoladora associada).

Expandindo as equações (3.66) e (3.67), são obtidas as expressões

$$\begin{aligned}\zeta^0(\xi) &= \phi_1 x^1 + \phi_2 x^2; \\ \zeta^1(\xi) &= \phi_1 y^1 + \phi_2 y^2.\end{aligned}\tag{3.68}$$

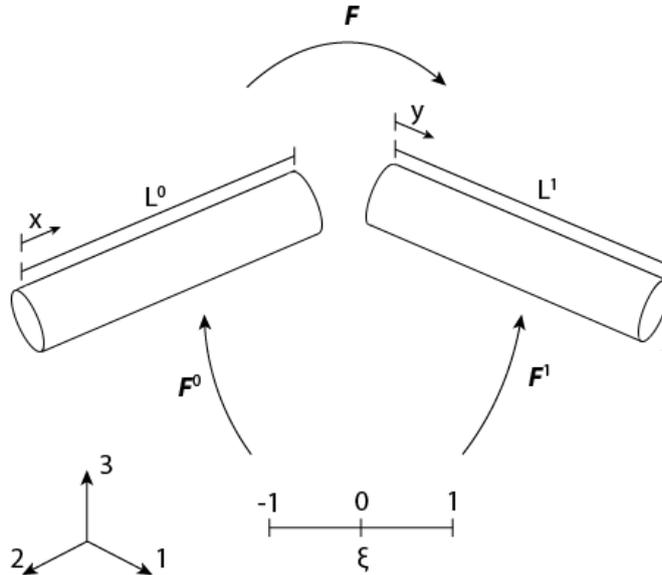


Figura 3.8: Mapeamento das configurações iniciais e finais de uma barra reta.

Fonte: Autor.

Conforme a Figura 3.8, sendo L^0 o comprimento da barra na configuração inicial e L^1 o comprimento da barra deformada, as posições x^β e y^β assumem os seguintes valores em relação aos eixos locais da barra

$$\begin{aligned}x^0 &= 0, & y^0 &= 0, \\ x^1 &= L^0, & y^1 &= L^1.\end{aligned}\tag{3.69}$$

Como apresentado no item 3.1.2, a determinação da deformação de Green \mathbf{E} e, conseqüentemente, da energia específica de deformação Ψ , gerada na mudança de configuração, dependem da determinação do gradiente da função mudança de configuração, dado por

$$\mathbf{F} = \nabla(\zeta^1 \circ (\zeta^0)^{-1}) = \mathbf{F}^1(\mathbf{F}^0)^{-1}\tag{3.70}$$

onde $(f^0)^{-1}$ é a inversa do mapeamento do espaço adimensional para configuração inicial, como mostra a Figura 3.8. O tensor \mathbf{F}^0 é o gradiente do mapeamento da configuração inicial e \mathbf{F}^1 é o gradiente do mapeamento da configuração atual, os quais são calculados por

$$F_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_\beta}{\partial \xi_j} x_i^\beta \quad (3.71)$$

$$F_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_\beta}{\partial \xi_j} y_i^\beta \quad (3.72)$$

\mathbf{F}^0 e \mathbf{F}^1 são tensores de segunda ordem que possuem a dimensão do espaço que representam, 3x3 para 3D, 2x2 para 2D, e para problemas unidimensionais o gradiente mudança de configuração é um escalar. Derivando as equações (3.68) em relação ao adimensional, resulta em

$$\begin{aligned} F_{11}^0 &= \frac{x^2 - x^1}{2} = L^0; \\ F_{11}^1 &= \frac{y^2 - y^1}{2} = L^1. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Utilizando a relação (3.69) e aplicando (3.73) em (3.70), resulta que o gradiente da função mudança configuração para um elemento de barra simples é igual a grandeza definida como alongamento, a qual expressa a relação entre o comprimento atual e comprimento inicial da barra

$$F_{11} = F_{11}^1 (F^0)_{11}^{-1} = \frac{L^1}{L^0}. \quad (3.74)$$

As coordenadas x^β e y^β representam as posições no sistema de coordenadas unidimensionais da barra, na configuração inicial e atual, respectivamente. No entanto, todo o tratamento na formulação deve ser feito em relação ao sistema de coordenadas tridimensionais, onde as posições iniciais e atuais são representadas por x_i^β e y_i^β , sendo β a denotação do nó local (1 ou 2) e i é direção (1, 2 ou 3).

Os comprimentos iniciais e finais da barra podem ser escritos em função das posições locais tridimensionais da seguinte forma

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}; \\ l &= \sqrt{(y_1^2 - y_1^1)^2 + (y_2^2 - y_2^1)^2 + (y_3^2 - y_3^1)^2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Retomando a equação (3.22) e substituindo o gradiente obtido na equação (3.74), resulta que a deformação de Green-Lagrange para uma barra reta é dada por

$$E_{11} = \frac{1}{2} (F_{11}^T \cdot F_{11} - I_{11}) = \frac{1}{2} \left(\frac{(L^1)^2}{(L^0)^2} - 1 \right), \quad (3.76)$$

ou como

$$E = \frac{(L^1)^2 - (L^0)^2}{2(L^0)^2}. \quad (3.77)$$

Segundo o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, a segunda tensão Piola-Kirchhoff, conjugada energética da deformação de Green-Lagrange, é determinada pela equação (3.58), que para um elemento de barra reta, fica escrita como

$$S_{jk} = C_{jklm} E_{lm} = C_{1111} E_{11} = K E_{11}. \quad (3.78)$$

onde K é o módulo de elasticidade elástico do material.

A energia de deformação ou energia livre Helmholtz é a energia potencial com valor igual ao trabalho (por unidade de volume) realizado pela tensão ao gerar deformação no contínuo com sinal oposto. Dessa forma, pela equação (3.55), a energia específica que será utilizada no cálculo da energia de deformação de uma barra reta, é determinada por

$$\Psi = u_e = \int_0^E S dE = \frac{K E_{11}^2}{2}. \quad (3.79)$$

3.4 Equilíbrio

Aplicando o princípio da energia mecânica estacionária (3.41) no MEF posicional estático para elementos de treliça, é obtida a equação de equilíbrio, que deve ser atendida para cada grau de liberdade de cada nó da estrutura, sendo expresso por

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i^\alpha} = \frac{\partial \Pi^{def}}{\partial y_i^\alpha} + \frac{\partial \Pi^{ext}}{\partial y_i^\alpha} = 0 \quad (3.80)$$

onde a parcela referente a variação da energia de deformação na direção i do nó α é denominada de força interna $f_i^{\alpha(int)}$, assim como, a parcela correspondente a variação da energia potencial das forças externas na direção i do nó α é denominada, simplesmente, de força externa $f_i^{\alpha(ext)}$, ou seja,

$$\begin{aligned} f_i^{\alpha(int)} &= \frac{\partial \Pi^{def}}{\partial y_i^\alpha}; \\ f_i^{\alpha(ext)} &= \frac{\partial \Pi^{ext}}{\partial y_i^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

3.4.1 Forças Internas

Substituindo a equação (3.79) na equação (3.54), utilizando a referência nó-direção, é possível determinar o valor da força interna do sistema como

$$f_k^{\alpha(int)} = \frac{\partial \Pi^{def}}{\partial y_k^\alpha} = \sum_{q=1}^{nel} \frac{\partial \Pi^q(def)}{y_k^\alpha}; \quad (3.82)$$

onde o índice α representa a nó da estrutura que varia de 1 ao número de nós totais (n_{nos});

o índice k denota a direção (1, 2 ou 3 para análise 3D) e onde q indica o elemento na estrutura, que varia de 1 ao número de elementos totais (nel). A equação (3.82) pode ser escrita, também, em relação à graus de liberdade como

$$f_i^{(int)} = \frac{\partial \Pi^{def}}{\partial y_i} = \sum_{q=1}^{nel} \frac{\partial \Pi^q(def)}{y_i}; \quad (3.83)$$

onde grau de liberdade do sistema i varia de $i = 1$ a $i = d(nnos)$. Visto isso, é possível organizar uma correspondência entre os graus de liberdade dos problema de treliça na forma de um vetor y_i , ao invés da forma de matriz ou (ou tensor) y_k^α , pela seguinte correspondência

$$i = d(\alpha - 1) + k \quad (3.84)$$

Retornando a determinação da força interna, como é possível observar nas equações (3.82) e (3.83), a energia de deformação de toda a estrutura é dada pela soma das energias de deformação local de todos os elementos finitos.

Desenvolvendo a integral para o elemento q na equação (3.54) e aplicando a regra da cadeia na derivada da energia potencial de deformação do elemento q , é obtido a seguinte expressão

$$\frac{\partial \Pi^q(def)}{\partial y_k^\alpha} = \int_{\Omega^0} \frac{\partial \Psi^q}{\partial y_k^\alpha} dV^0 = A^{0(q)} L^{0(q)} \frac{\Psi^q(E)}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial y_k^\alpha} = A^{0(q)} L^{0(q)} S \frac{E}{\partial y_k^\alpha} \quad (3.85)$$

onde S é a tensão de Piola-Kirchhoff uniaxial do elemento, A^0 e L^0 são a área e o comprimento iniciais do elemento, respectivamente. Neste trabalho, não há deformação transversal no elemento, portanto, a área é constante entre a configuração inicial e atual.

Das equações (3.75) e (3.77), a deformação de Green no sentido longitudinal do elemento é escrito como

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{(L^1)^2}{(L^0)^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(y_1^2 - y_1^1)^2 - (y_2^2 - y_2^1)^2 - (y_3^2 - y_3^1)^2}{(L^0)^2} - 1 \right) \quad (3.86)$$

e, portanto, desenvolvendo a derivada de E em relação a cada grau de liberdade do elemento q , são obtidas as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y_1^1} &= -\frac{y_1^2 - y_1^1}{L^2}, & \frac{\partial E}{\partial y_2^1} &= -\frac{y_2^2 - y_2^1}{L^2}, & \frac{\partial E}{\partial y_3^1} &= -\frac{y_3^2 - y_3^1}{L^2}, \\ \frac{\partial E}{\partial y_1^2} &= +\frac{y_1^2 - y_1^1}{L^2}, & \frac{\partial E}{\partial y_2^2} &= +\frac{y_2^2 - y_2^1}{L^2}, & \frac{\partial E}{\partial y_3^2} &= +\frac{y_3^2 - y_3^1}{L^2}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

ou, de forma indicial

$$\frac{\partial E}{y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{(L^0)^2} (y_k^2 - y_k^1) \quad (3.88)$$

Dessa forma, a equação da força interna na numeração local para um elemento

finito de barra simples q , fica expressa por

$$\left(f_k^{\beta(int)}\right)^q = A^{0(q)} S \frac{(-1)^\beta}{L^0} (y_k^2 - y_k^1) \quad (3.89)$$

Para o caso tridimensional, para cada elemento existem seis graus de liberdade e, portanto, existem seis componentes de forças internas, três para cada nó. O vetor que armazenas as forças internas locais em graus de liberdade, pode ser organizado com a seguinte correspondência entre graus de liberdade e os índices nó-direção:

$$f_m = f_k^\beta \quad com \quad m = d(\beta - 1) + k \quad (3.90)$$

onde d é a dimensão do problema.

Após calcular o vetor f^{int} para cada elemento, cada componente local deve ser somado de forma cumulativa à sua respectiva componente no vetor de forças internas globais escrito em graus de liberdade, do seguinte modo

$$\left(f_i^{int}\right)^{global} = \left(f_i^{int}\right)^{global} + \left(f_k^{\beta(int)}\right)^{q(local)} \quad com \quad i = d(inc(q, \beta) - 1) + k \quad (3.91)$$

onde $inc(q, \beta)$ é a correspondência entre o nó local β (1 ou 2) do elemento q e o nó global α ($\alpha = 1, 2, \dots, nnos$).

3.4.2 Forças Externas

No caso de elementos finitos de treliças, no qual as cargas são consideradas apenas como forças concentradas nos nós da estrutura, a equação (3.52) se reduz a apenas aos potenciais das forças concentradas aplicadas, consideradas conservativas. Dessa forma, a equação (3.52) é expressa por

$$\frac{\partial \Pi^{ext}}{\partial y_k^\alpha} = \frac{\partial (-f_l^\eta y_l^\eta)}{\partial y_k^\alpha} = -f_l^\eta \frac{\partial y_k^\alpha}{\partial y_k^\alpha} = -f_l^\eta \delta_{\eta\alpha} \delta_{lk} = -f_k^\alpha \quad (3.92)$$

onde os índices η e α representam nós globais (1, 2, ..., nnos) e os índices l e k denotam direções (1, 2 ou 3). Na equação (3.92), o símbolo δ é o Delta de Kronecker, que assume o valor 0 para índices diferentes e o valor 1 para índices iguais. Essa operação algébrica implica que a derivada da posição de um nó em relação a posição de outro nó só existe para nós coincidentes, isto é, quando $\eta = \alpha$. O mesmo vale para as direções, a derivada só existe para direções coincidentes, isto é, quando $k = l$.

Ao invés de escrever a equação (3.92) em relação ao nós e direção, é possível escrever para graus de liberdade, como

$$\frac{\partial \Pi^{ext}}{\partial y_i} = \frac{\partial (-f_j y_j)}{\partial y_i} = -f_j \frac{\partial y_j}{\partial y_i} = -f_j \delta_{ji} = -f_i \quad (3.93)$$

Em vista das equações (3.91) e (3.93), a equação de equilíbrio (3.80) para cada grau de liberdade é rescrita como

$$f_i^{int}(y_i) - f_i^{ext} = 0 \quad \text{ou} \quad f_k^{\alpha(int)}(y_k^\alpha) - f_k^{\alpha(ext)} = 0 \quad (3.94)$$

onde o vetor dos graus de liberdade (posições) da estrutura y_i é a incógnita do problema. Portanto, deverá ser resolvido um número de equações igual ao número de graus de liberdade da estrutura, dado por $n = d(nnos)$. As componentes das forças internas determinadas na equação (3.89) e montadas na equação (3.91) são funções não lineares das posições y_i , e como tal, necessitam de uma estratégia de solução não linear.

Nesse trabalho, será utilizado o método numérico de Newton-Raphson associado a incrementos de comprimento de arco. As etapas de solução serão apresentadas no próximo capítulo. Antecipando uma etapa do método de Newton-Raphson, é necessário calcular a segunda derivada da energia potência total em relação as posições nodais, denominada de matriz Hessiana.

3.4.3 Matriz Hessiana

Considerando que as forças externa nodais são conservativas, ou seja, não se alteram com a mudança das posições, a segunda variação da energia potencial total será igual a segunda variação da energia de deformação, resultando na seguinte expressão em graus de liberdade

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \Pi^{def}}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (3.95)$$

Assim como realizado para força interna, a matriz Hessiana local é desenvolvida para cada elemento, empregando notação nó-direção e, em seguida, é montada cumulativamente a matriz Hessiana global, utilizando notação de graus de liberdade, para toda estrutura. Dessa forma, a matriz Hessiana local para o elemento q é determinada por

$$(H_{lk}^{\gamma\beta}) = \frac{\partial^2 \Pi^q(def)}{\partial y_l^\gamma \partial y_k^\beta} \quad \text{ou} \quad (H_{lk}^{\gamma\beta}) = \frac{\partial}{\partial y_l^\gamma} \left(\frac{\partial \Pi^q(def)}{\partial y_k^\beta} \right), \quad (3.96)$$

onde γ e β denotam os nós locais e l e k são as direções. Aproveitando a equação (3.85), tem que

$$(H_{lk}^{\gamma\beta}) = A^q L^0 \frac{\partial}{\partial y_l^\gamma} \left(\frac{\Psi^q(E)}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial y_k^\beta} \right), \quad (3.97)$$

desenvolvendo a derivada do produto

$$(H_{lk}^{\gamma\beta})^q = A^q L^0 \left(\frac{\partial^2 \Psi^q(E)}{\partial y_l^\gamma \partial E} \frac{\partial E}{\partial y_k^\beta} + \frac{\partial \Psi^q(E)}{\partial E} \frac{\partial^2 E}{\partial y_l^\gamma \partial y_k^\beta} \right). \quad (3.98)$$

Aplicando regra da cadeia no primeiro termo entre parênteses em (3.98), resulta

em

$$(H_{lk}^{\gamma\beta})^q = A^q L^0 \left(\frac{\partial^2 \Psi^q(E)}{\partial E^2} \frac{\partial E}{\partial y_l^\gamma} \frac{\partial E}{\partial y_k^\beta} + \frac{\partial \Psi^q(E)}{\partial E} \frac{\partial^2 E}{\partial y_l^\gamma \partial y_k^\beta} \right). \quad (3.99)$$

A derivada segunda da equação (3.79) em relação a E é igual ao primeiro termo entre parêntesis da equação (3.99) e a primeira parte do segundo termo entre parêntesis pode ser substituído pela expressão (3.55). Portanto, a expressão para matriz Hessiana pode ser escrita como

$$(H_{lk}^{\gamma\beta})^q = A^q L^0 \left(K \frac{\partial E}{\partial y_l^\gamma} \frac{\partial E}{\partial y_k^\beta} + S \frac{\partial^2 E}{\partial y_l^\gamma \partial y_k^\beta} \right), \quad (3.100)$$

onde S é a tensão de Piola-Kirchhoff uniaxial, determinada conforme (3.78), e K é o módulo de elasticidade do material.

A segunda derivada da deformação de Green em relação às posições é obtida derivando uma vez a equação (3.88), resultando em

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y_l^\gamma \partial y_k^\beta} = \frac{\partial}{\partial y_l^\gamma} \frac{\partial E}{\partial y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{(L^0)^2} \frac{\partial (y_k^2 - y_k^1)}{\partial y_l^\gamma} = \frac{(-1)^\beta (-1)^\gamma}{(L^0)^2} \delta_{lk}, \quad (3.101)$$

onde γ e β são os nós do elemento (1 ou 2) e, l e k são as direções (1, 2 ou 3).

A expressão da matriz Hessiana para o elemento q é obtida substituindo (3.88) e (3.101) na equação (3.100), resultando na expressão

$$(H_{lk}^{\gamma\beta})^q = (-1)^\beta (-1)^\gamma \frac{A^q}{L^0} \left(K \frac{(y_l^2 - y_l^1)}{L^0} \frac{(y_k^2 - y_k^1)}{L^0} + S \delta_{lk} \right). \quad (3.102)$$

Calculada a matriz Hessiana para cada elemento em termos de nó-direção, deve ser montada a matriz Hessiana global em termos de graus de liberdade. A matriz Hessiana global se relaciona com a matriz Hessiana local por acumulação como

$$H_{ij}^{global} = H_{ij}^{global} + (H_{lk}^{\gamma\beta})^{q(local)} \quad \text{com } i = d(inc(q, \gamma) - 1) + l \quad e \quad j = d(inc(q, \beta) - 1) + k \quad (3.103)$$

onde $inc(q, \gamma)$ e $inc(q, \beta)$ representa a correspondência entre os nós locais do elemento q e os nós globais da estrutura.

Capítulo 4

Método de solução numérica

A solução de problemas não lineares depende fortemente de métodos numéricos para solução do sistema de equações de equilíbrio. Apenas alguns problemas não lineares permitem a solução direta e, na maioria das vezes, uma estratégia iterativa deve ser usada. De acordo com [Bathe \(2014\)](#), o método de Newton-Raphson (NR) é uma técnica amplamente utilizada em análises numéricas não lineares. Esse método consiste em determinar as raízes de equações ou sistemas de equações não lineares através de um processo iterativo baseado em etapas de previsão linear e correção não linear, seguidos de um teste de convergência. O processo iterativo tem como finalidade aproximar a solução tentativa à solução real respeitando uma tolerância pré-fixada ([CHAPRA; CANALE, 2011](#)).

De acordo com [Borst et al. \(2012\)](#), iterações por NR em carregamentos grandes, dificilmente obtêm uma solução adequadamente convergida, devido a limitação no raio de convergência do processo iterativo. De acordo com o mesmo autor, experiências mostram que a maioria dos materiais exibe um comportamento dependente do caminho de equilíbrio. Isso significa que valores diferentes para a tensão são obtidos dependendo do caminho de deformação que é seguido. Evidentemente, o comportamento estrutural só pode ser previsto corretamente se os incrementos da tensão forem relativamente pequenos, de modo que o caminho da tensão seja seguido o mais próximo possível.

Por essa razão, o método iterativo de Newton-Raphson é associado a etapas incrementais de força ou de posição, ilustradas nas Figuras [4.1](#) (a) e (b), respectivamente. Nessa associação, pequenas parcelas de forças ou variações impostas na posição são aplicados sequencialmente e, a cada incremento é realizado o processo iterativo até obtenção do equilíbrio.

O processo iterativo com incrementos de carga tem como objetivo principal encontrar no diagrama carga-posição a intersecção entre a linha horizontal, que caracteriza o nível de carga imposto, e o caminho de equilíbrio, como mostrado na Figura [4.1](#) (a). Porém, nesse fato consiste o problema básico deste método, pois há situações que o ponto de

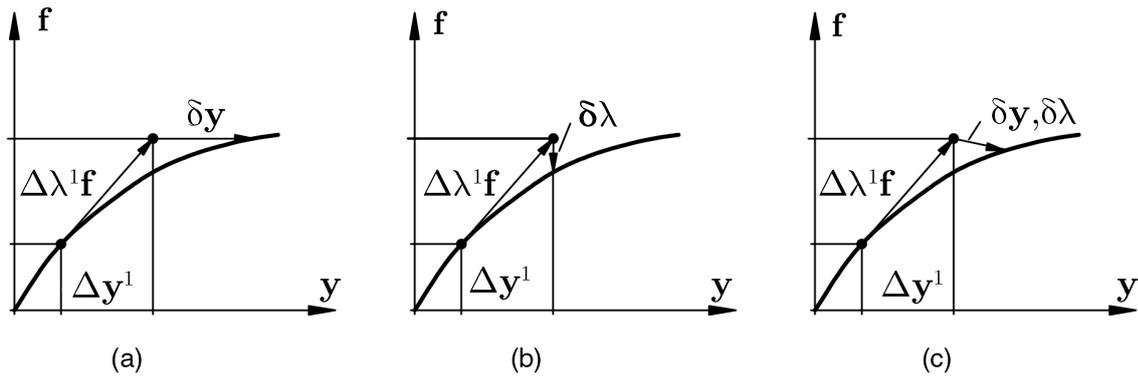


Figura 4.1: (a) NR por incremento de carga, (b) NR com incremento de deslocamento e (c) método do comprimento de arco.

Fonte: Adaptado de [Krenk \(2009\)](#)

intersecção não existe, como ocorre no ponto limite **A** da Figura 4.2. Neste caso, o método não converge e o processo precisa ser interrompido.

O controle de deslocamento não compartilha essa desvantagem, pois nele, durante a fase de iterações, a intenção é obter no diagrama carga-posição o ponto de intersecção da curva de equilíbrio com a linha vertical da Figura 4.1 (b). Porém, alguns comportamentos estruturais ainda não são rastreáveis por este método, como por exemplo o chamado comportamento de snap-back, ilustrado no ponto **B** da Figura 4.2.

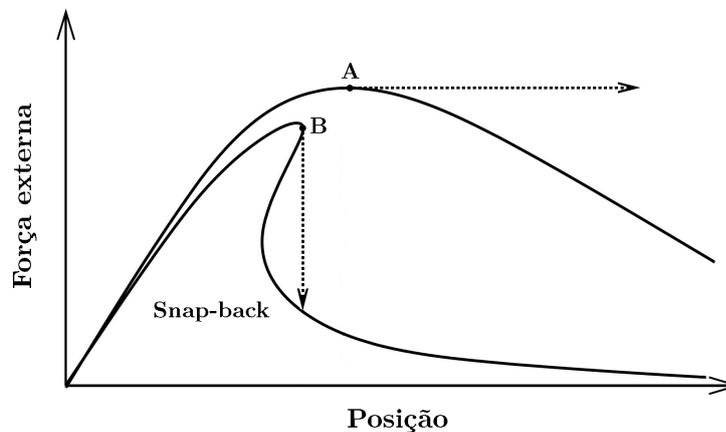


Figura 4.2: Pontos limites de carga e deslocamento, e efeito snap-back.

Fonte: Adaptado de [Borst et al. \(2012\)](#).

Uma das principais alternativas para contornar estes problemas, é o método denominado de controle por comprimento de arco, no qual, durante a fase iterativa os sub-incrementos são dados simultaneamente em posição e carga, indicado na Figura 4.1 (c). Os sub-incrementos são limitados por uma linha inclinada ou curva, que tem a função de direcionar as correções de posição e carga para o caminho de equilíbrio da estrutura, sendo assim, possível transpor todos os pontos limites.

4.1 Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um método numérico iterativo, utilizado para resolver equações não lineares. Ao ser utilizado na equação de equilíbrio (3.94), a posição dos nós será a incógnita do problema e, a cada iteração será melhorada para que seja satisfeito o equilíbrio com determinado grau de exatidão. Portanto, a cada iteração é analisado o equilíbrio dentro de determinada precisão e se não for obtido, as posições dos nós são ajustadas. O primeiro passo é definir a diferença entre a carga externa f_i^{ext} e a força interna f_i^{int} como o vetor de força residual ou desbalanceamento g_i , expressa como

$$g_i(y_i) = f_i^{int}(y_i) - f_i^{ext} = 0 \quad (4.1)$$

ou seja, quando o sistema atinge o estado de equilíbrio, a força interna é igual a força externa, e, portanto, o resíduo desaparece. O índice i denota graus de liberdade do problema.

Ao ser atribuída uma posição tentativa inicial, a equação 4.1 retorna um valor não nulo para $g_i(y_i^t)$, o que indica ausência de equilíbrio. Geralmente, é utilizado como estimativa de posição y_i^t no início do processo as posições iniciais x_i . Uma estimativa melhorada das posições y_i é obtida a partir de uma forma linearizada do residual $g_i(y_i^t + \delta y_i)$ em torno do residual conhecido $g_i(y_i^t)$, expressa por

$$g_i(y_i^t + \delta y_i) = g_i(y_i^t) + \frac{\partial g_i(y_i^t)}{\partial y_j} \delta y_j^t + O_i^2 = 0. \quad (4.2)$$

Desprezando os termos de ordem superior O_i^2 e rearranjando os termos, a segunda igualdade da equação (4.3) pode ser reescrita como

$$\tilde{g}_i(y_i^t) = -\frac{\partial f_i^{int}(y_i^t)}{\partial y_j} \delta y_j = -H_{ji} \delta y_j^t, \quad (4.3)$$

onde H_{ij} é a matriz Hessiana do problema para a posição tentativa, introduzida na equação (3.95).

Na equação (4.3), o residual $g_i(y_i^t)$ é conhecido, pois é função da posição y_i^t conhecida. Da mesma forma, a matriz Hessiana também pode ser calculada. Portanto, essa equação permite determinar a correção na posição δy_j ,

$$\delta y_j^t = -(H_{ji})^{-1} g_i(y_j^t). \quad (4.4)$$

Uma vez determinado o incremento de posição δy_i , as posições do sistema são atualizadas

$$y_j^{t+1} = y_j^t + \delta y_j, \quad (4.5)$$

onde o sobrescrito t indica a iteração atual e $t + 1$ indica a posição tentativa melhorada que será utilizada na próxima iteração. Com o novo valor de tentativa, é calculado o novo valor do resíduo com a equação (4.1) e um novo valor correção na posição com a equação (4.4). Esse processo se repete até que δy_j^t ou g_j sejam suficientemente pequenos. Para isso são utilizados os critérios de parada, expressos como

$$\frac{|\delta y_j^t|}{|y_j^t|} \leq tol, \quad e \quad |g_i(y_i^t)| \leq tol \quad (4.6)$$

onde o operador $|\bullet|$ denota norma euclidiana do vetor em seu interior.

O processo de iteração de Newton-Raphson está ilustrado na Figura 4.3 e o procedimento esta resumido no Algoritmo 1 em notação vetorial, onde o índice sobrescrito t denota o número da iteração.

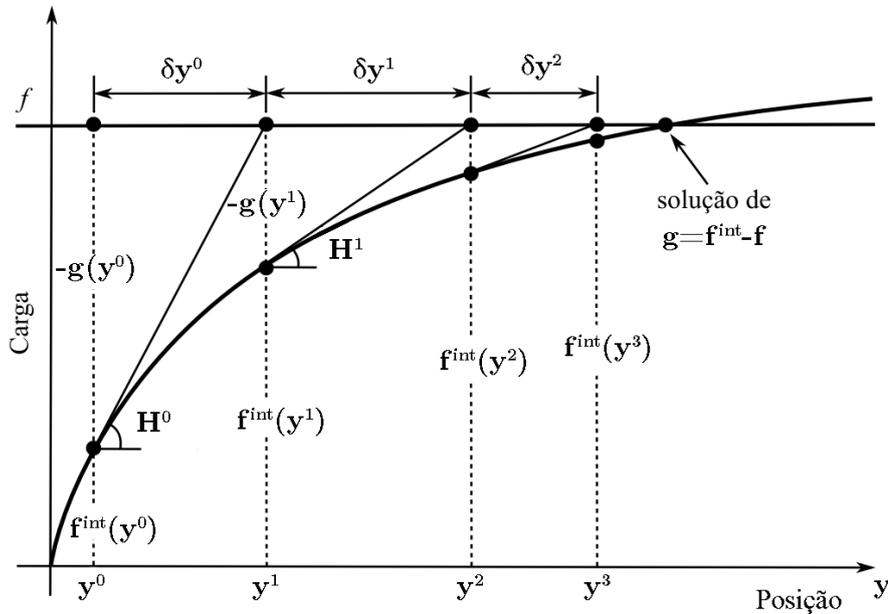


Figura 4.3: Iteração de equilíbrio utilizando método de Newton-Raphson.

Fonte: Adaptado de Lacerda (2014)

Algoritmo 1: Método de Newton-Raphson

```

1 for  $t = 1$  to  $t_{max}$  do
     $\mathbf{H} = \partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{t-1}) / \partial \mathbf{y}$ ;
     $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{t-1}) - \mathbf{f}^{ext}$ ;
     $\delta \mathbf{y}^t = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}$ ;
     $\mathbf{y}^t = \mathbf{y}^{t-1} + \delta \mathbf{y}^t$ ;
    if  $\|\mathbf{g}\| \leq tol$  then break;
2 return  $\mathbf{y}^t$ ;

```

4.1.1 Newton-Raphson Modificado

No método original de Newton-Raphson, a cada iteração é calculada e fatorada a matriz hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{y})$. Para problemas não-lineares com muitos graus de liberdade, calcular a matriz hessiana e resolver as equações correspondentes para $\delta\mathbf{y}$ a cada iteração pode ser muito custoso computacionalmente. No algoritmo 1, a matriz hessiana aparece dentro do loop de iterações. Uma modificação simples no método de Newton-Raphson seria mover para fora do loop o cálculo da matriz \mathbf{H} . Dessa forma, a matriz hessiana será calculada apenas uma vez para cada processo iterativo, como pode ser visto no algoritmo 2.

No método Newton-Raphson modificado, a convergência assintótica é mais lenta que a do método Newton-Raphson, e isso pode compensar parte de sua eficiência computacional.

Algoritmo 2: Método de Newton-Raphson modificado

```

 $\mathbf{H} = \partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^0) / \partial \mathbf{y};$ 
for  $t = 1$  to  $t_{max}$  do
     $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{t-1}) - \mathbf{f}^{ext};$ 
     $\delta\mathbf{y}^t = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g};$ 
     $\mathbf{y}^t = \mathbf{y}^{t-1} + \delta\mathbf{y}^t;$ 
    if  $\|\mathbf{g}\| \leq tol$  then break;
end
return  $\mathbf{y}^t;$ 

```

4.2 Incrementos por força

O procedimento de incrementos por força consiste em encontrar uma sequência de estados de equilíbrio de um sistema não linear com forças internas $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{y})$, ao considerar uma série de carregamentos $\Delta\lambda\mathbf{f}$ constantes, onde λ é um fator de carga escalar que determina o valor da força, enquanto \mathbf{f} é o vetor que dá o 'formato' da carga.

A etapa de incremento de carregamento inicia a partir do último estado de equilíbrio obtido $(\mathbf{y}^{n-1}, \mathbf{f}^{n-1})$. O passo de carga começa com a imposição de um carregamento adicional $\Delta\lambda\mathbf{f}^n$, onde o sobrescrito n se refere ao número da etapa de incremento. O incremento de deslocamento correspondente $\Delta\mathbf{y}^F$ é encontrado a partir de uma forma linearizada da equação de equilíbrio (4.1), como

$$\Delta\mathbf{y}^1 = (\mathbf{H})^{-1}\Delta\lambda^1\mathbf{f} \quad (4.7)$$

Em problemas não-lineares, os incrementos $(\Delta\mathbf{y}^1, \Delta\lambda^1)$ determinados não conduzirão a solução de equilíbrio em uma primeira tentativa e, portanto, iterações de correção serão necessárias para minimizar o vetor resíduo \mathbf{g} , correspondente aos incrementos pre-

ditos. Após t iterações, o incremento de deslocamento é $\Delta \mathbf{y}^t$, e o vetor residual é dado por

$$\mathbf{g}^t = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{n-1} + \Delta \mathbf{y}^t) - (\lambda^{n-1} + \Delta \lambda^t) \mathbf{f}. \quad (4.8)$$

Uma característica fundamental dos procedimentos numéricos para determinar o caminho de equilíbrio, é que o incremento de carga $\Delta \lambda$ possa ser modificado pelo código durante a etapa de iteração. Dessa forma, durante um ciclo de iteração ocorrerá um sub-incremento de carga $\delta \lambda$ e, também, um sub-incremento de deslocamento $\delta \mathbf{y}$. Após t iterações, os incrementos totais são obtidos pela adição dos os sub-incrementos, da seguinte forma

$$\Delta \mathbf{y}^t = \Delta \mathbf{y}^{t-1} + \delta \mathbf{y}^t, \quad \Delta \lambda^t = \Delta \lambda^{t-1} + \delta \lambda^t. \quad (4.9)$$

No método de NR com incremento de força, o incremento $\Delta \lambda$ prescrito é constante e o deslocamento é atualizado através dos sub-incrementos $\delta \mathbf{y}$ encontrados a partir da força residual. Consequentemente, o sub-incremento de carga é nulo, $\delta \lambda^t = 0$.

No algoritmo 3 é mostrado o procedimento para implementação de método de Newton-Raphson associado ao método de incremento de forças em notação vetorial, onde o índice sobrescrito n denota o número da etapa de incremento e t de nota o número da iteração.

Algoritmo 3: Método de Newton-Raphson modificado com incremento de força

```

 $\lambda^0 = \Delta \lambda;$ 
for  $n = 1$  to  $n_{max}$  do
     $\mathbf{H}^n = \partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{n-1}) / \partial \mathbf{y};$ 
     $\Delta \mathbf{y}^1 = (\mathbf{H}^n)^{-1} \Delta \lambda \mathbf{f};$ 
     $\Delta \mathbf{y}^n = \Delta \mathbf{y}^1$ 
     $\mathbf{g}^n = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{n-1} + \Delta \mathbf{y}^1) - (\lambda^{n-1}) \mathbf{f}^n;$ 
    for  $t = 1$  to  $t_{max}$  do
         $\delta \mathbf{y}^t = -(\mathbf{H}^n)^{-1} \mathbf{g}^n;$ 
         $\Delta \mathbf{y}^t = \Delta \mathbf{y}^{t-1} + \delta \mathbf{y}^t;$ 
         $\mathbf{g}^n = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^n + \Delta \mathbf{y}^t) - (\lambda^{n-1}) \mathbf{f}^n;$ 
        if  $\|\mathbf{g}^n\| \leq tol$  then break;
    end
     $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \Delta \lambda;$ 
     $\mathbf{y}^n = \mathbf{y}^{n-1} + \Delta \mathbf{y}^t;$ 
end

```

4.3 Controle de deslocamentos

No arranjo tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Porém, para que o algoritmo seja capaz de acompanhar todo o traçado do caminho de equilíbrio, ultrapassando possíveis pontos limites, é necessário que ocorra variação de λ a cada iteração.

Batoz e Dhatt (1979) desenvolveram uma técnica geral de solução, em que é permitida a variação do parâmetro de carga durante a iteração. A mudança das posições nodais é governada pela equação de equilíbrio, que pode ser escrita, considerando NR padrão, como

$$\mathbf{H}^{t-1}\delta\mathbf{y}^t = -\mathbf{g}(\mathbf{y}^{t-1}, \lambda^t). \quad (4.10)$$

O resíduo \mathbf{g} é função posições nodais totais \mathbf{y}^{t-1} , calculadas na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total λ^t , que agora também é incógnita. O fator λ^t pode ser escrito como

$$\lambda^t = \lambda^{t-1} + \delta\lambda^t, \quad (4.11)$$

onde $\delta\lambda^t$ é a correção do parâmetro de carga. Expandindo o termo do resíduo na equação (4.10) utilizando a equação (4.11), é obtida a expressão

$$\mathbf{H}^{t-1}\delta\mathbf{y}^t = -(\mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{t-1}) - (\lambda^{t-1} + \delta\lambda^t)\mathbf{f}). \quad (4.12)$$

Na equação (4.11), os termos $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{t-1})$ e $\lambda^{t-1}\mathbf{f}$ podem ser agrupados como o resíduo da iteração anterior, ficando escrita como

$$\mathbf{H}^{t-1}\delta\mathbf{y}^t = -\mathbf{g}^{t-1} - \delta\lambda^t\mathbf{f}. \quad (4.13)$$

Da equação (4.13), o sub-incremento de posição $\delta\mathbf{y}$ pode ser decomposto em duas parcelas, sendo expresso como

$$\delta\mathbf{y}^t = (\delta\mathbf{y}^G)^t + \delta\lambda^t(\Delta\mathbf{y}^F)^t. \quad (4.14)$$

onde

$$\delta\mathbf{y}^G = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}, \quad \Delta\mathbf{y}^F = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{f}, \quad (4.15)$$

O incremento $\delta\mathbf{y}^G$ é o sub-incremento que seria obtido pelo método de NR tradicional, de acordo com a equação (4.4). O incremento $\Delta\mathbf{y}^F$ é o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de \mathbf{f} . Caso for utilizado o método NR modificado, $(\delta\mathbf{y}^F)^t$ é igual ao vetor de incremento de posições tangencial $\Delta\mathbf{y}^1$ calculado pela equação (4.7) e $(\delta\mathbf{y}^F)^t$ não se altera durante as iterações, pois a matriz \mathbf{H} não se altera.

A única incógnita na equação (4.14) é a correção do fator de carga $\delta\lambda^t$, cuja estratégia de solução varia para os diferentes métodos de iteração, nos quais uma equação

de restrição deverá ser respeitada a cada iteração.

No método do deslocamento constante, proposto inicialmente por [Batoz e Dhett \(1979\)](#), uma componente q do vetor de posições nodais é selecionada para ser a variável de controle, ao invés do fator de carga discutido na seção 4.2. Durante o processo de iteração, a variação de posição na componente q é controlada pela seguinte expressão

$$\Delta \mathbf{y}_q^t = \Delta \mathbf{y}_q^{t-1} + \delta \mathbf{y}_q. \quad (4.16)$$

Substituindo a expressão (4.14) na equação (4.16), tem que

$$\Delta \mathbf{y}_q^t = \Delta \mathbf{y}_q^{t-1} + (\delta \mathbf{y}_q^G)^t + \delta \lambda^t (\Delta \mathbf{y}_q^F)^t, \quad (4.17)$$

de onde é obtida a expressão para a correção do parâmetro de carga $\delta \lambda$, escrita como

$$\delta \lambda^t = \frac{\Delta \mathbf{y}_q^t - \Delta \mathbf{y}_q^{t-1} - (\delta \mathbf{y}_q^G)^t}{\delta (\mathbf{y}_q^F)^t} \quad (4.18)$$

Por outro lado, [Powell e Simons \(1981b\)](#) propôs que a posição na componente q seja mantida constante durante o processo de iteração, de modo que a seguinte equação de restrição seja respeitada

$$\Delta \mathbf{y}_q^t = \Delta \mathbf{y}_q^{t-1} + \delta \mathbf{y}_q = 0 \quad (4.19)$$

Portanto, reescrevendo a equação da correção $\delta \lambda$ para equação (4.19), fica expresso que

$$\delta \lambda^t = -\frac{(\delta \mathbf{y}_q^G)^t}{\delta (\mathbf{y}_q^F)^t}. \quad (4.20)$$

Em seguida, é calculado o vetor de sub-incrementos de posição $\delta \mathbf{y}$ pela equação (4.13) e atualizados os incrementos de carga e posição pelas equações

$$\Delta \lambda^t = \Delta \lambda^{t-1} + \delta \lambda^t, \quad (4.21)$$

$$\Delta \mathbf{y}^t = \Delta \mathbf{y}^{t-1} + \delta \mathbf{y}^t, \quad (4.22)$$

Na sequência, é calculado o vetor resíduo e realizado o teste de convergência, que podem ser aqueles apresentados em (4.6) ou

$$\|\mathbf{g}^t\| \leq \text{tol} \|\lambda^n \mathbf{f}\|. \quad (4.23)$$

O processo iterativo se repete até que seja atendido o teste de convergência. Então, ao passar para o próximo incremento, é atualizado o vetor de posições \mathbf{y} e o parâmetro de carga λ , por

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \delta \lambda^t, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{y}^n = \mathbf{y}^{n-1} + \delta \mathbf{y}^t, \quad (4.25)$$

o índice n é referente a etapa de incremento e t é referente ao passo de iteração.

O incremento de posição a ser utilizado na próxima iteração pode ser determinado automaticamente, como será mostrado no tópico 4.3.1. O incremento de posição inicial para a componente q que será utilizado na etapa seguinte, pode ser determinado por

$$\Delta \mathbf{y}_j^n = \Delta \mathbf{y}_j^{n-1} (N_d/t)^{0,5}. \quad (4.26)$$

O algoritmo 4 mostra o processo incremental-iterativo com controle de deslocamento.

Algoritmo 4: Newton Raphson com incrementos de deslocamento

Input: $\mathbf{y}^0; \Delta \mathbf{y}_j^0;$
 $\lambda^0 = 0; \Delta \lambda^0 = 0;$
for $n = 1$ **to** n_{max} **do**
 $\mathbf{H}^n = \partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{n-1}) / \partial \mathbf{y};$
 $\delta \mathbf{y}^F = (\mathbf{H}^n)^{-1} \Delta \lambda^{n-1} \mathbf{f};$
 $\Delta \lambda^n = \Delta \mathbf{y}_j^{n-1} / \delta \mathbf{y}_j^F;$
 if $(\Delta \mathbf{y}^{n-1})^T \cdot \delta \mathbf{y}^F < 0$ **then** $\Delta \lambda^n = -\Delta \lambda^n;$
 $\Delta \mathbf{y}^n = \Delta \lambda^n \delta \mathbf{y}^F;$
 $\mathbf{g}^n = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^n + \Delta \mathbf{y}^n) - (\lambda^n + \Delta \lambda^n) \mathbf{f};$
 for $t = 1$ **to** t_{max} **do**
 $\delta \mathbf{y}^G = -(\mathbf{H}^n)^{-1} \mathbf{g}^{(t-1)};$
 $\delta \lambda^t = -\delta \mathbf{y}_j^G / \delta \mathbf{y}_j^F;$
 $\delta \mathbf{y}^t = \delta \mathbf{y}^G + \delta \lambda^t \delta \mathbf{y}^F;$
 $\Delta \mathbf{y}^t = \Delta \mathbf{y}^{t-1} + \delta \mathbf{y}^t;$
 $\Delta \lambda^t = \Delta \lambda^{t-1} + \delta \lambda^t$
 $\mathbf{g}^t = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^n + \Delta \mathbf{y}^t) - (\lambda^n + \Delta \lambda^t) \mathbf{f};$
 if $\|\mathbf{g}^t\| \leq tol \|\lambda^n \mathbf{f}\|$ **then break;**
 end
 $\mathbf{y}^n = \mathbf{y}^n + \Delta \mathbf{y}^t;$
 $\lambda^n = \lambda^n + \Delta \lambda^t;$
 $\Delta \mathbf{y}_j^n = \Delta \mathbf{y}_j^{n-1} (N_d/t)^{0,5};$
Output: $\mathbf{y}^n; \lambda^n;$
end

4.3.1 Controle automático do incremento

A eficiência de um método de solução não-linear, geralmente, depende da aplicação de incrementos de carga inicial (ou deslocamento) com valores adequados ao problema em cada etapa da carga. De acordo com [Krenk \(2009\)](#), não existe como calcular um valor ideal para o tamanho de um incremento inicial de uma etapa de carregamento com base nos valores obtidos nas etapas anteriores. Como visto anteriormente, um ponto limite pode mudar completamente o comportamento do caminho de equilíbrio em uma única etapa de carregamento.

Ainda de acordo com [Krenk \(2009\)](#), um método que funciona satisfatoriamente é baseado na constatação de que são necessárias mais iterações nas regiões de mudanças significativas no caminho de equilíbrio. Dessa forma, o número de iterações necessárias para convergência na etapa de carga anterior pode ser utilizada como parâmetro de ajuste para o tamanho do incremento seguinte. Portanto, o incremento inicial para próxima etapa é obtido como

$$\Delta \mathbf{y}^n = (N_d/t)^\omega \Delta \mathbf{y}^{n-1}, \quad (4.27)$$

onde $\Delta \mathbf{y}^{n-1}$ é o vetor de incrementos de posição da etapa anterior, N_d é número “desejado de iterações”, t é o número de iterações totais da última etapa. O valor, geralmente, utilizado para ω é 0,5. O valor de N_d controla o tamanho do incremento e depende da acurácia desejada e pode depender do tamanho do problema.

No método do comprimento de arco, o incremento se dá pelo escalar Δl que combina simultaneamente o incremento de posição $\Delta \mathbf{y}$ e de carga $\Delta \lambda$, sendo a equação de incremento automático expressa por

$$\Delta l^n = (N_d/t)^\omega \Delta l^{n-1}, \quad (4.28)$$

4.4 Arc-Length

O método de comprimento de arco é desenvolvido a partir da ideia de que o “comprimento” do incremento combinado de posição-carga $(\Delta \mathbf{y}, \Delta f)$ deve ser controlado durante as iterações de equilíbrio ([RIKS, 1979](#)). Existem várias variações de técnicas para controlar o comprimento do incremento combinado. Uma discussão bastante ampla sobre os diversos métodos é apresentada em [Crisfield \(1991\)](#).

A ideia principal do método é mostrada na [Figura 4.6](#), onde o último estado de equilíbrio obtido é apresentado como $(\mathbf{y}^0, \mathbf{f}^0)$. Após o incremento inicial da carga e do deslocamento $(\Delta \mathbf{y}, \Delta f)$, é dado início as iterações de equilíbrio, as quais são restritas a uma hipersfera no espaço combinado de deslocamento-carga (\mathbf{y}, \mathbf{f}) . O próximo estado de equilíbrio é marcado pela intersecção do caminho de equilíbrio com a equação de restrição da hipersfera.

Inicialmente, o incremento de deslocamento $\Delta \mathbf{y}^1$ é calculado a partir do incremento de carga $\Delta \lambda^1 \mathbf{f}$

$$\Delta \mathbf{y}^1 = (\mathbf{H})^{-1} \Delta \lambda^1 \mathbf{f}. \quad (4.29)$$

A etapa de incremento é seguida pela fase de iterações, na qual são utilizados sub-incrementos simultâneos de carga e posição $(\delta \mathbf{y}, \delta \lambda)$ como correção para retornar ao caminho de equilíbrio seguindo uma curva inclinada, como mostrado na Figura 4.1(c). Nessa fase os incrementos são atualizados por

$$\Delta \mathbf{y}^t = \Delta \mathbf{y}^{t-1} + \delta \mathbf{y}^t, \quad \Delta \lambda^t = \Delta \lambda^{t-1} + \delta \lambda^t. \quad (4.30)$$

A mudança simultânea de carregamento e posição é governada por uma relação com a seguinte forma

$$c(\Delta \mathbf{y}, \Delta \lambda \mathbf{f}) = 0. \quad (4.31)$$

A equação de restrição associa a posição atual $\Delta \mathbf{y}$ ao incremento de carga atual $\Delta \lambda$, como ilustrado na Figura 4.1. Aplicando o processo de iteração de Newton Raphson para a solução simultânea das equações de equilíbrio e restrição é realizada através da linearização das equações (4.1) e (4.31) da seguinte forma

$$\mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0 \quad (4.32)$$

$$c + \frac{\partial c}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} + \frac{\partial c}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0 \quad (4.33)$$

onde \mathbf{g} e c são valores atuais, enquanto as parcelas $\partial \mathbf{g}$ e ∂c são referentes aos incrementos de primeira ordem. As variáveis independentes do problema são o vetor de posições \mathbf{y} e o fator de carga λ . As derivadas parciais do resíduo (4.32) são dadas como

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = -\mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} = \mathbf{f}. \quad (4.34)$$

A matriz \mathbf{H} é a matriz hessiana e \mathbf{f} é o vetor de força externa. A seguinte notação é introduzida para as derivadas parciais da equação de restrição:

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{c}_y^T, \quad \frac{\partial c}{\partial \lambda} = c_\lambda. \quad (4.35)$$

Utilizando essa notação, as equações linearizadas (4.32) e (4.33) podem ser reescritas na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{f} \\ \mathbf{c}_y^T & -c_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{y} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ c \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Resolvendo a primeira equação de (4.36), é obtida a seguinte expressão

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} + \delta \lambda \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}. \quad (4.37)$$

Dessa expressão é possível concluir que o sub-incremento de posição $\delta \mathbf{y}$ é composto da contribuição de dois vetores, que por conveniência são denotados como

$$\delta \mathbf{y}^G = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \Delta \mathbf{y}^F = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}, \quad (4.38)$$

com as quais é reescrita a equação (4.37), como

$$\delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{y}^G + \delta \lambda \Delta \mathbf{y}^F. \quad (4.39)$$

O primeiro termo é o sub-incremento de deslocamento $\Delta \mathbf{y}^G$, gerado pela força residual \mathbf{g} , correspondente à usada no método de Newton-Raphson. O segundo termo é o incremento de deslocamento gerado após a correção do incremento de carga. Substituindo a equação (4.39) na segunda equação de (4.36), é obtida equação do sub-incremento do fator de carga

$$\delta \lambda = -\frac{\mathbf{c}_y^T \delta \mathbf{y}^G + c}{\mathbf{c}_y^T \Delta \mathbf{y}^F + c_\lambda}. \quad (4.40)$$

Determinado o sub-incremento $\delta \lambda$, o sub-incremento de posição $\delta \mathbf{y}$ pode ser obtido pela equação (4.39).

Diferentes autores desenvolveram formulações para descrever a restrição representada pela equação (4.31). De acordo com Krenk (2009), as equações de restrição mais utilizadas em problemas de mecânica dos sólidos e estrutural são as restrições do hiperplano fixo e atualizado e restrição da hipersfera, ilustrados na Figura 4.4.

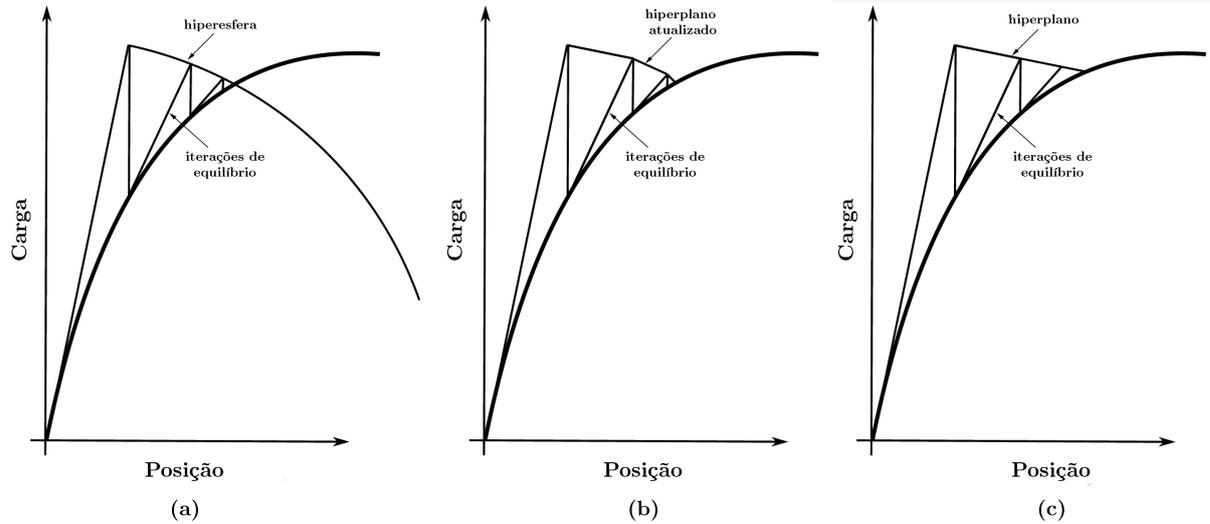


Figura 4.4: Método do comprimento de arco com (a) restrição de hiperesfera, (b) restrição de hiperplano atualizado e (c) restrição de hiperplano fixo.

Fonte: Adaptado de [Lacerda \(2014\)](#)

A restrição de hiperesfera utiliza uma equação quadrática para o incremento do fator de carga para trazer o vetor de carga de deslocamento combinado de volta à hiperesfera restritiva. A restrição de hiperesfera condiciona a equação restritiva à ortogonalidade com os incrementos combinados atuais (atualizadas) ou incrementos combinados iniciais (fixa.)

De acordo com [Borst et al. \(2012\)](#), as várias alternativas de representar a equação de restrição, na prática não produzem resultados superiores entre si. Por esse motivo, para este trabalho foi escolhido a equação do hiperplano fixo, visto que por ser uma equação quadrática, no método de hiperesfera podem ocorrer soluções com raízes imaginárias.

4.4.1 Restrição do hiperplano

A restrição linear é um hiperplano ortogonal ao incremento combinado de deposição e carga, ilustrado na Figura 4.5, onde o estado de equilíbrio encontrado na etapa anterior é denotado como $(\mathbf{y}^0, \lambda^0 \mathbf{f})$ e o incremento combinado de carga e posição é apresentado como o “vetor” $(\Delta \mathbf{y}, \Delta \lambda \mathbf{f})$. O sub-incremento $(\delta \mathbf{y}, \delta \lambda \mathbf{f})$ é composto da variação de posição $(\delta \mathbf{y}^G)$ gerado pela força residual e da contribuição $\delta \lambda$ $(\Delta \mathbf{y}, \Delta \lambda \mathbf{f})$.

Durante a análise, ao encontrar um ponto limite de carga no caminho de equilíbrio, o incremento preditor pode se tornar ‘horizontal’, ou seja, o incremento de carga atual $\Delta \lambda$ se torna nulo. Essa situação pode implicar em problemas de convergência, que podem ser contornados através do condicionamento do sub-incremento $(\delta \mathbf{y}, \delta \lambda \mathbf{f})$ para que encontre no hiperplano ortogonal aos incrementos iniciais $(\Delta \mathbf{y}^1, \delta \lambda^1 \mathbf{f})$, como mostrado na Figura 4.5. Isso corresponde a escrever a equação (4.39) do sub-incremento de posição como

$$\delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{y}^G + \delta \lambda \Delta \mathbf{y}^F, \quad (4.41)$$

onde $\Delta \mathbf{y}^1$ é determinado pela equação (4.29) com incremento de força igual a $\Delta \lambda^1$. Um hiperplano ortogonal com vetor normal $(\Delta \mathbf{y}^1, \Delta \lambda^1 \mathbf{f})$ é denominado de hiperplano fixo ou linear, o qual corresponde à direção de retorno originalmente introduzida por Riks (1979).

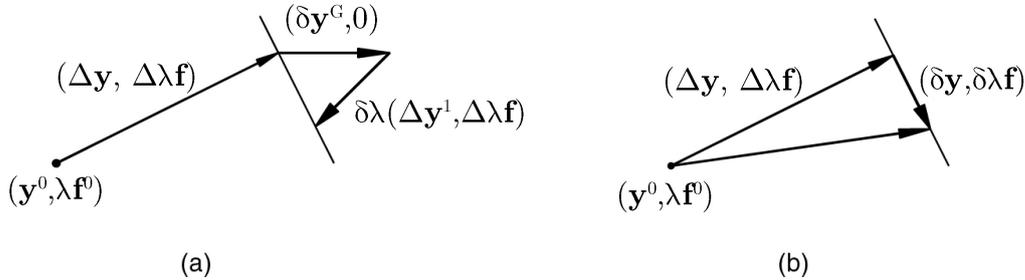


Figura 4.5: (a) Residual e componente de correção, (b) incremento e sub-incremento.

Fonte: Adaptado de Krenk (2009)

Alternativamente, ao invés de ser utilizado o vetor de incrementos iniciais $(\Delta \mathbf{y}^1, \Delta \lambda^1 \mathbf{f})$ como vetor normal, pode ser utilizado o vetor de incrementos atuais $(\Delta \mathbf{y}, \Delta \lambda \mathbf{f})$. A condição para que o sub-incremento seja encontrado no hiperplano ortogonal aos incrementos atuais é expressa da seguinte forma

$$(\Delta \mathbf{y}, \Delta \lambda \mathbf{f}) \cdot (\delta \mathbf{y}, \delta \lambda \mathbf{f}) = 0, \quad (4.42)$$

onde o símbolo (\cdot) representa o produto escalar no espaço combinado de carga e posição. A equação (4.42) descreve a denominada restrição do hiperplano não linear ou atualizada. O problema na equação (4.42) é que os incrementos de carga e de posição representam quantidades físicas diferentes e, portanto, têm unidades e escalas diferentes.

Segundo Krenk (2009), o problema das quantidades físicas diferentes é, geralmente, resolvido objetivamente, contabilizando as diferentes unidades envolvidas no vetor de posições e no vetor de carga, mas negligenciando possíveis diferenças nos componentes individuais em cada um desses vetores. Isso leva a um produto escalar com a seguinte forma

$$(\Delta \mathbf{y}, \Delta \lambda \mathbf{f})^T \cdot (\delta \mathbf{y}, \delta \lambda \mathbf{f}) = \Delta \mathbf{y}^T \delta \mathbf{y} + \beta^2 \Delta \lambda \mathbf{f}^T \delta \lambda \mathbf{f}. \quad (4.43)$$

onde β é um fator de escala, utilizado para relacionar as escalas correspondentes de posição e força. Vários trabalhos se dedicaram a discutir métodos apropriados para determinar β , como por exemplo Schweizerhof e Wriggers (1986) e Al-Rasby (1991). No entanto, de acordo com Krenk (2009), nenhum dos métodos discutidos apresentou superioridade, e como afirmou Crisfield (1981), baseado em experiências numéricas, é mais adequado fixar o comprimento incremental Δl no espaço das posições. Essa consideração corresponde em adotar $\beta = 0$.

Substituindo a equação (4.43) na equação (4.40), o sub-incremento do fator de

carga $\delta\lambda$ pode ser determinado por

$$\delta\lambda = \frac{\Delta\mathbf{y}^T \delta\mathbf{y}^G}{\Delta\mathbf{y}^T \delta\mathbf{y}^F + \beta^2 \Delta\lambda \mathbf{f}^T \mathbf{f}}. \quad (4.44)$$

A restrição linear é caso particular da condição geral de restrição (4.31), e a expressão para incremento do fator de carga $\delta\lambda$ é um caso especial da expressão (4.40). No caso da restrição do hiperplano, a cada passo iterativo, o estado combinado posição-carga retorna ao superfície de restrição, ou seja, $c = 0$. A consideração de fixar a condição de ortogonalidade à apenas a parte do espaço referente à posição, ou seja $\beta = 0$, corresponde geometricamente a utilizar hiperplanos ‘verticais’ no espaço combinado posição-carga. Nesse caso, a equação (4.43) para hiperplano atualizado é rescrita como

$$\delta\lambda = -\frac{\Delta\mathbf{y}^T \delta\mathbf{y}^G}{\Delta\mathbf{y}^T \Delta\mathbf{y}^F}, \quad (4.45)$$

e para hiperplano fixo, como

$$\delta\lambda = -\frac{(\Delta\mathbf{y}^1)^T \delta\mathbf{y}^G}{(\Delta\mathbf{y}^1)^T \Delta\mathbf{y}^F}. \quad (4.46)$$

4.4.2 Solução preditora

A etapa de incremento inicial de carga e posição $(\Delta\mathbf{y}^1, \Delta\lambda^1)$ para em seguida ser executada a fase de iteração, é chamada de solução preditora. Na Figura 4.6 é ilustrada a solução preditora, pela qual é possível notar que a direção do preditor é tangente ao caminho de equilíbrio. Portanto, o acréscimo de posição $\Delta\mathbf{y}^1$ tem a mesma direção do vetor $\Delta\mathbf{y}^F = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}$, também tangente ao caminho de equilíbrio (no espaço de deslocamentos). Dessa forma, os valores das soluções predictoras podem ser determinados por

$$\Delta\lambda^1 = \pm \frac{\Delta l}{\|\Delta\mathbf{y}^F\|}, \quad (4.47)$$

$$\Delta\mathbf{y}^1 = \Delta\lambda^1 \Delta\mathbf{y}^F. \quad (4.48)$$

O sinal indefinido da solução preditora (4.47) é devido ao fato de o preditor $\Delta\mathbf{y}^1$ poder ter ou não o mesmo sentido do vetor $\Delta\mathbf{y}^F$. Se o incremento anterior ultrapassou um ponto limite de carga, é possível ser necessário alterar a direção do incremento de carga.

O problema está ilustrado na Figura 4.7, onde o incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{y}^{n-1}$ da etapa de carga anterior, conecta dois pontos na curva de equilíbrio. Na etapa atual, é gerado o vetor tangente ao caminho de equilíbrio $\Delta\mathbf{y}^F$. É importante garantir que incremento de carga $\Delta\lambda^1$ aponte na direção que continua a curva de equilíbrio, como mostrado na Figura 4.7 (a), ao invés de apontar para direção contrária, como mostrado na Figura 4.7 (b).

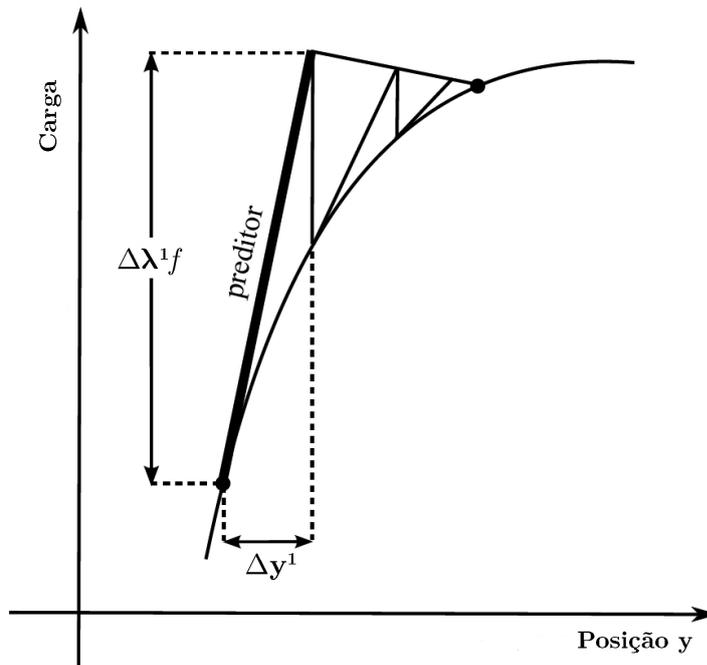


Figura 4.6: Fase de incremento.

Fonte: Adaptado de [Lacerda \(2014\)](#)

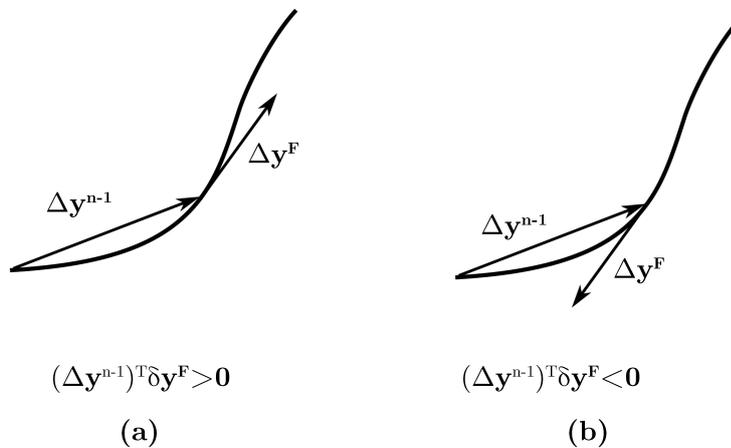


Figura 4.7: (a) $\Delta \mathbf{y}^F$ aponta no sentido de avanço no caminho do equilíbrio. (b) $\Delta \mathbf{y}^F$ aponta no sentido contrário ao sentido de avanço no caminho do equilíbrio.

Fonte: Adaptado de [Krenk \(2009\)](#)

De acordo com [Feng, Peric e Owen \(1995\)](#), uma implementação simples e efetiva para determinar o sentido do preditor corretamente é expressa pela checagem da seguinte condição

$$(\Delta \mathbf{y}^{n-1} \Delta \mathbf{y}^F < 0) \quad (4.49)$$

isto é, se a condição for verdadeira, o vetor $\Delta \mathbf{y}^F$ tem sentido contrário ao sentido do

avanço da curva de equilíbrio, portanto, o preditor deve ter sentido contrário a $\Delta \mathbf{y}^F$, sendo necessário adotar sinal negativo na equação (4.47),

$$\Delta \lambda^1 = -\frac{\Delta l}{\|\Delta \mathbf{y}^F\|}. \quad (4.50)$$

A inversão do sinal é relevante apenas na primeira etapa de previsão, uma vez que o processo seguinte é dirigido pelos sub-incrementos.

O algoritmo de comprimento de arco utilizando a restrição de hiperplano fixo é apresentado no algoritmo 5. A estrutura é muito semelhante à do método de incrementos por posições utilizando o método de Newton-Raphson modificado.

Algoritmo 5: Método do comprimento de arco

Input: \mathbf{y}^0 ; Δl^0 ;
 $\lambda^0 = 0$; $\Delta \mathbf{y}^0 = 0$; $\Delta \lambda^0 = 0$;
for $n = 1$ **to** n_{max} **do**
 $\mathbf{H}^n = \partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^{n-1}) / \partial \mathbf{y}$;
 $\delta \mathbf{y}^F = (\mathbf{H}^n)^{-1} \Delta \lambda^{n-1} \mathbf{f}$;
 $\Delta \lambda^n = \Delta \lambda^{n-1} / \|\delta \mathbf{y}^F\|$;
 if $(\Delta \mathbf{y}^{n-1})^T \cdot \delta \mathbf{y}^F < 0$ **then** $\Delta \lambda^n = -\Delta \lambda^n$;;
 $\Delta \mathbf{y}^1 = \Delta \lambda^n \delta \mathbf{y}^F$;
 $\Delta \mathbf{y}^n = \Delta \mathbf{y}^1$
 $\mathbf{g}^n = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^n + \Delta \mathbf{y}^n) - (\lambda^n + \Delta \lambda^n) \mathbf{f}$;
 for $t = 1$ **to** t_{max} **do**
 $\delta \mathbf{y}^G = -\mathbf{H}^{(t-1)} \mathbf{g}^{(t-1)}$;
 $\delta \lambda^t = -(\Delta \mathbf{y}^1)^T \cdot \delta \mathbf{y}^G / (\Delta \mathbf{y}^1)^T \cdot \delta \mathbf{y}^F$;
 $\delta \mathbf{y}^t = \delta \mathbf{y}^G + \delta \lambda^t \delta \mathbf{y}^F$;
 $\Delta \mathbf{y}^t = \Delta \mathbf{y}^{t-1} + \delta \mathbf{y}^t$;
 $\Delta \lambda^t = \Delta \lambda^{t-1} + \delta \lambda^t$
 $\mathbf{g}^t = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{y}^n + \Delta \mathbf{y}^t) - (\lambda^n + \Delta \lambda^t) \mathbf{f}$;
 if $\|\mathbf{g}\| \leq tol \|\lambda^n \mathbf{f}\|$ **then break**;
 end
 $\mathbf{y}^n = \mathbf{y}^n + \Delta \mathbf{y}^t$;
 $\lambda^n = \lambda^n + \Delta \lambda^t$;
 $\Delta l^n = \Delta l^{n-1} (N_d/t)^{0.5}$;
Output: \mathbf{y}^n ; λ^n ;
end

4.5 Aplicações numéricas

Nessa seção serão apresentados alguns exemplos de treliças espaciais que apresentam efeitos de instabilidade quando carregadas, com a finalidade de ilustrar as técnicas de continuação, descritas nesse capítulo, em conjunto com o método dos elementos finitos posicional.

4.5.0.1 Treliça de Von Mises

O primeiro exemplo é a treliça de Von Mises (Figura 4.8), a qual é composta por duas barras simétricas de igual área. A treliça apresenta comportamento não linear na presença de tensões compressivas e está sujeita a instabilidade por efeitos de *snap-through*. Foram utilizadas as seguintes propriedades geométricas e material: $L_0 = 10$, $\theta = 10^\circ$ e $EA = 1$.

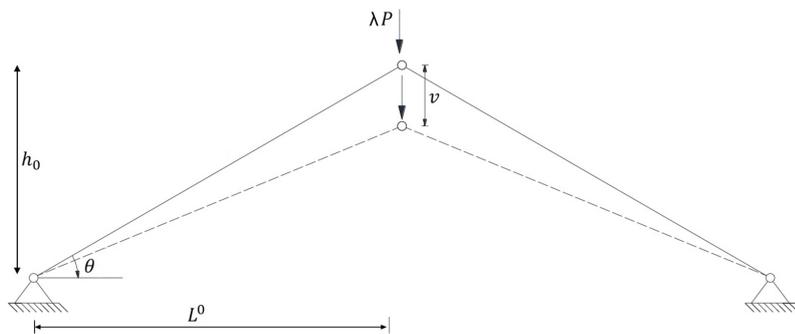


Figura 4.8: Treliça de Von Mises na posição inicial e deslocada.

Fonte: Autor.

A carga é aplicada no topo da estrutura, a qual possui apenas um grau de liberdade vertical na direção da aplicação do carregamento. Nesse exemplo, é considerado apenas deformação axial nas barras, que são impedidas de fletir permanecendo retas durante carregamento. O sentido da força externa independe da configuração da estrutura e o material é considerado elástico linear.

Inicialmente, a análise é realizada utilizando o método de Newton-Raphson por controle de força e comparada com a solução analítica apresentada em [Psozny e Ravinger \(1991\)](#), conforme mostra a Figura 4.9. É evidente a descontinuidade da solução numérica ao se atingir o ponto crítico (ponto 1) da trajetória fundamental, próprio da instabilidade por *snap-through*. O carregamento relacionado a esse ponto é chamado carga limite e representa a máxima força que a estrutura suporta em regime estável de equilíbrio estático. Após o ponto limite, a configuração de equilíbrio é atingida com a inversão da inclinação da barra (ponto 3), que ocorre de maneira dinâmica e abrupta.

Para que as posições da estrutura no trecho instável possam ser descritas é necessário

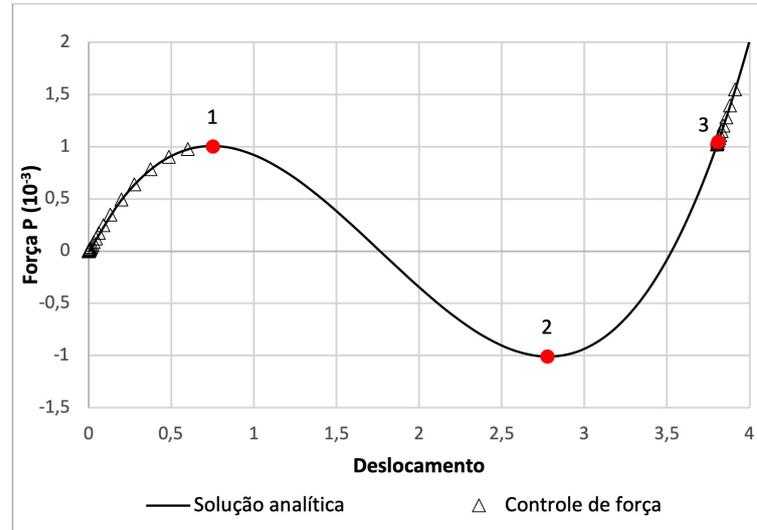


Figura 4.9: Solução por Newton Raphson com controle de força

Fonte: Autor.

que o algoritmo de solução seja apto a controlar os deslocamentos do nó em que o carregamento é aplicado. Introduzindo essa metodologia no algoritmo de Newton-Raphson, é obtida a solução por controle de deslocamento. Na Figura 4.10 é apresentada a solução por controle de deslocamento, em que é notório a capacidade do algoritmo de continuar além dos pontos limites e traçar toda a trajetória de equilíbrio.

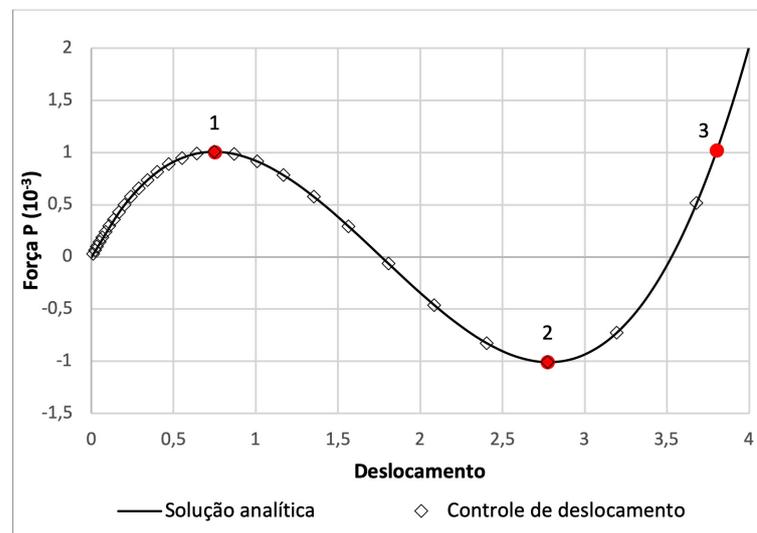


Figura 4.10: Solução por Newton Raphson com controle de deslocamento

Fonte: Autor.

É notável em ambas figuras, o efeito do ajuste automático do valor do incremento. No começo da análise os pontos estão mais próximos, pois o incremento inicial era pequeno. A medida que o equilíbrio era encontrado para cada incremento necessitando de poucas iterações, o incremento aumenta e os pontos se tornam mais afastados. Na sequência,

dando continuidade as análises, são apresentados mais três exemplos com a finalidade de demonstrar a necessidade de melhorar o algoritmo de solução, principalmente, diante da possibilidade de ocorrência de efeitos de *snap-back*. Esses exemplos são mostrados com a motivação de apresentar a necessidade de implementação de técnicas do tipo *path-following* em análises não-lineares.

4.5.0.2 Domo tridimensional hexagonal

O segundo exemplo é uma treliça espacial preposta por Bonet, Gil e Wood (2017), a qual consiste em um domo tridimensional formado por pontos de um hexágono. Na Figura 4.13 é apresentada a geometria da estrutura, os dados do material adotado e o ponto de aplicação do carregamento, no ápice da cúpula. Os nós da base são travados contra translação e liberados para rotação.

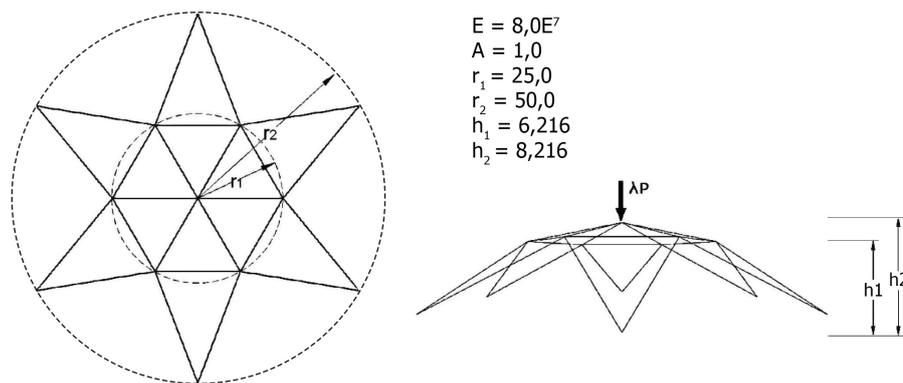


Figura 4.11: Domo hexagonal com 24 elementos

Fonte: Adaptado de Kzam (2016)

Considerando a limitação do método de NR por controle de força, na Figura 4.12 é apresentada apenas resultados da análise utilizando método de Newton-Raphson por controle de deslocamentos, em comparação é mostrado o caminho completo da curva carga-deslocamento obtido por Bonet, Gil e Wood (2017). Como é possível verificar na Figura 4.12, o controle por deslocamentos descreve a trajetória de equilíbrio apenas enquanto os deslocamentos são crescentes, ignorando os pontos seguintes a uma inversão de sentido dos deslocamento, ou seja, o fenômeno de *snap-back*. Esse ponto é caracterizado pela ocorrência de tangente vertical a trajetória.

Na Figura 4.13 são apresentados os resultados da análise não-linear com método do comprimento de arco, comparada com o caminho completo de equilíbrio desta estrutura. Com essa técnica foi possível ultrapassar os pontos críticos e descrever o caminho total mesmo na presença de *snap-through* e *snap-back*.

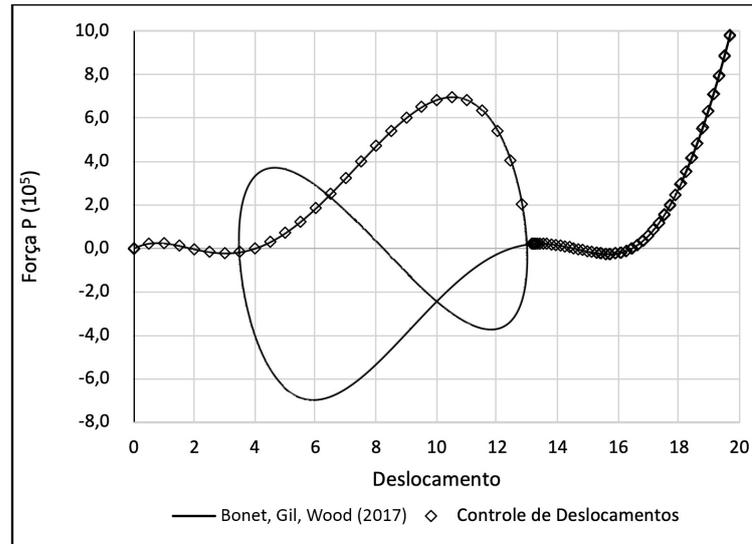


Figura 4.12: Trajetória de equilíbrio obtida no ponto de aplicação do carregamento, determinada através de Newton Raphson com controle de deslocamento

Fonte: Autor.

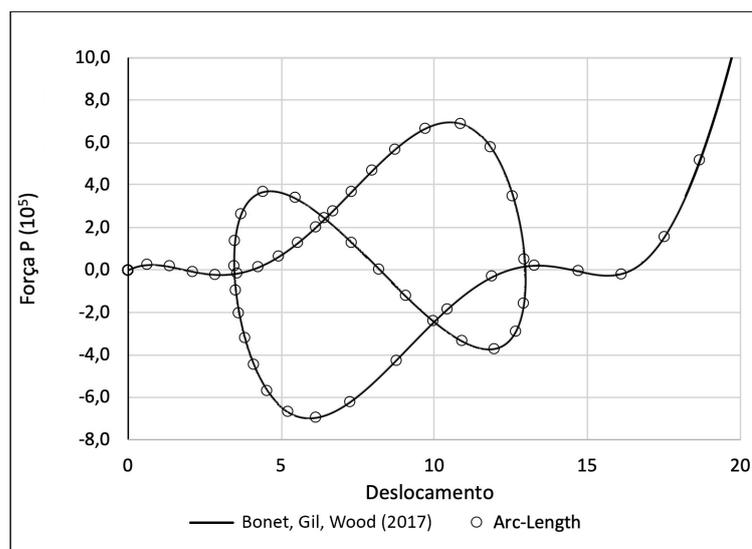


Figura 4.13: Trajetória de equilíbrio obtida no ponto de aplicação do carregamento, através do método do arc-length

Fonte: Autor.

4.5.0.3 Treliça de 12 barras

Esta treliça foi apresentada em Krenk e Hededal (1995), no qual foi utilizado o método chamado de ortogonal residual quasi-Newton e em Krenk (2009) onde foi utilizado o método de *arc-length* com restrição do hiperplano. Este exemplo é caracterizado pelo caminho de equilíbrio complexo devido a ocorrência de vários *snap-throughs* e *snap-backs*. A geometria da estrutura é mostrada na Figura 4.14.

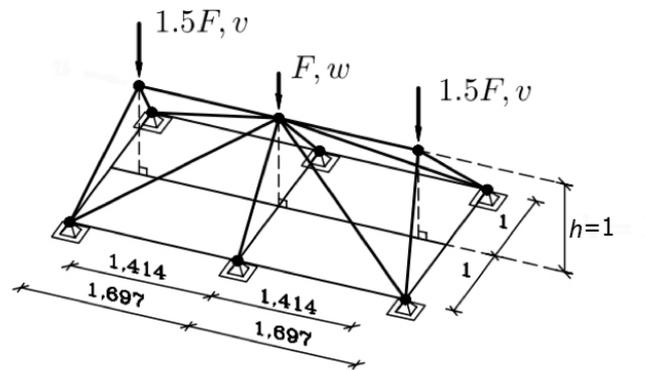


Figura 4.14: Treliça espacial com 12 barras.

Fonte: Krenk (2009)

A treliça é composta de 12 barras de igual rigidez $EA=1$. Os nós da base são fixos e a deformação da estrutura é caracterizada pelos dois componentes de deslocamento v, w , mostrados na Figura 4.14. No nó central do topo é aplicada uma carga de magnitude F , enquanto nos dois nós vizinhos do topo recebem uma carga com magnitude de $1,5F$. Na Figura 4.15 e Figura 4.16 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio nos nós, obtidas através do método *arc-length* com restrição do hiperplano, e comparados com os valores de Krenk (2009).

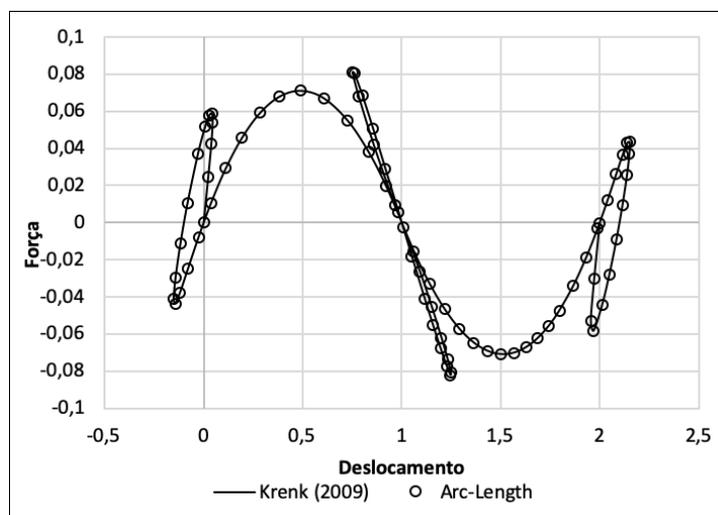


Figura 4.15: Caminho de equilíbrio no grau de liberdade w .

Fonte: Autor.

O caminho de equilíbrio mostrado nas figuras foi traçado com um total de 77 passos de incremento. Foi utilizada tolerância igual a 10^{-5} e número máximo de iterações por incremento igual a $NI_{Max}=10$. O comprimento de arco inicial é igual $\Delta L_0 = 0,1$ e os restantes são ajustados automaticamente com $\omega = 0,5$ e $N_d = 2$. Foi utilizado Newton-Raphson modificado, o qual não apresentou nenhum problema de convergência.

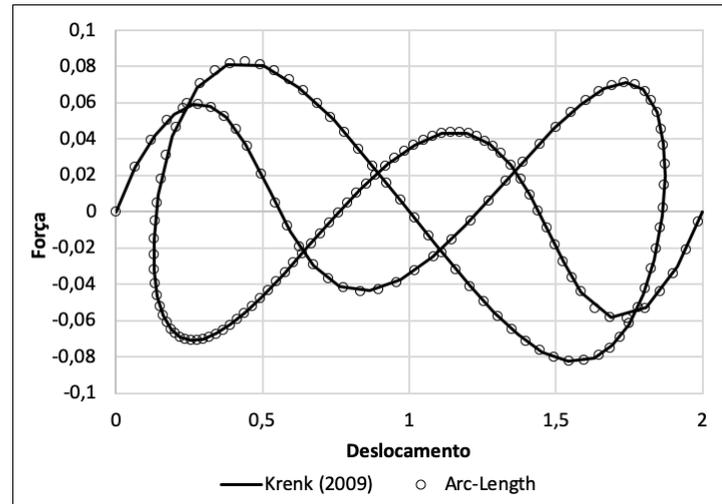


Figura 4.16: Caminho de equilíbrio no grau de liberdade v .

Fonte: Autor.

No entanto, ao tentar rodar o algoritmo com full Newton-Raphson ocorreram problemas de convergência, interrompendo o algoritmo antes de obter o caminho de equilíbrio completo, assim como constatou Krenk (2009).

4.5.0.4 Domo de Schwedler

O exemplo domo de Schwedler foi extraído de Krishnamoorthy, Ramesh e Dinesh (1996) e os dados usados são iguais aos estudados por Kzam (2016). A estrutura possui 264 barras de treliça, cujas dimensões e propriedades do material estão ilustradas na Figura 6.11. Nas Figura 6.12 e Figura 6.13 é apresentada a trajetória de equilíbrio da estrutura resultados da análise por controle de força, controle de deslocamento e arc-length.

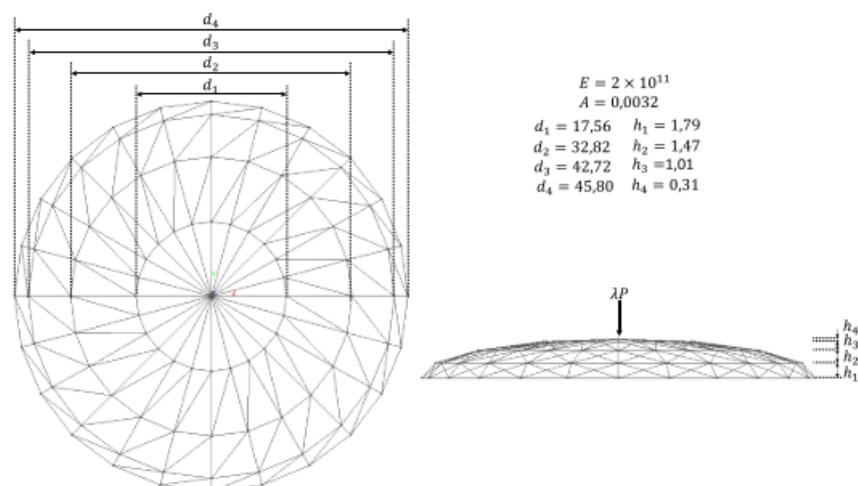


Figura 4.17: Geometria e propriedades do material do Domo de Schwedler.

Fonte: Kzam (2016)

Novamente observa-se que o controle de força é capaz de determinar a trajetória apenas até os pontos limites que precedem os efeitos de *snap-through*. Já com o controle de deslocamento é possível traçar a trajetória além nos pontos limites traçando-se a curva nos ramos de equilíbrio instável, no entanto, a análise não segue além dos pontos de retorno, não sendo possível identificar a reversão de sentido do caminho de equilíbrio.

O caminho de equilíbrio completo foi obtido utilizando o *arc-length*, como mostrado na Figura 4.19.

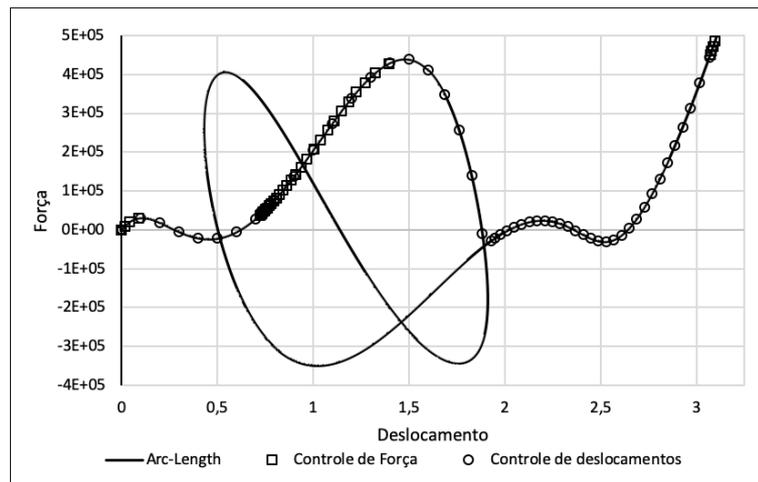


Figura 4.18: Caminho de equilíbrio do Domo de Schwedler.

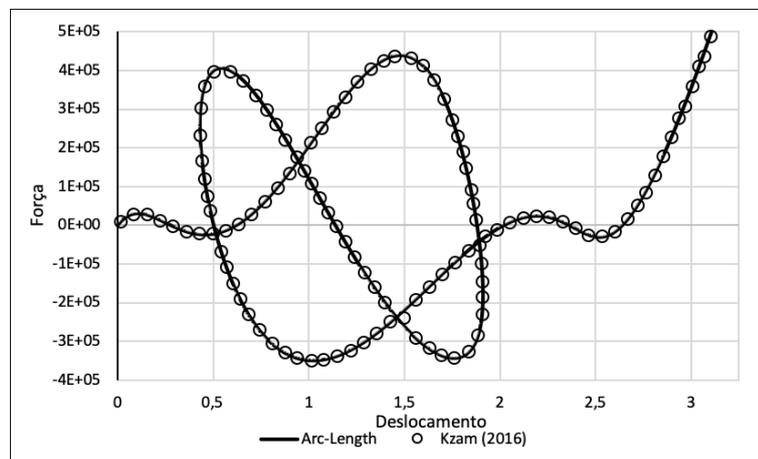


Figura 4.19: Caminho de equilíbrio do Domo de Schwedler com técnica de comprimento de arco.

Capítulo 5

Análise Termoestrutural

Uma análise termoestrutural em situação de incêndio consiste fundamentalmente na análise do comportamento da estrutura durante a elevação da temperatura, em que são considerados os efeitos da ação térmica. A reação estrutural acontece pelo desenvolvimento de deslocamentos, deformações e tensões devido a degradação das propriedades mecânicas e da dilatação térmica no material provocadas pelo aumento da temperatura ([RIGOBELLO, 2011](#)).

No presente trabalho a distribuição de temperaturas na seções das barras será considerada constante devido se tratarem de barras com seções vazadas com paredes relativamente finas ou seções maciças com seções consideravelmente pequenas.

O objetivo deste capítulo consiste em apresentar os conceitos envolvidos em relação aos efeitos térmicos no aço e como o comportamento da estrutura é influenciado quando sujeita à elevadas temperaturas.

5.0.1 Características do acoplamento proposto

De acordo com [Wang \(2002\)](#), o comportamento global de um elemento de aço uniformemente aquecido, sem qualquer restrição a dilatação, é simples e idêntico ao de um elemento à temperatura ambiente. Ao avaliar o comportamento do elemento estrutural, a única consideração adicional é que deve ser usada a resistência e a rigidez reduzidas do aço devido as temperaturas elevadas.

A estratégia adotada neste trabalho para análise termoestrutural pode ser dividida em duas fases. A primeira fase consiste numa análise térmica quee ocorre apenas uma vez durante o processo. Nessa fase, é aplicada a temperatura, ou seja, são atualizadas as propriedades mecânicas (resistência e rigidez) e térmicas (alongamento relativo) dos materiais em função da temperatura para serem considerados na análise estrutural. Na segunda fase é realizada a análise mecânica, na qual são obtidas as deformações e tensões devido ao carregamento externo aplicado. Nessa fase, a deformação térmica obtida na

primeira etapa é invariável e é somada a deformação mecânica para compor a deformação total. Desse modo, o resultado térmico influencia o mecânico mas a volta não é considerada.

Em resumo, neste trabalho a análise termoestrutural pretende avaliar o diagrama tensão-deformação quando toda a estrutura está sujeita a determinada temperatura, avaliando as alterações das tensões limite de flambagem e plastificação, assim como comportamentos inelásticos, que serão abordados nas próximas seções.

5.1 Propriedades do aço em temperaturas elevadas

Quando uma estrutura de aço é exposta ao fogo, a elevação da temperatura do material provoca redução em suas propriedades mecânicas. O aço se torna mais fraco e mais flexível. A elevação da temperatura também causa deformações térmicas através da expansão térmica, que dependendo do grau de restrição do elemento se convertem em alongamento do material ou em tensões internas.

Essas mudanças levam a vários fenômenos observados em diferentes testes de incêndio. Portanto, para entender o comportamento complexo de uma estrutura de aço sob condições de incêndio, é necessário avaliar as propriedades do material à temperaturas elevadas. Elas incluem reduções na resistência e rigidez e alterações nas relações tensão-deformação do aço (WANG, 2002).

5.1.1 Relação constitutiva do aço em temperaturas elevadas

O EN 1993-1-2 (2005) apresenta, baseado em um extenso programa de ensaios experimentais de tração em escala reduzida realizada pela British Steel Corporation (KIRBY; PRESTON, 1988), fatores de redução para a resistência ao escoamento ($k_{y,T}$), para o limite de proporcionalidade ($k_{p,T}$) e para o módulo de elasticidade ($k_{K,T}$) em função da temperatura. A resistência ao escoamento é relacionada à deformação limite de 2%.

Os fatores de redução da relação tensão-deformação de aços estruturais do EN 1993-1-2 (2005) são apresentadas na Tabela 5.1, na qual, f_y é a tensão de plastificação do aço a 20°C; $f_{y,T}$ é a tensão de plastificação do aço a uma temperatura T ; K é o módulo de elasticidade do aço a 20°C; $f_{p,T}$ é a tensão limite de proporcionalidade T e K_T é o módulo de elasticidade de aços laminados a uma temperatura T . Os dados da Tabela 5.1 são aqui representado de forma gráfica nas curvas mostradas na Figura 5.1.

A norma EN 1993-1-2 (2005) fornece um modelo constitutivo para análise de estruturas em situação de incêndio. O estado limite do componente é determinado pela redução matemática da capacidade de carga do aço versus a temperatura do aço, mostrado na Figura 5.2.

Tabela 5.1: Redução das propriedades de aços estruturais em função da temperatura.

Temperatura (°C)	$k_{y,T} = \frac{f_{y,T}}{f_y}$	$k_{p,T} = \frac{f_{p,T}}{f_y}$	$k_{K_T} = \frac{K_T}{K}$
20°C	1,000	1,000	1,000
100°C	1,000	1,000	1,000
200°C	1,000	0,807	0,900
300°C	1,000	0,613	0,800
400°C	1,000	0,420	0,700
500°C	0,780	0,360	0,600
600°C	0,470	0,180	0,310
700°C	0,230	0,075	0,130
800°C	0,110	0,050	0,090
900°C	0,060	0,0375	0,0675
1000°C	1,040	0,0250	0,0450
1100°C	0,020	0,0125	0,0225
1120°C	0,000	0,0000	0,0000

Fonte: [EN 1993-1-2 \(2005\)](#).

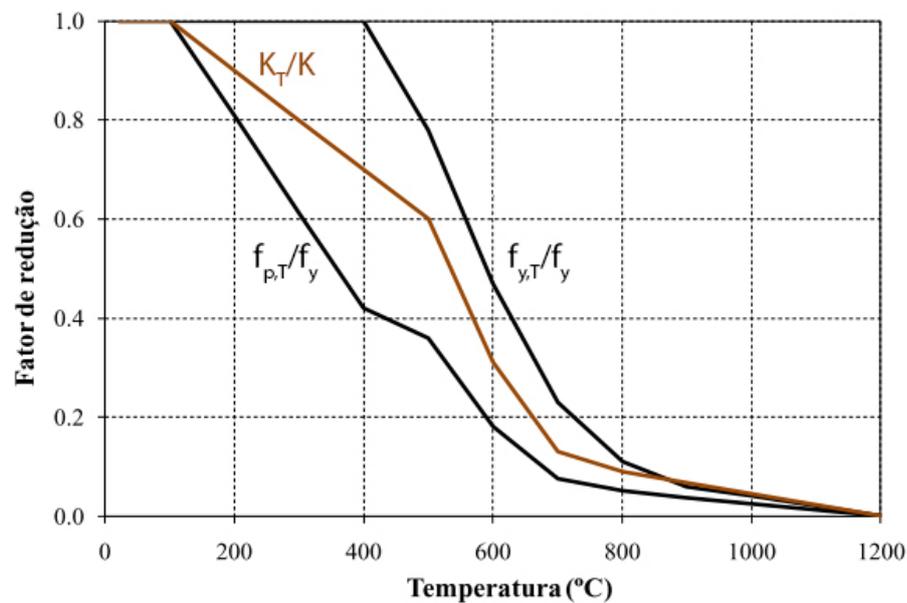


Figura 5.1: Fatores de redução das propriedades do aço em função da temperatura.

Fonte: [Rigobello \(2011\)](#).

O modelo constitutivo é uniaxial e estruturado em quatro seções. A tensão é determinada como função explícita do esforço mecânico. Inicialmente, um trecho linear varia da tensão zero até o limite de proporcionalidade $f_{p,T}$. A inclinação desse trecho é

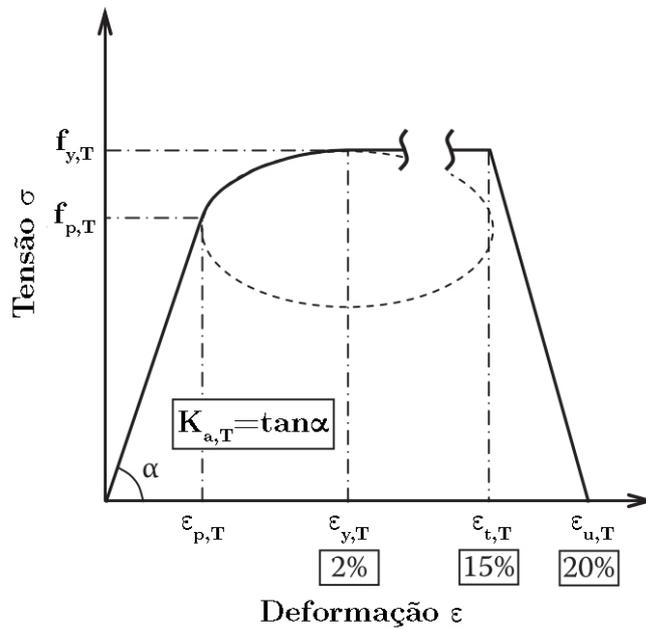


Figura 5.2: Modelo qualitativo do (EN 1993-1-2, 2005) para descrever a relação tensão-deformação para aço carbono com temperatura T .

Fonte: Franssen et al. (1996).

igual ao módulo elástico K_T , que é degradado a medida que a temperatura do aço aumenta. O segundo trecho não linear após o limite de proporcionalidade é parte de uma elipse, construída para que seja tangente ao ponto final da linha inicial $(f_{p,T}, \varepsilon_{p,T})$ e tangente a uma reta que descreve a plastificação, a qual tem início na abscissa de deformação igual a 2% e ordenada de tensão igual ao valor da tensão de plastificação $f_{y,T}$. A reta horizontal de plastificação se estende da deformação de plastificação até a deformação de ruptura $\varepsilon_{t,T}$, correspondente a uma deformação de 15%. O quarto trecho é uma reta inclinada, que se estende da deformação limite de ruptura $\varepsilon_{t,T}$ até a deformação $\varepsilon_{u,T}$, correspondente a uma deformação de 20%.

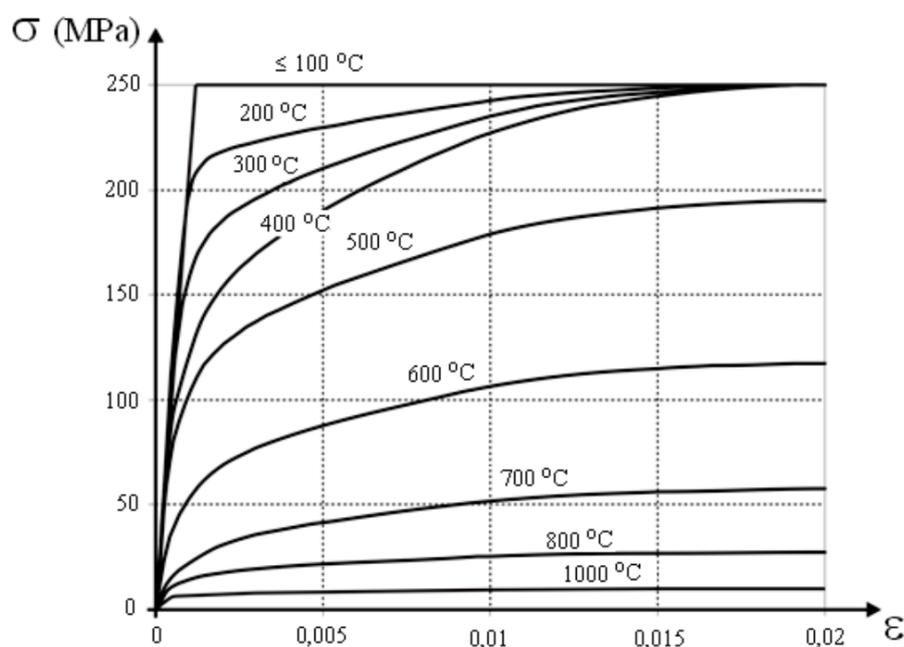
Na Tabela 5.2, proposta pelo EN 1993-1-2 (2005), estão apresentadas as funções matemáticas que descrevem os quatro trechos da Figura 5.2. Estas equações foram formuladas para que permaneçam contínuas nos pontos de transição entre equações. Com finalidade de ilustração, na Figura 5.3 são apresentadas as curvas tensão-deformação obtidas com as equações da Tabela 5.2 para uma faixa de temperatura de 20 °C a 1000 °C e considerando aço com resistência ao escoamento igual a 250 MPa.

Como é possível observar no diagrama correspondente às temperaturas entre 20 °C e 100 °C, o valor da tensão efetiva de escoamento e do limite de proporcionalidade são iguais, de modo que não existe uma faixa elástica não linear. A elevada degradação da resistência do aço às altas temperaturas fica evidente pela Figura 5.3, apenas 23% da resistência à temperatura ambiente permanece a 700 °C. A 800 °C, é reduzida para 11% e a 900 °C, para 6%.

Tabela 5.2: Equações e parâmetros para obtenção dos diagramas tensão-deformação para os aços estruturais em temperaturas elevadas.

Intervalo de deformações ε	Tensão σ	Módulo tangente
$\varepsilon \leq \varepsilon_{p,T}$	εK_T	K_T
$\varepsilon_{p,T} < \varepsilon < \varepsilon_{y,T}$	$f_{p,T} - c + (b/a)[a^2 - (\varepsilon_{y,T} - \varepsilon)^2]^{0,5}$	$\frac{b(\varepsilon_{y,T} - \varepsilon)}{a[a^2 - (\varepsilon_{y,T} - \varepsilon)^2]^{0,5}}$
$\varepsilon_{y,T} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{t,T}$	$f_{y,T}$	0
$\varepsilon_{t,T} < \varepsilon < \varepsilon_{u,T}$	$f_{y,T}[1 - (\varepsilon - \varepsilon_{t,T})/(\varepsilon_{u,T} - \varepsilon_{t,T})]$	-
$\varepsilon = \varepsilon_{u,T}$	0,00	-
Parâmetros	$\varepsilon = f_{p,T}/K_T$ $\varepsilon_{y,T} = 0,02$ $\varepsilon_{t,T} = 0,15$ $\varepsilon_{u,T} = 0,20$	
Funções	$a^2 = (\varepsilon_{y,T} - \varepsilon_{p,T})(\varepsilon_{y,T} - \varepsilon_{p,T} + c/K_T)$ $b^2 = c(\varepsilon_{y,T} - \varepsilon_{p,T})K_T + c^2$ $c = \frac{(f_{y,T} - f_{p,T})^2}{(\varepsilon_{y,T} - \varepsilon_{p,T})K_T - 2(f_{y,T} - f_{p,T})}$	

Fonte: EN 1993-1-2 (2005)

Figura 5.3: Relações tensão-deformação para aço $f_y=250$ MPa e deformações <2%.

Fonte: EN 1993-1-2 (2005).

Neste trabalho, assim como em [Zhou, Cardoso e Bahai \(2019\)](#), será considerado que a plastificação inicia no limite de proporcionalidade, ou seja, o valor efetivo da tensão de plastificação $f_{y,T}$ será igual ao valor da $f_{p,T}$. Dessa forma, a diminuição da $f_{y,T}$ com o aumento de temperatura ocorrerá em função do fator k_p . Além disso, como propõe [Zhou, Cardoso e Bahai \(2019\)](#), o modelo material de encruamento para aço carbono proposto pelo EC3 que descreve o trecho não linear e o trecho de plastificação pode ser substituído, convenientemente, por uma só equação que descreve o escoamento do material. Através de aproximação pelo método dos mínimos quadrados dos dados da Figura 5.3 utilizando a lei de Voce, os autores obtiveram a seguinte equação

$$f_{y,T} = f_{y0,T} + \nu_T * [1 - \exp(-\delta_T \bar{\epsilon}_p)], \quad (5.1)$$

onde $f_{y0,T}$ é a tensão de plastificação inicial (igual a tensão limite de proporcionalidade) na temperatura T e $\bar{\epsilon}_p$ é a deformação plástica acumulada. Os parâmetros ν_T e δ_T são constantes do material, dependentes da temperatura, obtidos pela estratégia de aproximação e seus valores estão apresentados na Tabela 5.3.

A Figura 5.4 mostra as curvas de tensão-deformação do aço carbono para temperaturas elevadas, onde as linhas sólidas representam os valores correspondentes as equações do EC3 e, em tracejado são representadas as curvas obtidas usando a equação aproximada (5.1). Nos diagramas apresentados, é omitida a parte elástica das curvas, sendo de interesse apenas os trechos com deformações plásticas. O ponto zero no eixo vertical é correspondente a deformação de plastificação e a respectiva tensão de plastificação.

Tabela 5.3: Coeficientes de aproximação das curvas tensão-deformação do EC3 para aço carbono.

Temperatura ($^{\circ}C$)	ν_T	δ_T
20 $^{\circ}C$	0,0	-
100 $^{\circ}C$	0,0	-
200 $^{\circ}C$	48,1	168,5
300 $^{\circ}C$	90,9	187,8
400 $^{\circ}C$	133,6	198,5
500 $^{\circ}C$	114,6	197,8
600 $^{\circ}C$	87,8	206,2
700 $^{\circ}C$	48,3	213,9
800 $^{\circ}C$	23,7	202,5
900 $^{\circ}C$	13,1	195,9
1000 $^{\circ}C$	8,9	196,1
1100 $^{\circ}C$	0,9	196,3
1120 $^{\circ}C$	-	-

Fonte: [Zhou, Cardoso e Bahai \(2019\)](#).

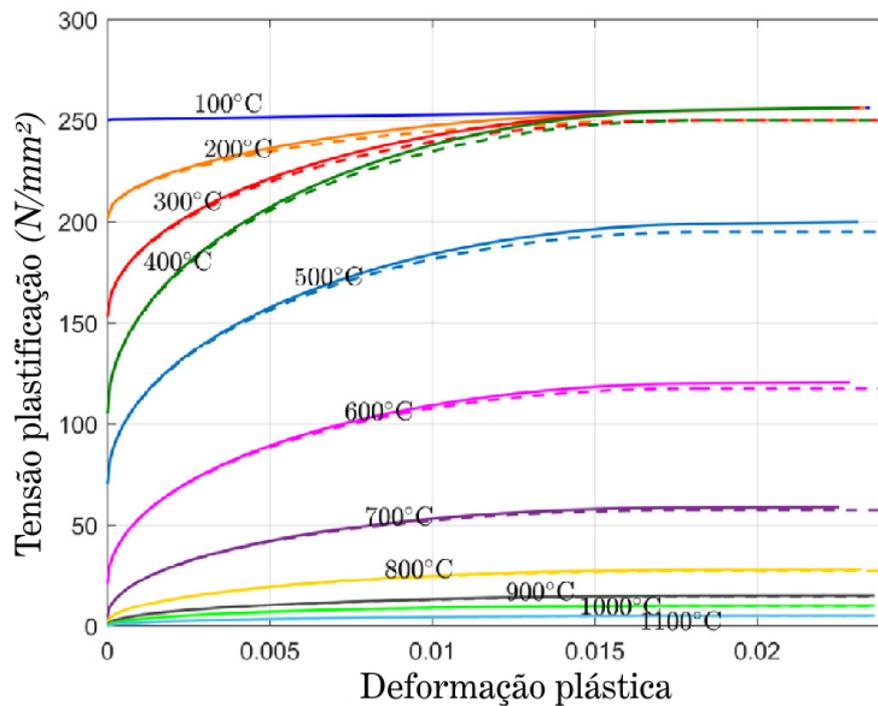


Figura 5.4: Curva tensão-deformação do EC3 e aproximação por métodos dos mínimos quadrados.

Fonte: Zhou, Cardoso e Bahai (2019)

5.1.2 Expansão térmica

Expansão é a tendência de um material alterar seu volume enquanto a temperatura aumenta. Isso faz com que os membros obtenham aumentos de volume e comprimento. Enquanto a material é aquecido, suas partículas começam a se mover cada vez mais rapidamente e aumentam o volume.

O quanto determinado material alonga em determinada temperatura é definido pelo coeficiente de dilatação térmica $\alpha(T)^{sec}$. Ele mede a alteração no comprimento por grau, obtido pela divisão do alongamento relativo $\Delta L/L$ pelo aumento da temperatura ΔT . Nesse trabalho é empregado o coeficiente linear de dilatação, dado pela equação

$$\alpha_L^{sec}(T) = \frac{1}{(T - T_{ref})} \cdot \frac{\Delta l(T)}{l} \quad (5.2)$$

onde T é a temperatura do aço, T_{ref} é temperatura de referência (20°C), L comprimento do elemento na temperatura de referência e $\Delta L(T)$ alongamento térmica na temperatura T .

O alongamento relativo para o aço depende da temperatura e pode ser obtido pelas equações propostas no EN 1993-1-2 (2005), descritas abaixo e representadas graficamente na Figura 5.5.

– para $20^{\circ}\text{C} \leq T < 750^{\circ}\text{C}$

$$\Delta L/L = 1,2 \times 10^{-5}T + 0,4 \times 10^{-8}T^2 - 2,416 \times 10^{-4} \quad (5.3)$$

– para $750^{\circ}\text{C} \leq T \leq 860^{\circ}\text{C}$

$$\Delta L/L = 1,1 \times 10^{-2} \quad (5.4)$$

– para $860^{\circ}\text{C} < T \leq 1200^{\circ}\text{C}$

$$\Delta L/L = 2 \times 10^{-5}T - 6,2 \times 10^{-3} \quad (5.5)$$

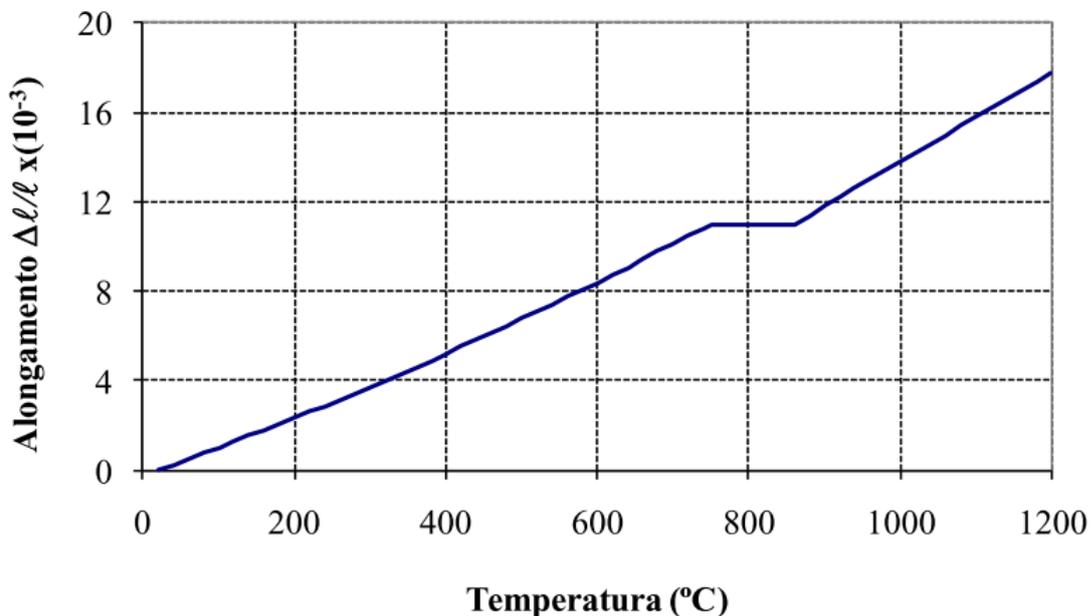


Figura 5.5: Alongamento relativo $\Delta L/L$ para o aço em função da temperatura.

Fonte: EN 1993-1-2 (2005).

Determinado o coeficiente linear de dilatação térmica com a equação 5.2, considerando isotermita em um elemento barra, a deformação térmica ε_{th} pode ser determinada por meio da expressão dada por

$$\varepsilon_{th} = (T - T_{ref}) \alpha(T) L^T \quad (5.6)$$

De acordo com Rigobello (2011), os alongamentos relativos, como aqueles apresentados por meio da curva da Figura 5.5, são deformações de engenharia ε_{eng} e correspondem diretamente à deformação térmica ε_{th} em uma dada temperatura. Como descrito na seção 3.1.6, neste trabalho a medida de deformação adotada é a deformação de Green-Lagrange, pois é uma medida de deformação Lagrangiana e apropriada para grandes deslocamentos. Portanto, as deformações térmicas devem ser expressas em relação a deformação de Green.

Diante disso, é estabelecida uma relação entre as deformações de engenharia ε_{eng} com as deformações de Green E , expressa como

$$E = \varepsilon_{eng} + \frac{\varepsilon_{eng}^2}{2} \quad (5.7)$$

Com base na equação (5.7), a expressão (5.2) para determinar o coeficiente de dilatação térmica do material $\varepsilon_G(T)$, a ser utilizado para determinar as deformações térmicas, pode ser reescrita em relação as deformações de Green, como

$$\alpha_E(T) = \alpha^{sec}(T) + \frac{\alpha^{sec}(T)^2 (T - T_{ref})}{2} \quad (5.8)$$

Portanto, a deformação térmica é calculada por

$$E_{th} = (T - T_{ref}) \alpha_E(T) L^T \quad (5.9)$$

A conexão entre o problema mecânico e térmico se dá basicamente pelo papel que as deformações térmicas desempenham na obtenção das deformações totais. Assim, o próximo tópico é discutido de que forma são consideradas as deformações térmicas neste trabalho.

5.2 Considerações a respeito das deformações térmicas

A resistência ao fogo de qualquer estrutura também está bastante relacionada ao grau de hiperstaticidade da estrutura e se for estaticamente determinada ou não estaticamente, uma vez que a expansão térmica e o calor podem criar forças axiais diferentes ou ajudar a criar rótulas plásticas e redistribuir as resistências da estrutura.

Em materiais isotrópicos, a variação da temperatura causa expansão térmica uniforme em todas as direções. De acordo com [Zhou, Cardoso e Bahai \(2019\)](#), é um fato comprovado experimentalmente que como resultado do aumento ou diminuição da temperatura, um sólido material livre de tensões externas, irá sofrer alongamentos relativos, mas sem nenhuma deformação angular. As deformações induzidas pelas variações térmicas podem ser impostas às deformações mecânicas (resultantes de tensão) desde que não ocorra variação na temperatura como consequência da deformação do material. Portanto, segundo [Usmani et al. \(2001\)](#), a relação fundamental que governa o comportamento de estruturas submetidas a efeitos térmicos estabelece que a deformação total do material consiste em uma parte mecânica e outra parte térmica, a qual pode ser expressa por

$$E_{total} = E_m + E_{th} \quad (5.10)$$

Tal decomposição da deformação é chamada do tipo aditiva, sendo uma simplificação

que reduz consideravelmente os cálculos quando comparada ao modelo multiplicativo. Quando a análise se limita a hipótese de pequenas deformações, a decomposição aditiva é aceitável, no entanto, para grandes deformações deve ser utilizada a decomposição multiplicativa. Maior profundidade neste assunto pode ser encontrado em [Pascon \(2012\)](#).

As deformações totais (E_{total}) influenciam o estado de deformações da estrutura por meio das considerações cinemáticas ou de compatibilidade. Por outro lado, o estado de tensão (S) na estrutura, em regime elástico ou plástico, depende somente das deformações mecânicas. Isso significa que, se um material não estiver submetido a restrições no contorno e nem a carregamentos externos, as deformações térmicas não irão contribuir diretamente para deformações elásticas ou plásticas, estando livres para se desenvolverem de maneira irrestrita, resultando em expansão axial. Nesse caso, não há deformação mecânica e por consequência não há mudança no estado de tensão. Por exemplo na Figura 5.6, a viga é aquecida uniformemente por ΔT , e, como uma das extremidades é livre (apoiada em rolete), a deformação térmica toma forma de expansão no comprimento da viga.

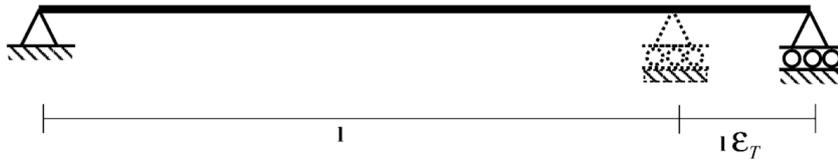


Figura 5.6: Aquecimento uniforme de uma barra simplesmente apoiada.

Fonte: [Usmani et al. \(2001\)](#).

Nesse caso, as deformações e tensões são escritas como

$$\begin{aligned}\Delta E_{total} &= \Delta E_{th}, \\ \Delta E_m &= 0 \Rightarrow 0, \\ E_{total} &= E_{th}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Em contrapartida, ainda que não haja carregamento externo mas existam restrições no contorno que impeçam quaisquer expansões térmicas, as deformações totais permanecem nulas. Nesse caso, são desenvolvidas deformações mecânicas que resultam subsequentemente em mudanças no estado de tensão. Se na viga da Figura 5.6, a extremidade apoiada for substituída por uma restrição axial e, novamente aquecida uniformemente por ΔT , é evidente que a deformação total será zero. Isso é porque a expansão térmica será cancelada pela contração de igual intensidade causada pela força P geradas pelas restrições. Membros cujas extremidades estão restritas contra translação produzem deformações mecânicas contrárias às expansões térmicas e, portanto, geram consideráveis tensões normais de compressão.



Figura 5.7: Aquecimento uniforme de uma viga restringida axialmente.

Fonte: [Usmani et al. \(2001\)](#).

Nesse caso, as deformações e tensões são escritas como

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{total} &= 0 \\
 \Delta E &= \Delta E_m + \Delta E_{th} \Rightarrow \Delta E_m + \Delta E_{th} = 0 \\
 \Rightarrow \Delta E_m &= -\Delta E_{th} \\
 \Delta S &\neq 0 \\
 E_m &= -E_{th}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Nessa situação, se a temperatura é permitida crescer indefinidamente, uma viga pode ter duas respostas básicas diferentes, dependendo de seu índice de esbeltez:

1. Se a viga for curta, a tensão axial irá aumentar até atingir a tensão de plastificação (S_y) e se o material tiver a relação tensão-deformação elasto-plástica, continuará a plastificar sem aumentar a tensão, mas irá acumular deformação plástica.
2. Se a viga for esbelta, então irá flambar quando o material atingir a tensão de plastificação e a expansão térmica continuará a se acomodar em forma de deflexão (δ) no meio do vão da viga, como mostra a Figura 5.8.

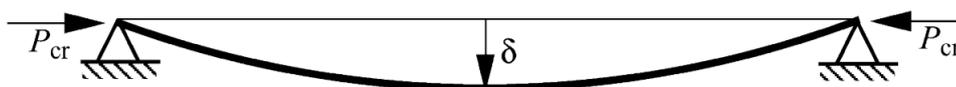


Figura 5.8: Flambagem de uma viga com aquecimento uniforme de ΔT .

Fonte: [Usmani et al. \(2001\)](#)

Os casos de plastificação e flambagem citados representam os comportamentos fundamentais de vigas axialmente restringidas sujeitas a expansão térmica e podem ser utilizados na análise estrutural como critérios de falha do elemento, situação em que o material perdeu a capacidade de suportar carregamentos. Cada efeito pode ocorrer por si só ou em conjunto em comportamentos mais complexos de plastificação e flambagem simultâneos.

As deformações térmicas em uma estrutura dependem, além das condições de contorno iniciais, das características do incêndio. Os denominados incêndios localizados aquecem alguns elementos da estrutura, tendendo a expandi-los enquanto o restante da

estrutura permanece rígida, restringindo as deformações térmicas e produzindo tensões que se somam às tensões geradas pelos carregamentos externos e peso próprio. Por exemplo, na Figura 5.9 ocorre um incêndio localizado, onde os efeitos do fogo atua em apenas uma coluna devido à compartimentação ou a natureza localizada do incêndio. Em consequência da restrição da expansão térmica provocada pelo restante da estrutura, a força axial na coluna irá aumentar com o aumento da temperatura. A taxa de crescimento da força axial irá depender da rigidez dos membros vizinhos da coluna (FRANSSEN, 2000).

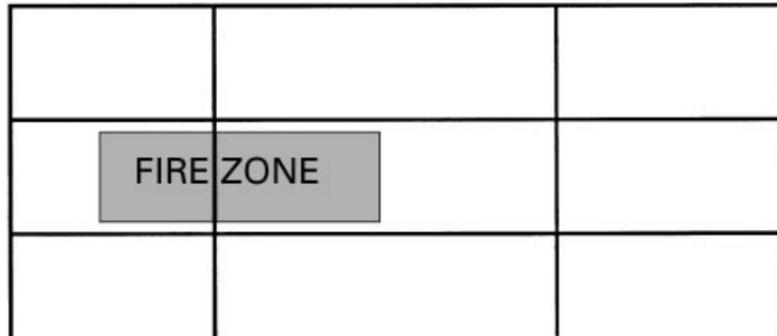


Figura 5.9: Incêndio localizado.

Fonte: Franssen (2000).

Alguns pesquisadores analisaram a situação numericamente e propuseram equações simples para estimar o aumento da força axial induzida pelas restrições axiais provocadas pelos elementos vizinhos (WANG; MOORE, 1994). Franssen (2000) propôs a seguinte equação,

$$\Delta N = \frac{R}{K_c/K_{co} + R} K_c (\varepsilon_{th} - \Delta \varepsilon_m) L_c, \quad (5.13)$$

onde

$$R = \frac{K_s}{K_{co}}, \quad (5.14)$$

ΔN é o acréscimo de força axial na coluna, K_c é rigidez da coluna na temperatura atual, K_{co} é rigidez da coluna em temperatura ambiente, K_s é a rigidez do restante da estrutura e L_c é o comprimento da coluna. A dificuldade consiste em determinar um valor representativo de K_s , que implica na resolução iterativa de sistemas de equações com muitas variáveis.

Se no entanto, toda a estrutura for aquecida simultaneamente em uma igual taxa, todos os membros irão expandir livremente de modo igual sem gerar tensões térmicas (FRANSSEN, 2000). Na Figura 5.10, todo um pavimento está sujeito a uma mesma variação térmica e as colunas destacadas irão expandir em igual taxa, evitando forças térmicas. Dessa forma, a falha da estrutura irá ocorrer somente quando a temperatura

umentar de tal forma que a degradação do material não permita que as colunas suportem a carga estrutural inicial.

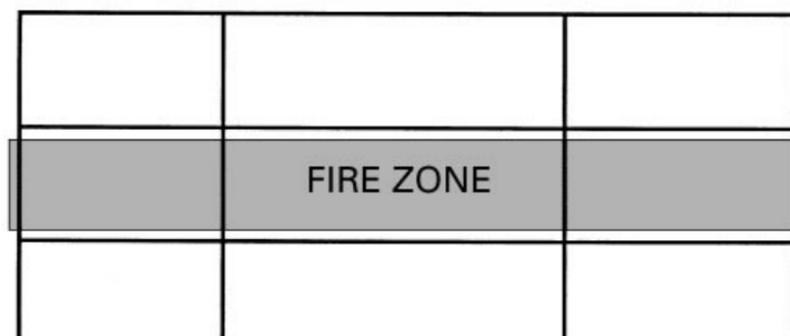


Figura 5.10: Colunas sujeitas a mesma temperatura.

Fonte: [Franssen \(2000\)](#)

É evidente que incêndios localizados levam mais rapidamente membros aquecidos a plastificação e/ou flambagem do que incêndios generalizados, devido ao maior grau de restrições. A falha não ocorre necessariamente quando a força axial na coluna atinge seu valor máximo, mas, na maioria das vezes, quando a força começa a diminuir devido ao fato de que a perda de rigidez da coluna se torna predominante em comparação com o alongamento térmico.

De acordo com [Franssen \(2000\)](#), a respeito de colunas e podendo ser estendido a outros elementos estruturais, a falha de um elemento individual não causa necessariamente a falha da estrutura. Devido a redistribuição dos esforços, a parte do carregamento que a coluna não pode mais suportar depois da falha, passa a carregar os elementos e a estrutura se acomoda em outra posição de equilíbrio. Nesse momento, a matriz de rigidez da estrutura passa de ser positiva, o que torna impossível um programa numérico continuar a análise além da falha local sem um método de continuação, como o método do comprimento de arco.

O mesmo autor analisou analiticamente uma estrutura em situação de incêndio localizado através de um modelo simplificado, mostrado na Figura 5.11, utilizando a equação 5.13. Nesse sistema, a mola representa a rigidez do restante da estrutura K_s , alterada a cada simulação, fazendo a rigidez relativa R variar de 0 (sem restrição) a infinito (totalmente restrito). O modelo material adotado foi o do EC3.

A barra está sujeita a uma carga axial externa inicial de 50 kN, que não varia durante o ensaio, dessa forma, a evolução da força axial na barra será influenciada apenas pelas restrições. A figura 5.12 mostra, para seis diferentes graus de rigidez, a evolução da força axial em função da temperatura, considerada uniforme na barra.

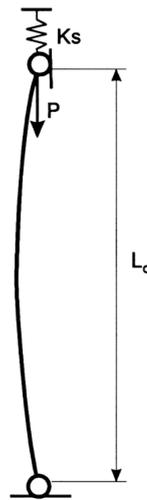


Figura 5.11: Modelo simplificado de uma coluna com restrições axiais.

Fonte: Franssen (2000).

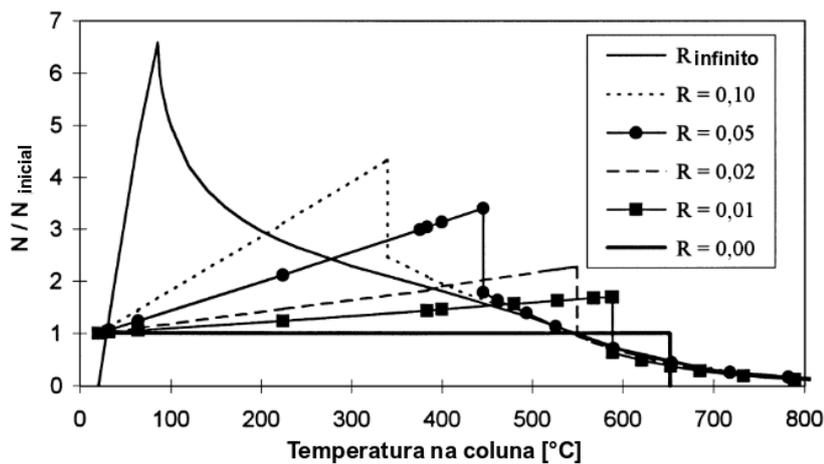


Figura 5.12: Evolução das forças axiais em análise de colunas com temperatura crescente.

Fonte: Franssen (2000).

Na primeira simulação nenhuma restrição foi considerada ($R = 0$). A força axial permanece constante e a coluna falha por plastificação em uma temperatura de aproximadamente 650°C . Nas outras simulações, em que as restrições são consideradas, a força axial cresce progressivamente com a elevação da temperatura, pois, o aumento da temperatura implica em maior tensão interna na coluna devido a tendência de expansão do material. A certa temperatura ocorre flambagem da coluna e uma parte da carga que ela suportava será suportada pela mola.

Se a coluna foi projetada para suportar 50 kN, o restante da estrutura não estará em perigo se, mesmo após a flambagem, a coluna puder suportar pelo menos 50 kN. Como pode ser observado na figura, após flambagem do elemento com restrição infinita, a temperatura pode continuar aumentando muito até que a força de suporte caia para valor

inferior ao projetado. Ou seja, a coluna poderá ser solicitada mais até que ocorra a falha.

Da discussão a cima fica evidente que o efeito das restrições nas extremidades é um fator crucial na resposta de elementos sujeitos a carregamentos térmicos. Em resumo, as deformações térmicas se manifestarão como deslocamentos se não forem restringidas ou como tensões se forem contidas por deformações mecânicas geradas por forças restritivas.

5.3 Aplicações

Nesta seção serão aplicados os conceitos sobre efeitos de temperatura apresentados neste capítulo, utilizando o MEFP e o método incremental-iterativo do comprimento de arco. Serão realizadas apenas análise elásticas com a finalidade de demonstrar a resposta estrutural devido a degradação do material. Análises inelásticas serão realizadas na próxima seção.

5.3.1 Treliça de Von Misses

Para aplicar a formulação apresentada nesta seção, foi analisada a treliça de Von Misses, apresentada no item 4.5.0.1. A distribuição de temperaturas é considerada uniforme em toda estrutura e não há variação de temperatura dentro de uma análise. O módulo de elasticidade se degrada em função da temperatura, conforme modelo do EC3. Inicialmente, é considerado apenas regime elástico.

Os dois elementos que compõem a estrutura possuem igual área e igual comprimento com as seguintes propriedades: $K = 18000 \text{ kN/cm}^2$, $A = 10\text{cm}^2$, e $L^0 = 50\text{cm}$. A treliça mostrada na Figura (4.8) foi analisada para dois ângulos de inclinação, $\theta = 30^\circ$ e $\theta = 5^\circ$.

As curvas de carga-deslocamento calculadas para a treliça com $\theta = 30^\circ$ e $\theta = 5^\circ$, sujeita à várias temperaturas (constantes) foram plotadas nas Figuras 5.13 e 5.14 e 5.15, respectivamente. Os dados obtidos foram comparados com os dados analíticos de Yang, Lin e Leu (2008) e com os dados obtidos no software ABAQUS também disponíveis no mesmo autor.

Para o ângulo de inclinação de 30° é possível notar que os resultados são idênticos ao modelo analítico. Fica evidente pela figura, a diminuição da capacidade de carga com a elevação da temperatura.

A deformação térmica é negativa para extensão, mas o deslocamento inicial mostrado nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15 é negativo. Isso ocorre por que, nas figuras deslocamento para baixo é positivo, portanto, na etapa térmica inicial, as barras expandem e elevam o nó do topo da treliça. É possível notar que para treliça com ângulo de inclinação $\theta = 5^\circ$ (Figura 5.14) o deslocamento inicial negativo é maior do que o deslocamento da treliça com $\theta = 30^\circ$. Isso ocorre por a treliça ser muito inclinada, a deformação térmica por ser muito maior do que a deformação mecânica.

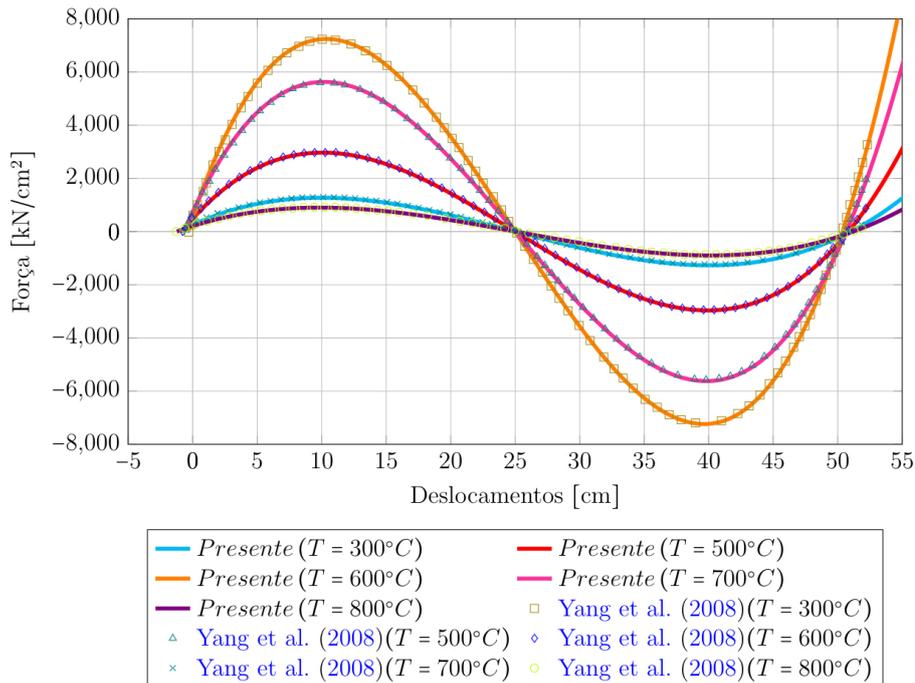


Figura 5.13: Curvas carga-deslocamento vertical para treliça elástica sujeita à várias temperaturas constantes ($\gamma = 30^{\circ}$).

Fonte: Autor.

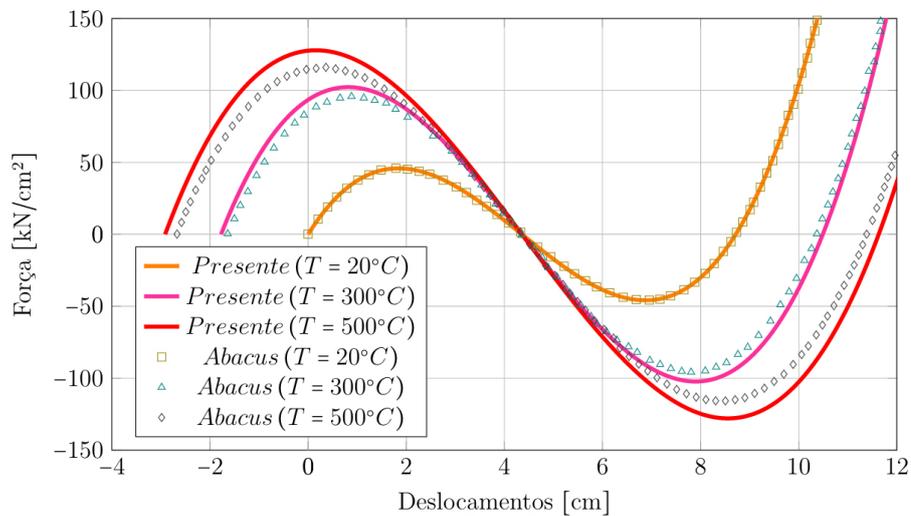


Figura 5.14: Curvas carga-deslocamento vertical para treliça de Von Mises elástica para várias temperaturas ($\gamma = 5^{\circ}$).

Fonte: Autor.

A partir das Figuras 5.14 e 5.15 é possível observar que a carga crítica ou capacidade máxima de carregamento da treliça não ocorrem à temperatura ambiente. Primeiro aumenta com a temperatura até atingir cerca de $500^{\circ}C$. Em seguida, diminui com o aumento da temperatura.

No entanto, é possível perceber uma diferença entre as curvas obtidas no presente trabalho e as curvas obtidos pela software ABAQUS. Segundo Yang et al. (2008)

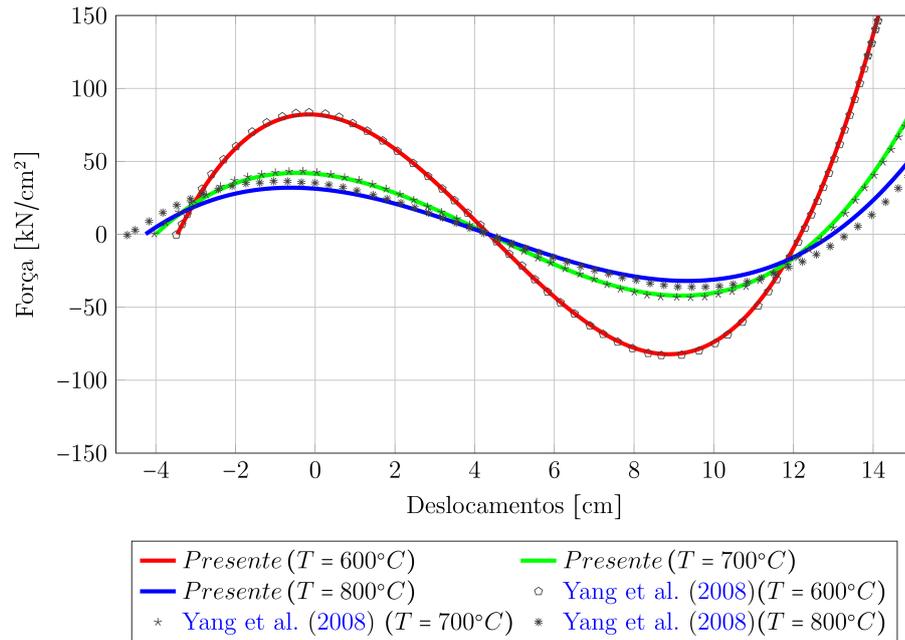


Figura 5.15: Curvas carga-deslocamento para treliça de Von Mises elástica para temperaturas constantes ($\gamma = 5^{\circ}$).

Fonte: Autor.

essa diferença é devido ao ABAQUS adotar a deformação logarítmica como medida de deformação.

5.3.2 Treliça espacial hexagonal

Considerando a treliça espacial de 24 barras estudada na subseção 4.5.0.2 e mostrada novamente na Figura 5.16. À todos os membros é atribuído o mesmo material e seção transversal, ou seja, $K = 18000 \text{ kN/cm}^2$, $A = 0.75 \text{ cm}^2$, e sujeitas à mesma temperatura constante. Apenas análise elástica é realizada nesse exemplo.

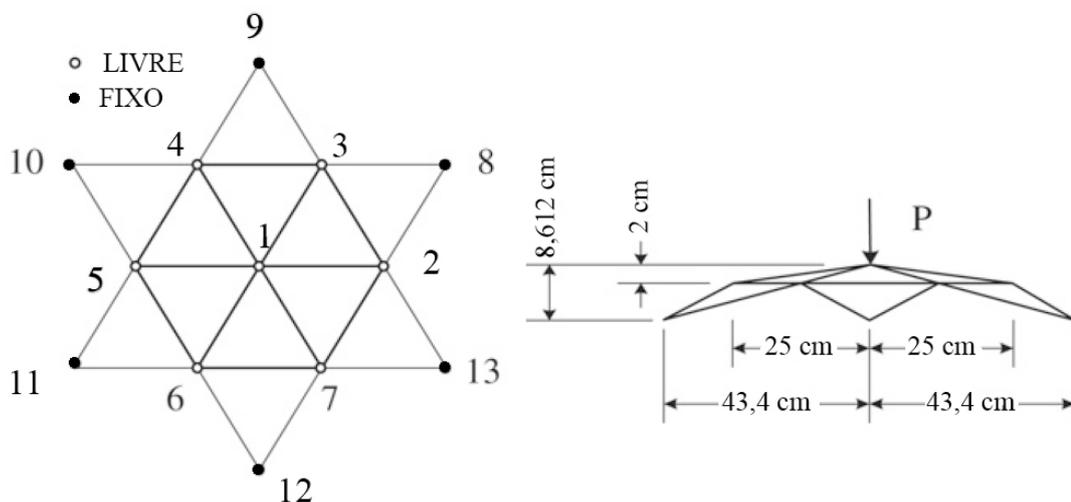


Figura 5.16: Treliça espacial hexagonal.

Fonte: Autor.

As curvas carregamento-deslocamento obtidos para a treliça hexagonal sujeita à temperaturas de 20, 300, 500, 700 e 800 °C estão plotadas na Figura 5.17. Nessa figura é possível observar a ocorrência de deslocamentos negativos no topo da estrutura. Isso é devido ao pré aquecimento da estrutura antes da análise mecânica, expandindo as barras e fazendo o ponto do topo deslocar para cima. O carregamento crítico diminui de 4,2kN para 0,6kN quando a temperatura aumenta de 20 para 700°C.

Na Figura 5.17 é restrito à um pequeno intervalo inicial da análise, enquanto na Figura 5.18 é mostrado o caminho de equilíbrio completo da estrutura, o qual só pode ser obtido pelo método de comprimento de arco. São mostradas as curvas para temperaturas de 20, 300, 500 e 700°C. Assim como no exemplo anterior, é possível observar que a carga crítica ou capacidade máxima de carregamento da treliça não ocorrem à temperatura ambiente. Primeiro aumenta com a temperatura até atingir cerca de 500°C. Em seguida, diminui com o aumento da temperatura.

É possível perceber que ao aumentar a temperatura a curva obtida neste trabalho aumentava a diferença entre a curva analítica. A diferença entre as curvas obtidas no presente trabalho e aquelas determinadas por Yang et al. (2008), podem ser causadas pelo fato Yang et al. (2008) usar para o cálculo do coeficiente de expansão térmica a equação proposta pelo AISC (1994) em vez do EN 1993-1-2 (2005).

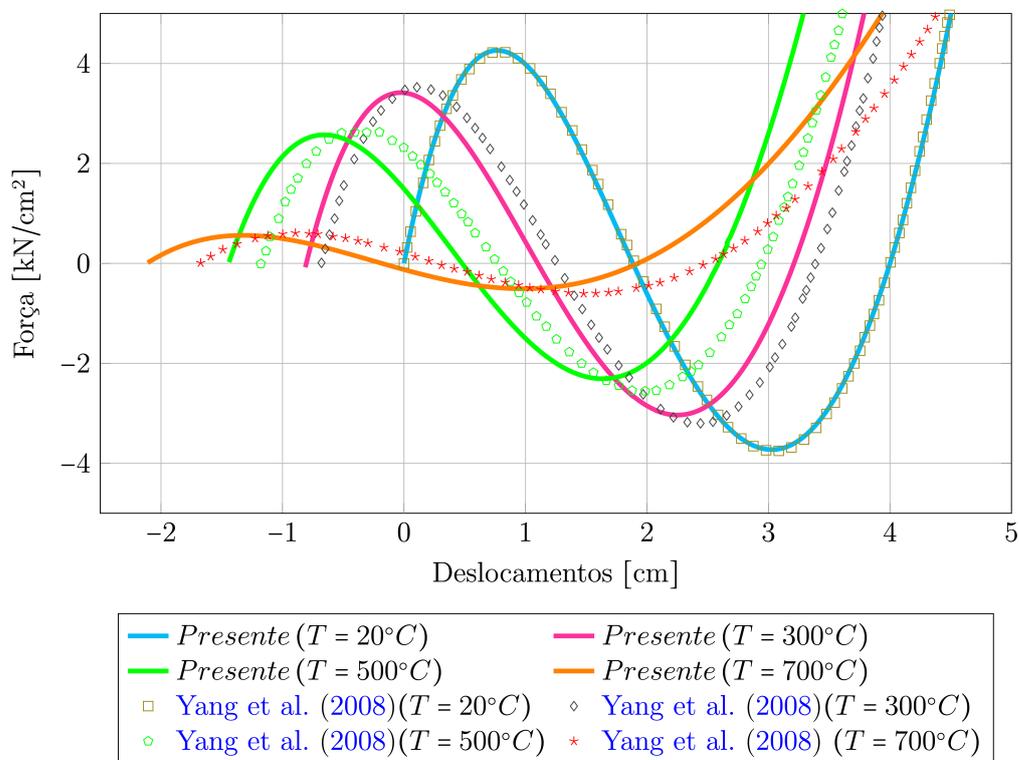


Figura 5.17: Curvas carga-deslocamento para treliça espacial Star Dome, comparadas com os resultados analíticos de Yang et al. (2008).

Fonte: Autor.

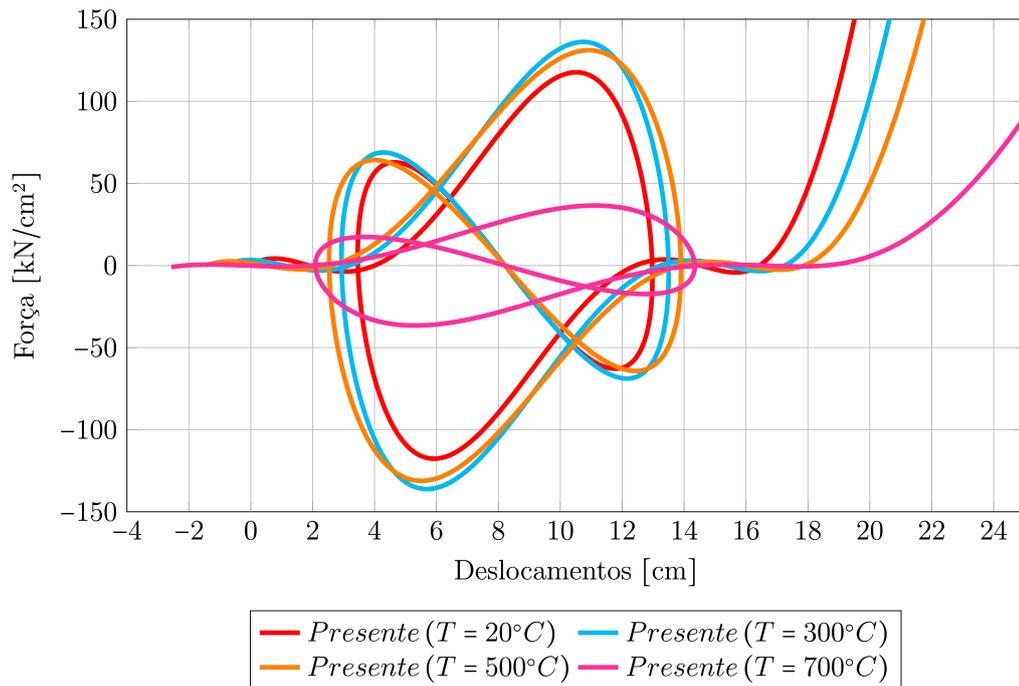


Figura 5.18: Curvas completas carga-deslocamento para treliça espacial Star Dome para temperaturas constantes.

Fonte: Autor.

5.3.3 Fechamento

Como mencionado anteriormente, há falta de investigações detalhadas do comportamento de membros de treliça sujeitas a mudança de temperatura. Na falta de tais trabalhos experimentais específicos, serão utilizados modelos fenomenológicos, desenvolvidos para temperatura ambiente para descrever comportamentos de flambagem, pós-flambagem, plastificação, degradação do material devido a deformação plástica. Serão feitas algumas adaptações nestes modelos para possam descrever o comportamento de elementos de aço sujeitos à elevadas temperaturas.

Os modelos apresentaram apenas o formato da curva tensão-desformação que um elemento de treliça pode desenvolver, sem compromisso com precisão, pois, modelos fenomenológicos devem ser calibrados especificamente para as configurações do elemento estrutural.

Capítulo 6

Modelo Fenomenológico

A partir da observação dos resultados das análises não-lineares realizadas nos capítulos anteriores, é possível notar que os elementos de barras são sujeitos à várias inversões de carregamento, tanto durante compressão e como em tração. Tais carregamentos podem levar as barras de aço esbeltas carregadas axialmente à flambagem, quando comprimidas, ou à plastificação, quando tracionadas.

Os carregamentos não-lineares apresentados nas seções anteriores, se assemelham, de certa forma, com carregamentos cíclicos, para os quais os elementos de aço podem ter como resposta um comportamento histerético. Modelos histeréticos realistas devem contemplar efeitos complexos de plastificação, flambagem e comportamento pós-flambagem inelástica, degradação da resistência devido ao acúmulo de deformações plásticas.

Com a finalidade de representar de forma realista o comportamento de cada barra de treliça considerando os possíveis comportamentos à tração e compressão, é adotado neste trabalho um modelo fenomenológico histerético como base. O modelo é alterado de forma a considerar efeitos de altas temperaturas no material, através da modificação da resistência e rigidez do material para cada temperatura conforme os coeficientes do [EN 1993-1-2 \(2005\)](#). De acordo com [Wang \(2002\)](#), o comportamento global de um elemento sem qualquer restrição à expansão térmica é idêntico ao ao comportamento à temperatura ambiente, a única consideração é que deve ser usada a resistência e rigidez reduzidas pela temperatura.

Modelos fenomenológicos são metodologias simples e eficientes em termos computacionais. Nestes, o comportamento histerético de um elemento de treliça imita a resposta observada experimentalmente. Como esse modelo fornece equações simples e explícitas para descrever o comportamento individual de cada elemento é fácil de implementar em análises estruturais. A limitação dessa abordagem é a necessidade de calibração do modelo em relação aos dados experimentais disponíveis e a capacidade preditiva limitada, uma vez que o comportamento histerético representa apenas o comportamento das amostras para as quais foi calibrado. No entanto, modelos fenomenológicos têm sido utilizados com

sucesso em vários estudos, como por exemplo [Li, Fahnestock e Li \(2013\)](#), [Thai e Kim \(2011\)](#) e [Zheng e Fan \(2019\)](#).

Neste trabalho, é empregado como base o modelo fenomenológico proposto por [Zheng e Fan \(2019\)](#) para temperatura ambiente. Esse modelo foi desenvolvido para contemplar o efeito Bauschinger, o comportamento inelástico de pós-flambagem e inclui fadiga de baixo ciclo através da teoria de dano cumulativo linear de Miner (Miner 1945) devido à fadiga. No entanto, no presente trabalho, não foi considerado o efeito da degradação da força de escoamento devido a fadiga e qualquer tipo de fratura, tais estudos poderão ser feitos em trabalhos futuros. A degradação da resistência ao escoamento é devida apenas ao efeito térmico.

Devido ao fato de ser difícil obter os dados específicos desejados a partir de resultados experimentais para calibrar o modelo fenomenológico, inicialmente, [Zheng e Fan \(2019\)](#) desenvolveu um modelo refinado em elementos finitos utilizando o software Abacus, para posterior exploração de todos os dados desejados. O modelo em FE tridimensional foi calibrado através de resultados de ensaios experimentais anteriores de elementos de barra de aço com seção circular vazada. Alguns dos trabalhos experimentais utilizadas foram [Fell \(2008\)](#) e [Chen e Hu \(2017\)](#). Nas análises foram variados os índices de esbeltez e o grau do aço. Na Figura 6.1 é apresentada a comparação dos resultados do modelo FE desenvolvido com dados experimentais para duas configurações de corpo de prova.

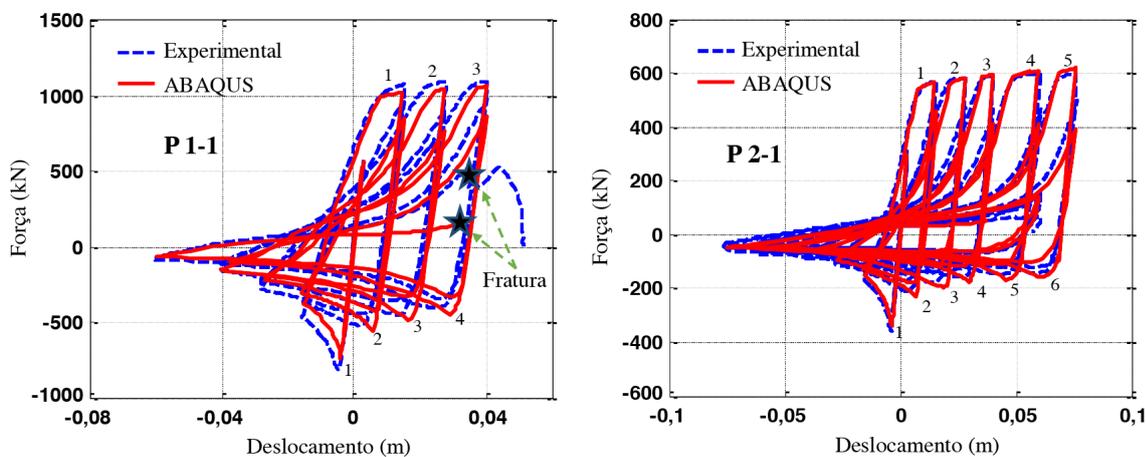


Figura 6.1: Comparação das curvas históricas obtidas pelo Abaqus e ensaios experimentais.

Fonte: [Zheng e Fan \(2019\)](#).

No modelo FE são utilizados elementos de casca quadrilátero de quatro nós (S4R) para considerar grandes deformações e grandes rotações. O modelo foi desenvolvido para considerar efeitos inelásticos e foi empregado um modelo material que combina encruamento isotrópico e cinemático na análise. No entanto, no presente trabalho, a parte do modelo que descreve a plastificação com encruamento por tração foi substituída pelas equações constitutivas do [EN 1993-1-2 \(2005\)](#) para elevadas temperaturas, as quais são reunidas

em uma simples equação proposta por [Zhou, Cardoso e Bahai \(2019\)](#) e apresentada na seção 5.1.1. Essa substituição tem a finalidade de incorporar ao modelos os efeitos da degradação do material devido à altas da temperatura.

Após calibrado o modelo FE, foram analisadas várias barras de aço de seção circular vazada, alterando diâmetro e espessura da parede da seção. O comprimento do elemento era fixo e a geometria da seção foi alterada de forma a incrementar o índice de esbeltez em um valor de 5 entre uma análise e outra. Foram ensaiados elementos em uma faixa de índice de esbeltez entre 50 e 150. Foram ensaiados elementos de aços de resistência ao escoamento na faixa de 200–500 MPa.

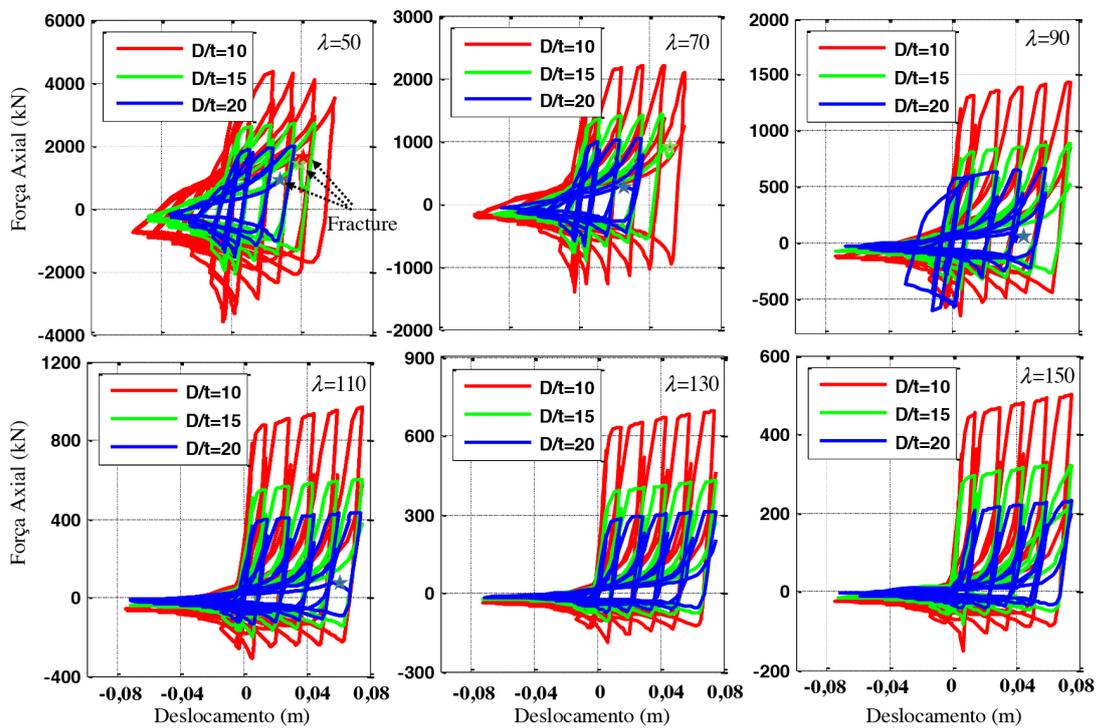


Figura 6.2: Loops Histeréticos variando o índice de esbeltez e relação D/t (D =diâmetro e t =espessura da parede).

Fonte: [Zheng e Fan \(2019\)](#).

Baseado nos dados numéricos obtidos e em resultados experimentais anteriores [Black, Wenger e Popov \(1980\)](#), [Zayas, Popov e Mahin \(1980\)](#), [Zheng e Fan \(2019\)](#) calibrou um novo modelo histerético fenomenológico para barras de aço com seção circular vazada (Figura 6.3) utilizando funções exponenciais e hiperbólicas para descrever a curva histerética. No modelo proposto, o comportamento cíclico não linear de uma barra pode ser dividido em seis estágios principais, conforme mostra a Figura 6.3(a): (1) comportamento de tração (TR1 e TR6); (2) comportamento de compressão (TR2 e TR3); (3) comportamento de descarregamento-recarregamento a partir da compressão (TR4 e TR5); (4) comportamento de descarga-recarga a partir de tração (TR7 e TR8); (5) regra de descarregamento no meio ciclo (TR9 e TR10) e (6) degradação da resistência à flambagem devido ao efeito

Bauschinger.

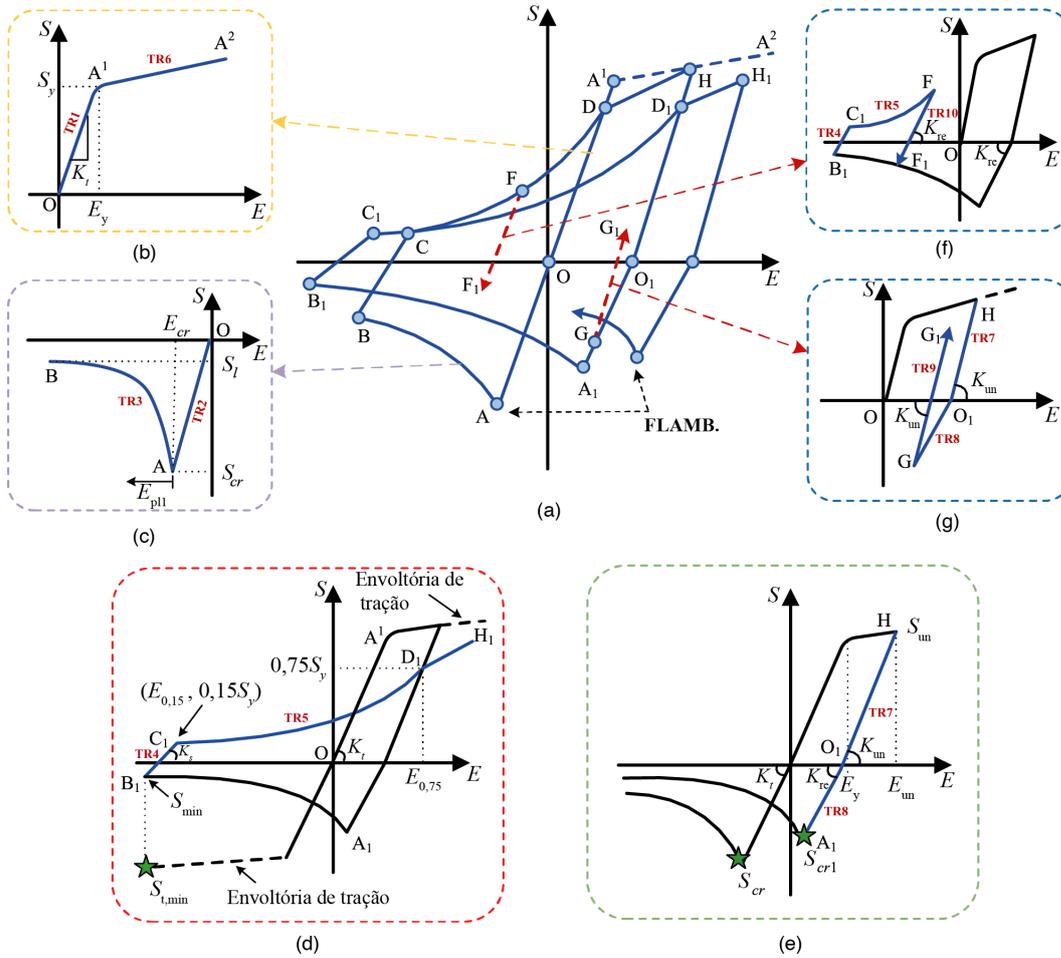


Figura 6.3: Modelo fenomenológico histerético utilizado: (a) dois ciclos do modelo; (b) tração; (c) compressão; (d) descarregamento-recarregamento a partir da compressão; (e) degradação devido ao efeito Bauschinger; (f) descarregamento no meio ciclo; (g) descarga-recarga a partir de tração.

Fonte: Adaptado de Zheng e Fan (2019).

A seguir são descritas as equações que descrevem o comportamento de cada trecho mostrado na Figura 6.3.

6.1 Comportamento à tração elástica (TR1)

O estágio de tração elástica (Figura 6.3 (b)) ocorre se o ciclo de carregamento inicial começar com tração. Uma barra tracionada estará no faixa elástica linear ao longo do segmento $O - A$ com inclinação K_t, T até atingir o ponto que indica fim do limite de proporcionalidade $A1$, onde a tensão axial é igual à tensão de limite de proporcionalidade $S_{p,T}$. A curva tensão-deformação neste estágio é expressa pela seguinte equação

$$S = K_{t,T}E; \quad E \leq E_p \tag{6.1}$$

6.1.1 Comportamento à tração inelástica (TR6)

Além do ponto A1, qualquer alongamento no segmento A1-A2 inclui deformações plásticas, e a inclinação inicial $K_{s,T}$ muda para $K_{p,T}$. Para valores de tensão acima da tensão limite de proporcionalidade, é iniciado o trecho 6, o qual descreve a plastificação. Este trecho é descrito pela equação proposta por Zhou, Cardoso e Bahai (2019) apresentada na seção 5.1.1, na qual a tensão na etapa atual é determinada por

$$S_T = S_{p,T} + \nu_T * (1 - \exp(-\delta_T \bar{E}_{pl})), \quad (6.2)$$

onde $S_{p,T}$ é tensão de limite de proporcionalidade referente à temperatura T , ν_T e δ_T são os coeficientes de aproximação, mostrados na Tabela 5.3. A deformação de plastificação \bar{E}_{pl} é igual a

$$\bar{E}_{pl} = E - E_p \quad (6.3)$$

onde E é a deformação atual e E_p é a deformação correspondente a tensão $S_{p,T}$.

6.1.2 Comportamento à compressão (TR2)

Ikeda, Mahin e Dermitzakis (1984) constatou a partir de seus estudos experimentais, que os efeitos dominantes no comportamento de flambagem e pós-flambagem de elementos de aço comprimidos é função do índice de esbeltez λ e da tensão de plastificação $S_{y,T}$.

Segundo Zhou, Cardoso e Bahai (2019), o comportamento à compressão de um membro de aço com índice de esbeltez inferior à 30 é semelhante ao comportamento à tração. Nesse caso, a falha não ocorre por flambagem, mas sim por plastificação do material, e o comportamento pode ser reduzido para um modelo bilinear. Por outro lado, membros com esbeltez maior do que 150 são geralmente usados em estruturas apenas como tirantes, e seu comportamento pode ser descrito simplesmente pela equação (6.2).

Elementos com índice de esbeltez entre 30 e 150 são usualmente projetados para suportar cargas de compressão. Nesse caso, flambagem inelástica pode ocorrer e causar comportamento denominado de pós-flambagem [Figura 6.3(c)]. Esse efeito é devido à *softening* do material, gerado principalmente pelo surgimento de rótulas plásticas no vão comprimido (BLACK; WENGER; POPOV, 1980). Dessa forma, neste trabalho o enfoque se limita a elementos com índice de esbeltez entre 30 e 150.

Caso a etapa de incremento inicial seja compressão, o segmento O-A na Figura 6.3 representa compressão elástica, sendo descrito pela equação

$$S = K_{t,T}E, \quad E \geq E_{cr} \quad (6.4)$$

onde $K_{t,T}$ é o módulo de elasticidade do material ajustado para temperatura T . A deformação E_{cr} é correspondente à tensão crítica de flambagem $S_{cr,T}$.

Para determinação do valor da tensão de flambagem, o [EN 1993-1-2 \(2005\)](#) fornece um método aproximado para determinação da tensão axial crítica de flambagem para elementos sujeitos à elevadas temperaturas. Pressupondo distribuição uniforme de temperatura no membro de aço. Essa formulação deriva dos trabalhos empíricos de [Franssen, Schleich e Cajot \(1995\)](#) e [Franssen et al. \(1996\)](#), nos quais foram ensaiadas 339 barras de aço com seção H, variando entre duas resistências ao escoamento, dois eixos de flambagem, seis temperaturas finais e 10 comprimentos diferentes. Segundo o EC3, a tensão axial a partir da qual um elemento de aço irá flambar, considerando temperatura uniforme T , é calculada por

$$S_{cr,T} = \frac{\chi k_{y,T} S_y}{\gamma_{M,fi}} \quad (6.5)$$

onde $k_{y,T}$ é o fator de redução da tensão de plastificação do aço a uma temperatura uniforme T , ver Tabela 5.1. χ é o fator de redução para flambagem flexional em situação de incêndio, determinado pela equação (6.38).

$$\chi = \frac{1}{\varphi_T + \sqrt{\varphi_T^2 - \bar{\lambda}_{m,T}^2}} \quad (6.6)$$

onde

$$\varphi_T = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha \lambda_{m,T} + \bar{\lambda}_{m,T}^2 \right] \quad (6.7)$$

sendo o fator de imperfeição α , determinado por

$$\alpha = 0,65 \sqrt{235/S_y} \quad (6.8)$$

A esbeltez não dimensional $\bar{\lambda}_{m,T}$ para temperatura T , é calculada por

$$\bar{\lambda}_{m,T} = \bar{\lambda} \sqrt{k_{y,T}/k_{K,T}} \quad (6.9)$$

em que

$\bar{\lambda}$ é a esbeltez não dimensional a temperatura ambiente, expressa por

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad (6.10)$$

onde λ é o índice de esbeltez do elemento. Segundo o [EN 1993-1-2 \(2005\)](#), o comprimento efetivo é calculado igual seria calculado para temperatura ambiente, exceto para estruturas contraventadas. Dessa forma, para elementos de treliça, o fator de comprimento efetivo é igual a $k = 1$. O parâmetro λ é dado por

$$\lambda = \frac{L_{ef}}{i} \quad (6.11)$$

onde i é o raio de giração da seção do elemento e, segundo o [Eurocode 3 Part 1.1 \(2005\)](#), λ_1 é determinado por

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{K}{S_y}} = 93,9\epsilon \quad (6.12)$$

com ϵ igual à

$$\epsilon = \sqrt{\frac{235}{S_y}}, \quad (f_y \text{ em N/mm}_2) \quad (6.13)$$

onde K é o módulo de elasticidade a temperatura ambiente e S_y é tensão de plastificação à temperatura ambiente.

Como nota, vale lembrar que nas equações anteriores, o valor da tensão de plastificação considerada é igual a tensão limite de proporcionalidade e, como consequência, é utilizado o coeficiente k_p em lugar de k_y , conforme considerações de [Zhou, Cardoso e Bahai \(2019\)](#).

6.1.3 Comportamento pós-flambagem (TR 3)

Baseado nos ensaios empíricos de membros de treliças de [Black, Wenger e Popov \(1980\)](#) à temperatura ambiente, [Hill, Blandford e Wang \(1989\)](#) propôs um modelo para descrever o comportamento de pós-flambagem de elementos de treliça (Figura 6.3(c)). O efeito de pós-flambagem é representado por uma função exponencial escrita como

$$S = S_l + (S_{cr} - S_l)e^{-(X_1 + X_2\sqrt{E_{pl1}})E_{pl1}}, \quad E \leq E_{cr}, \quad (6.14)$$

onde X_1 é o parâmetro que define a inclinação inicial da curva de pós-flambagem, X_2 é o parâmetro que define a taxa de alteração da tangente, S_l é a tensão limite inferior assintótica, $E_{pl1} = E - E_{cr}$ é a deformação medida a partir do início da curva de pós-flambagem, como mostrado na Figura 6.3(c). E_{cr} e S_{cr} são deformação crítica de flambagem e tensão crítica de flambagem, respectivamente. A tensão assintótica é igual à $S_l = 0,4S_{cr}$

Esta equação foi desenvolvida para elementos em temperatura ambiente, mas aqui neste trabalho será utilizada considerando os efeitos de degradação do material devido à altas temperaturas, utilizando a tensão de flambagem como a tensão $S_{cr,T}$, determinada pela equação (6.5).

$$S = S_l + (S_{cr,T} - S_l)e^{-(X_1 + X_2\sqrt{E_{pl1}})E_{pl1}}, \quad E \leq E_{cr}, \quad (6.15)$$

onde

$$E_{cr,T} = \frac{S_{cr,T}}{K_{s,T}} \quad (6.16)$$

Em [Hill, Blandford e Wang \(1989\)](#) pouca informação é dada a respeito dos coeficientes X_1 e X_2 , apenas é informado que são constantes. Nenhuma relação com o material, tipos de seções ou efeitos do índice de esbeltez é levado em conta para sua determinação.

Nas aplicações do mesmo trabalho são atribuídos estes constantes valores de $X_1 = 50$ e $X_2 = 100$. Já em [Thai e Kim \(2011\)](#), são utilizados valores de $X_1 = 400$ e $X_2 = 100$.

Com a finalidade de obter um modelo mais realista, em que o comportamento de pós-flambagem fosse função do índice de esbeltez, [Zheng e Fan \(2019\)](#) calibrou um modelo estrutural no software Abaqus a partir de ensaios experimentais de [Black, Wenger e Popov \(1980\)](#) e [Zayas, Popov e Mahin \(1980\)](#). Diversos elementos de aço comprimidos foram simulados, e por regressão dos resultados foram obtidas curvas para os parâmetros X_1 , X_2 e S_l em função de λ_m .

As Figuras 6.4(a – b) e 6.5 mostram os parâmetros otimizados em função de λ_m (pontos sólidos), bem como as curvas das análises de regressão.

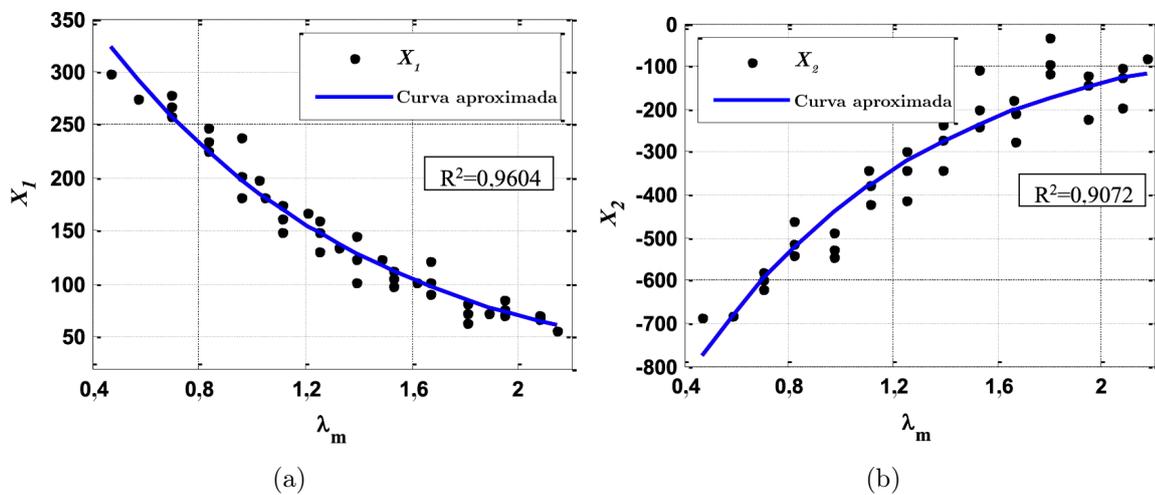


Figura 6.4: (a) Parâmetro de calibragem X_1 vs λ_m , (b) Parâmetro de calibragem X_2 vs λ_m .

Fonte: [Zheng e Fan \(2019\)](#).

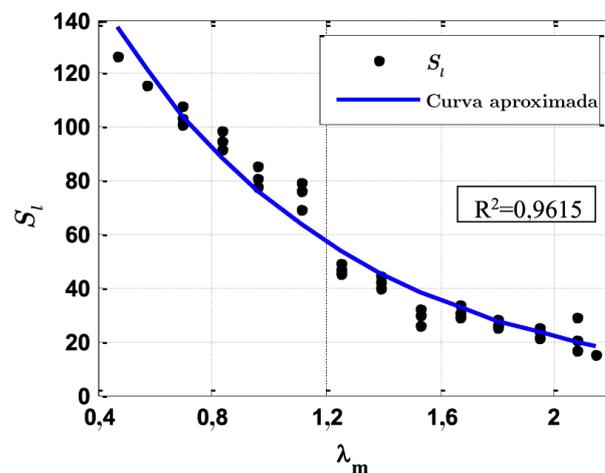


Figura 6.5: Parâmetro de calibragem S_l vs λ_m .

Fonte: [Zheng e Fan \(2019\)](#).

As equações das análises de regressão são definidas como

$$X_1(\lambda_m) = 518,027^{-1,001\lambda_m} \quad (6.17)$$

$$X_2(\lambda_m) = -1308,873^{-1,119\lambda_m} \quad (6.18)$$

$$S_l(\lambda_m) = 241,234^{-1,2004\lambda_m} \quad (6.19)$$

Para que os parâmetros de [Zheng e Fan \(2019\)](#) sejam função da temperatura, a variável λ_m pode ser substituída por $\lambda_{m,T}$, obtida por meio da equação (6.9). Na Figura 6.6(a) e (b) são plotados os valores de X_1 e X_2 em função da temperatura. Na Figura 6.7 é plotada a tensão assintótica S_l determinada pela equação (6.19), a tensão assintótica do modelo de [Hill, Blandford e Wang \(1989\)](#) e a tensão crítica de flambagem correspondente em função da temperatura para uma barra de aço genérica.

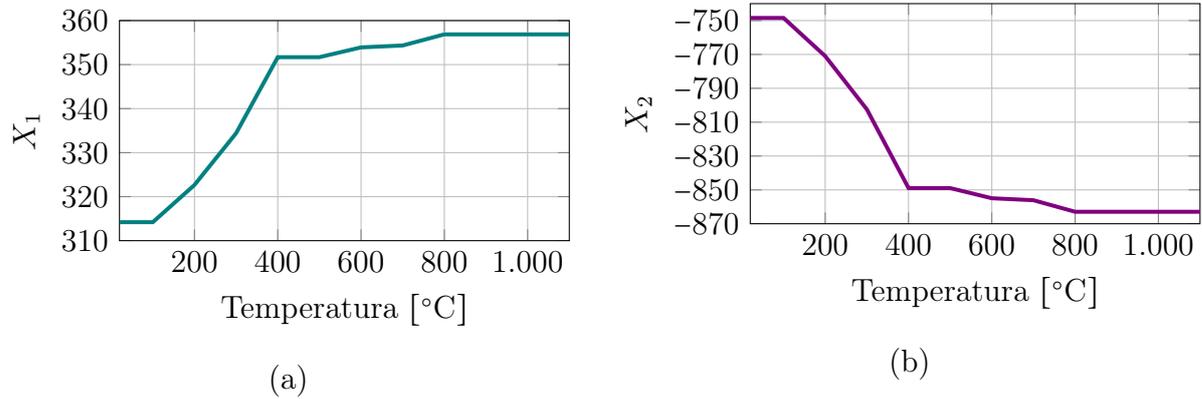


Figura 6.6: (a) Parâmetro X_1 em função da temperatura; (b) Parâmetro X_2 em função da temperatura.

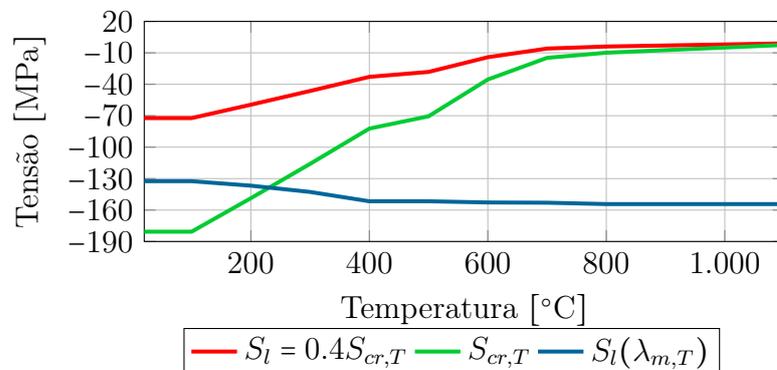


Figura 6.7: Tensão assintótica em função da temperatura.

Fonte: Autor.

Apesar do modelo de Zheng e Fan (2019) ser uma boa aproximação do comportamento real, a equação que determina a tensão assintótica não pode ser usada para temperaturas elevadas, pois, como pode ser observado na Figura 6.7, a partir de uma temperatura de aproximadamente 240°C a tensão assintótica passa a ter valor menor do que a tensão crítica, o que não pode acontecer. Portanto, ser utilizado nas aplicações deste capítulo $S_l = 0,4S_{cr,T}$.

A título de ilustração, na Figura 6.8 são mostrados diferentes curvas de pós-flambagem para os diferentes parâmetros abordados.

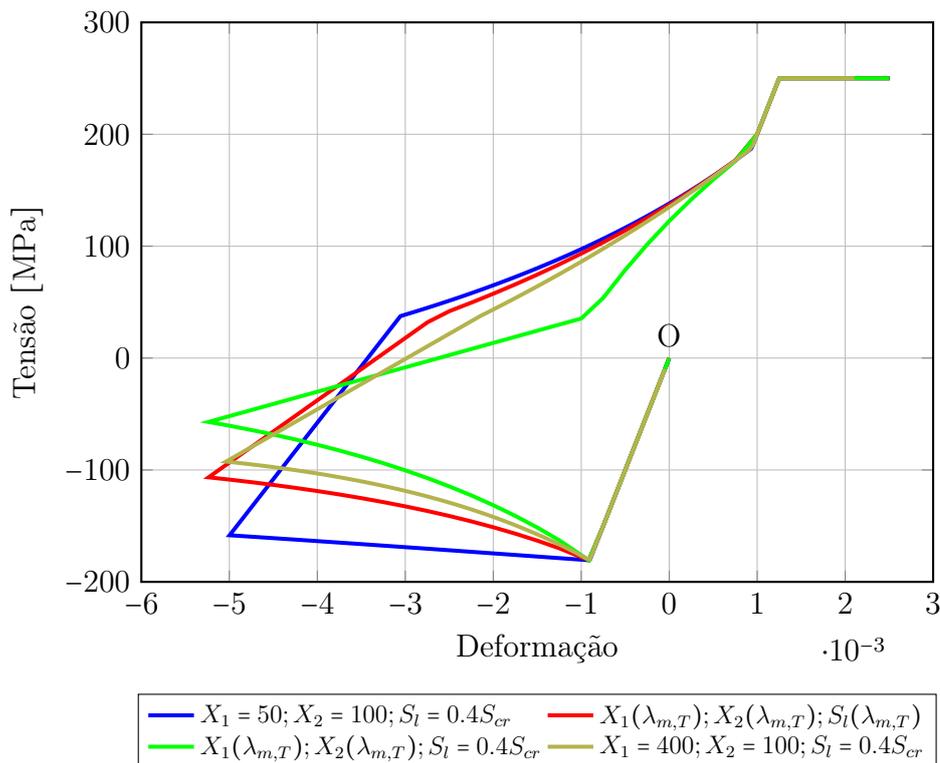


Figura 6.8: Comparação de curvas de pós-flambagem com diferentes parâmetros.

Fonte: Autor.

6.1.4 Comportamento de descarregamento-recarregamento partindo da compressão (TR4 e TR5)

Como mostrado na Figura 6.3, o segmento $B-C$ (TR4) representa descarregamento e carregamento após a ocorrência de flambagem. Essa etapa ocorre de forma elástica com inclinação K_t , menor do que a inclinação inicial K_s , sendo K_t função da deformação plástica acumulada. De acordo com Zheng e Fan (2019), esse efeito pode ser constatado em trabalhos experimentais e de simulação e é denominado de efeito *pinching*. Protá, Cicco e Cosenza (2009) observaram comportamento similar em ensaios de vergalhões de aço e, a partir destes, propôs uma expressão analítica para descrever este fenômeno. A

inclinação K_t é expressa por

$$\frac{K_t}{K_{s,T}} = \left(\left| \frac{S_{min}}{S_{t,min}} \right| \right)^{1,5}, \quad (6.20)$$

onde S_{min} é tensão no ponto B , e $S_{t,min}$ é a tensão obtida no trecho de tração plástica correspondente a deformação associada à tensão S_{min} , conforme a Figura 6.3(d). A tensão $S_{t,min}$ pode ser determinada pela equação (6.2), como

$$S_{t,min} = S_{p,T} + \nu_T(1 - e^{(-\delta_T E_t)}), \quad (6.21)$$

onde E_t é determinado por

$$E_t = |E_B| - E_p, \quad (6.22)$$

em que E_B é a deformação correspondente a S_{min} no ponto B e E_p é a deformação limite de proporcionalidade.

De acordo com vários autores, o trecho de recarregamento não-linear representado pelo segmento C-D (TR5), mostrado na Figura 6.3 (d), pode ser descrito por uma curva hiperbólica (THAI; KIM, 2011; KASHANI et al., 2015). Os diferentes trabalhos diferem em relação aos valores referentes ao início (ponto C) e fim (ponto D) da curva, pois este é um parâmetro a ser calibrado dependendo das configurações do elemento que se pretende representar.

O modelo proposto por Zheng e Fan (2019) para barras tubulares de aço, define a hipérbole iniciando em um par ordenado igual a $(E_{0,15}, 0, 15S_y)$, ou seja, o início se dá a partir da tensão igual a 15% da tensão de escoamento, e o fim da curva deve ocorrer em uma tensão igual à $(E_{0,75}, 0, 75S_{y,T})$.

O modelo proposto por Kashani et al. (2015) para vergalhões de aço, sugere valores de início e fim, respectivamente, iguais à $(E_{0,30}, 0, 30S_{y,T})$ e $(E_{0,80}, 0, 80S_{y,T})$. Já no modelo tensão-deformação de Thai e Kim (2011), proposto para análises dinâmicas de treliças espaciais, não existe o segmento $B - C$ (TR4) apresentado anteriormente, ou seja, assim que ocorre reversão nos esforços durante etapa de pós-flambagem (TR3), é iniciada a curva hiperbólica (TR5). Para esse modelo o início da etapa TR5 se dá em (E_B, S_{min}) e fim do trecho ocorre em $(E_{0,50}, 0, 50S_{y,T})$.

Os três modelos apresentados são elaborados sem considerar efeitos térmicos. Dessa forma, diante da falta de modelos ou resultados experimentais que descrevam o comportamento de elementos longitudinais de aço sujeitos a tais efeitos de carregamentos simultaneamente a efeitos térmicos, os parâmetros que definem a curva TR5 podem ser variáveis no algoritmo, sendo de interesse apenas manter a forma da curva. Posteriores ensaios em laboratório poderão determinar tais parâmetros com maior precisão e o modelo poderá ser ajustado.

A hipérbole (TR5) é descrita pela seguinte equação

$$S_h = \frac{E_h}{a_1 + b_1 E_h}, \quad (6.23)$$

onde S_h e E_h são a tensão e deformação medidas a partir do ponto de interseção D, e a_1 e b_1 são constantes de interpolação. O parâmetro a_1 define a inclinação no ponto D, a qual é função da variável λ_m . Segundo o modelo [Zheng e Fan \(2019\)](#), a constante a_1 é calculada por

$$a_1 = \frac{1}{0,5K_{s,T}}, \quad \lambda_m \geq 1,5, \quad (6.24)$$

$$a_1 = \frac{1}{0,3K_{s,T}}, \quad \lambda_m < 1,5. \quad (6.25)$$

Definido o parâmetro a_1 , pode ser calculado o parâmetro b_1 através da relação tensão-deformação no ponto C. A constante b_1 é determinada por

$$b_1 = \frac{1}{S_C - S_D} - \frac{a_1}{E_C - E_D}, \quad (6.26)$$

onde S_C e E_C são a tensão e deformação correspondentes ao ponto C, e S_D e E_D são a tensão e deformação correspondentes ao ponto D. Estes valores são fixos e não se alteram dentro de um ciclo, assim como os parâmetros a_1 e b_1 devem ser calculados apenas uma vez dentro de cada ciclo. Os valores de tensão e deformação atuais são obtidos do seguinte modo

$$S = S_h + S_D \quad (6.27)$$

$$E = E_h + E_D \quad (6.28)$$

O processo de cálculo pode ser resumido da seguinte forma: calculados os parâmetros a_1 e b_1 , é obtida a deformação S_h pela expressão (6.27) utilizando o valor de S igual a última deformação obtida. Em seguida, é calculado S_h pela equação (6.23) e por fim, a tensão atual S pela equação (6.28).

6.1.5 Comportamento de descarregamento-recarregamento partindo de tração (TR7 e TR8)

Vários modelos computacionais, como os presentes em [Zheng, Fan e Long \(2017\)](#) e [Thai e Kim \(2011\)](#), propuseram o comportamento de descarregamento e recarregamento partindo da tração como um trecho elástico linear com inclinação K_s (Figura 6.3(g)). No entanto, como constatou [Zheng e Fan \(2019\)](#), a rigidez do material se degrada após o elemento ter sido alongado além do limite elástico, e portanto, existe uma relação entre a deformação plástica e a rigidez de descarregamento-recarregamento.

Como mostra a Figura 6.3(e), o comportamento de um elemento que sofre inversão

de esforços no ponto H durante plastificação por tração pode ser descrito por dois segmentos. O primeiro segmento $H-O_1$, que marca descarregamento, pode ser aproximado por uma reta com inclinação K_{un} , enquanto, o segundo segmento O_1-A_1 , que representa recarga, pode ser aproximado por uma reta com inclinação K_{re} . Ambas as retas podem ser determinadas com as coordenadas dos pontos H , O_1 e A_1 , mostrados na Figura 6.3(a).

Zheng e Fan (2019), após simulação de diversos elementos variando níveis de deformação plástica e índice de esbeltez e posterior tratamento estatístico dos dados, propôs as seguintes expressões empíricas para determinação de K_{un} e K_{re} , escritas como

$$\frac{K_{un}}{K_s} = 0,82 + \frac{1}{5,55 + 1000E_{pl}}, \quad (6.29)$$

$$\frac{K_{re}}{K_s} = \frac{1}{1 + \left(\frac{E_{pl}}{0,005}\right)^{0,5}}, \quad K_{re} \geq 0,2K_s. \quad (6.30)$$

onde $E_{pl} = E_{un} - E_y$ é a deformação plástica e K_{un} é deformação máxima atingida na tração, como mostrado na Figura 6.3(e).

Estas equações foram geradas para aço em temperatura ambiente, no entanto, neste trabalho, estas expressões são utilizadas para em aços sujeitos à elevadas temperaturas, através da correção dos parâmetros K_s e E_y para temperatura T , ou seja, $K_{s,T}$ e $E_{y,T}$

6.1.6 Degradação da resistência à flambagem devido ao efeito Bauschinger

Elementos de aço sujeitos à carregamentos cíclicos apresentam diminuição do valor de tensão crítica de flambagem a cada ciclo, isso é devido ao efeito Bauschinger. Resultados de ensaios experimentais e simulações com elementos finitos mostram que a degradação da resistência à flambagem está diretamente relacionada com o histórico de deformações plásticas e com o índice de esbeltez do elemento. O efeito Bauschinger é ilustrado na Figura 6.9(a), onde a tensão de flambagem é maior no primeiro ciclo. Na Figura 6.9(b) são mostradas as tensões críticas em função do índice de esbeltez λ_m [marcados com (•)], obtidas através de simulação em temperatura ambiente por Zheng e Fan (2019). Através de análise de regressão dos dados, foi gerada uma curva que fornece a tensão crítica de flambagem para o próximo ciclo em função da tensão crítica atual e λ_m .

$$\frac{S_{cr1}}{S_{cr}} = \frac{1}{1 + 40\lambda_m E_{pl}}, \quad (6.31)$$

onde S_{cr} é a tensão crítica de flambagem inicial, e S_{cr1} é a tensão de flambagem nos ciclos subsequentes. Novamente, a equação foi gerada sem considerar efeitos térmicos, mas neste trabalho, o efeito da degradação do material devido ao calor será aliado ao efeito de Bauschinger através da substituição de S_{cr} e λ_m por seus respectivos valores alterados

pela temperatura $S_{cr,T}$ e $\lambda_{m,T}$.

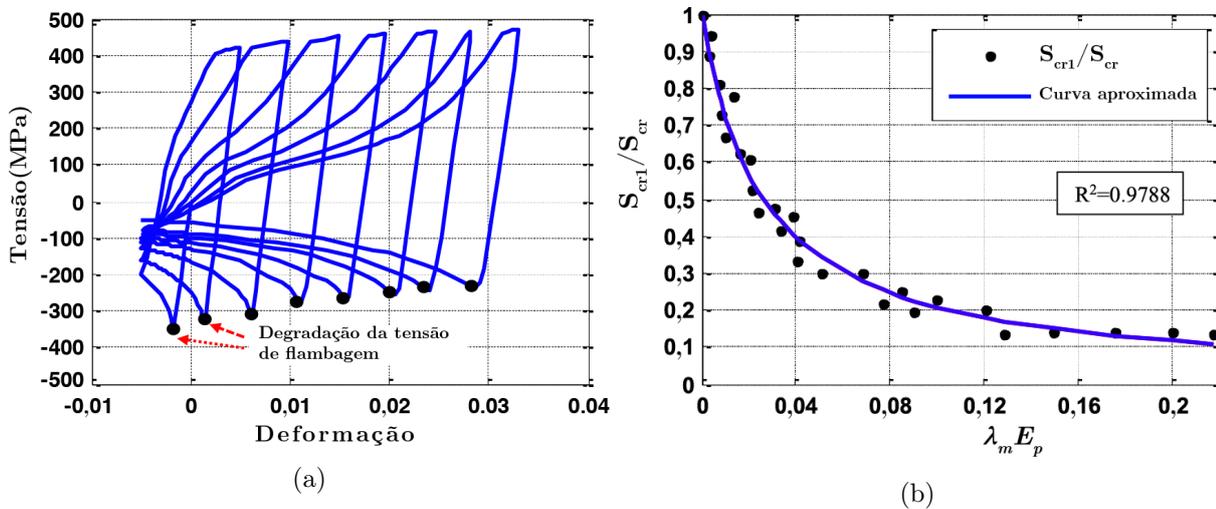


Figura 6.9: (a) Simulação numérica que evidencia o efeito Bauschinger. (b) Degradação da tensão crítica de flambagem em função da esbeltez λ_m .

Fonte: Adaptado de Zheng e Fan (2019).

6.1.7 Regras de descarregamento a meio ciclo (TR9 e TR10)

Na Figura 6.3 é mostrada a relação histerética tensão-deformação de uma barra de aço, na qual o conjunto de segmentos $O - A - B - C - D - H - O_1 - A_1$ representa um ciclo do modelo fenomenológico. Para que o modelo seja representativo para carregamentos aleatórios, é necessário que o modelo preveja a reversão de tensão durante qualquer etapa do ciclo. Dois descarregamentos ainda não foram tratados, o primeiro pode ocorrer durante o trecho $C - D$ (TR5) (Figura 6.3(f)) e o segundo, pode ocorrer quando o elemento de aço experimenta uma reversão de tensão durante o trecho $O_1 - A_1$ (TR8) (Figura 6.3(g)).

Nos dois casos, o caminho de descarregamento é linear com rigidez devidamente ajustadas. Na primeira situação (TR10), o caminho de descarregamento $F - F_1$ é linear, com uma inclinação de K_{re} , até encontrar o caminho pós-flambagem (TR3) (Figura 6.3(f)). Na segunda situação (TR9), o caminho de descarregamento $G - G_1$ permanece linear, com uma inclinação de K_{un} , até encontrar trecho de tração (TR6) (Figura 6.3(g)).

6.2 Fluxograma do modelo fenomenológico

Abaixo está o fluxograma utilizado neste trabalho para descrever o modelo fenomenológico proposto. O modelo foi elaborado considerando inversões de carregamentos aleatórios, por esse motivo, é necessário direcionar o trecho correto dependendo do histórico de deformações. Para direcionar a análise são utilizadas as denominadas condições. Estas, em resumo, são critérios que determinam se na iteração atual a tensão correspondente a

deformação atual, devem ser calculadas pelo trecho corrente ou ser feita a transição para outro trecho.

No Fluxograma 6.10 são mostrados os possíveis caminhos que cada elemento da estrutura pode percorrer durante a análise, sendo que a passagem de um trecho para outro deve atender os respectivos critérios mostrados na Tabela 6.1. A variável *code* diz ao algoritmo qual o trecho em que análise está no momento atual. Esse parâmetro é necessário para direcionar a análise de acordo com o fluxograma 6.10, pois não é possível fazer o controle apenas por valores de tensão ou deformação, pois um determinado valor de deformação ou tração pode ser comum à diferentes trechos.

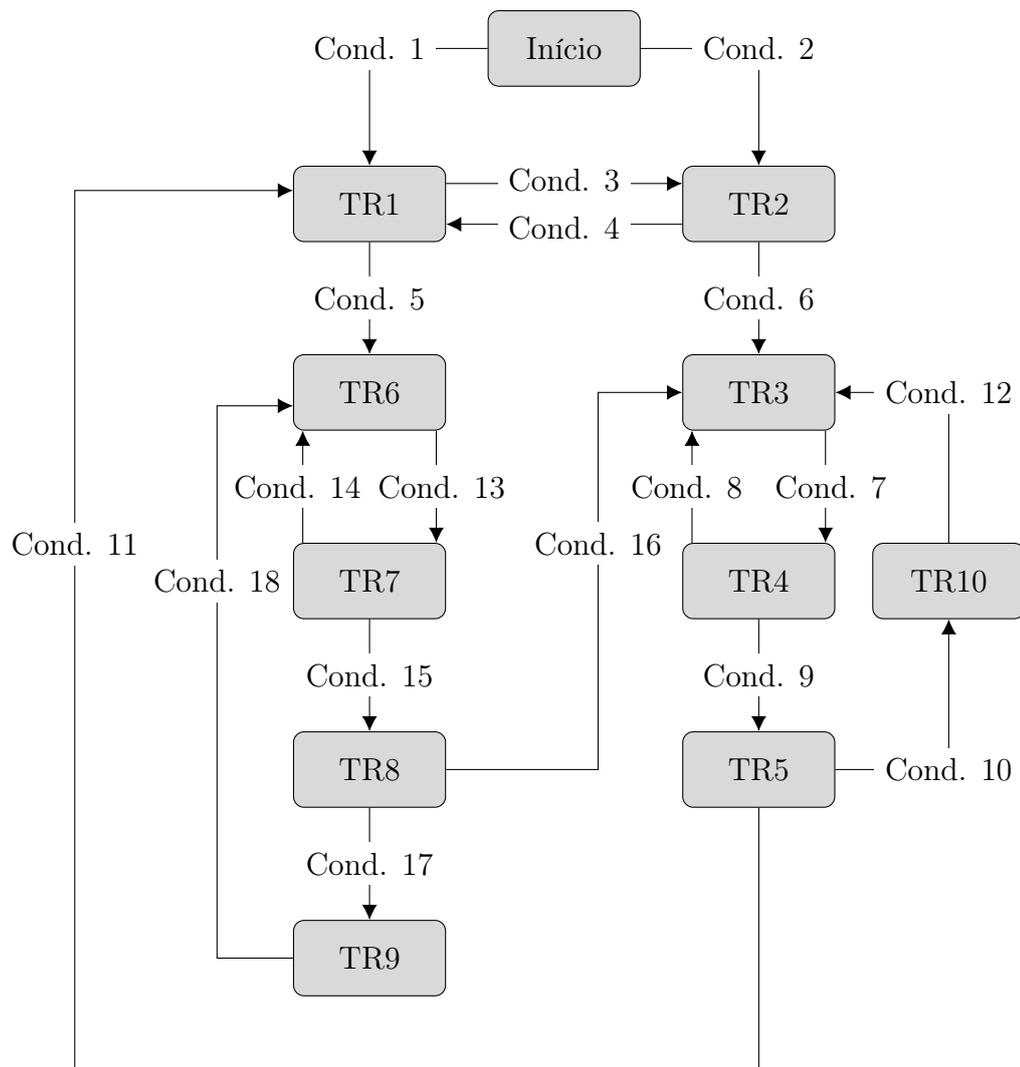


Figura 6.10: Fluxograma do modelo proposto.

Fonte: Autor.

Ao passar pela primeira vez na parte do código que descreve determinado trecho, a variável *code* recebe o valor de identificação do trecho. Por exemplo, ao iniciar a análise $code=0$ e ao ser dado o primeiro incremento de carga de compressão, é atendida a cond. 2 e é executado o trecho 2, onde o *code* passa a valer 2. Importante destacar que os

sobrescritos com a letra t indicam iteração atual, enquanto $t - 1$, indicam iteração anterior.

Tabela 6.1: Condições para direcionamento do modelo.

Identificação	Critérios
Cond. 1	If (code=0) and ($S > 0$)
Cond. 2	If (code=0) and ($S < 0$)
Cond. 3	If (code=1) and ($E^t < 0.0$)
Cond. 4	If (code=2) and ($E^t > 0.0$) and ($E^t > E_{p,T}$)
Cond. 5	If (code=1) and ($E^t \geq E^{t-1}$) and ($E^t > E_{p,T}$)
Cond. 6	If (code=2) and ($E^t < E^{t-1}$) and ($E^t < E_{cr,T}$)
Cond. 7	If (code=3) and ($E^t > E^{t-1}$)
Cond. 8	If (code=4) and ($E^t < E^{t-1}$) and ($E^t \leq E_B$)
Cond. 9	If (code=4) and ($E^t > E_C$)
Cond. 10	If (code=5) and ($E^t < E^{t-1}$)
Cond. 11	If (code=5) and ($E^t > E^{t-1}$) and ($E^t \geq E_D$)
Cond. 12	If (code=10) and ($S^t \leq S = TR3(E^t)$)
Cond. 13	If (code=6) and ($E^t < E^{t-1}$)
Cond. 14	If (code=7) and ($E^t > E^{t-1}$) and ($E^t \geq E_H$)
Cond. 15	If (code=7) and ($S^t < 0.0$)
Cond. 16	If (code=8) and ($E^t \leq E_{cr,T}$)
Cond. 17	If (code=8) and ($E^t > E_{t-1}$)
Cond. 18	If (code=9) and ($E^t > E_{p,T} + E_{pl}$)

Fonte: Autor.

Como outro exemplo, a Cond. 6 determina a transição do trecho de compressão elástica (TR2) para o trecho de pós-flambagem (TR3). A transição só pode ocorrer se o trecho anterior era o TR2 (code=2), se a deformação atual é menor do que a deformação anterior (para garantir que não ocorra a passagem de TR3 para TR2) e que a deformação atual seja maior que a deformação crítica de flambagem.

6.3 Aplicações

6.3.1 Barra simples

Um único elemento de treliça é apoiado por pino em uma extremidade e por rolo na outra extremidade (Figura 6.11). O elemento de treliça resultante é carregado monotonicamente em tensão ao longo de seu eixo na direção de seu único grau de liberdade de deslocamento livre. O elemento de exemplo possui $L = 2,0m$, módulo de elasticidade $K_s = 200GPa$ e tensão de escoamento igual à $S_y = 250MPa$ à temperatura ambiente ($20^\circ C$). A barra é um tubo circular com diâmetro externo $D = 0,15m$ e diâmetro interno $d = 0,10m$, área $A = 9,8.10^{-3}m^2$, momento de inércia $I_x = I_Y = 1,99.10^{-5}$.

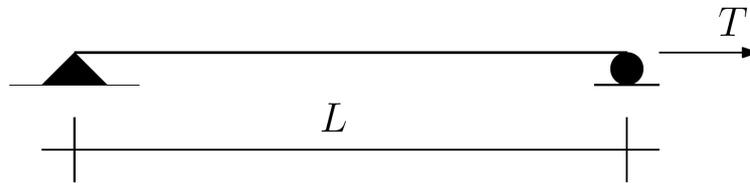


Figura 6.11: Barra simples axialmente carregada.

Fonte: Autor.

Na Figura 6.12 são mostrados os resultados obtidos utilizando o modelo desenvolvido para barra da Figura 6.11. A análise iniciou com compressão, na qual foram utilizados 1500 incrementos, com número máximo de ciclos por incrementos igual à 100, incremento inicial igual à $\Delta L = 5.10^{-5}$ e tolerância 10^{-4} . Para o trecho de pós-flambagem (TR3) foram utilizados os parâmetros de Hill, Blandford e Wang (1989), $X_1 = 50$, $X_2 = 100$ e $S_l = 0,4S_{cr}$. Para o trecho TR5 foi utilizado $S_C = 0,15S_y$ e $S_D = 0,75S_y$.

As mudanças de direção foram impostas, ou seja, foi imposto que quando a deformação na barra fosse igual à $E = 5,0.10^{-3}$ haveria inversão na carga (ponto B), e quando a deformação fosse igual à $E = 4,0.10^{-3}$ haveria inversão no carregamento (ponto F).

Para validar o modelo, a seguir será desenvolvido o cálculo das equações que descrevem o modelo. Inicialmente é calculada a tensão crítica para temperatura de $20^\circ C$ de acordo com a equações da seção 6.1.2.

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{200000}{250}} = 88,857; \quad (6.32)$$

$$\lambda = \frac{2,0}{0,45} = 44,382; \quad (6.33)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{44,382}{88,857} = 0,499; \quad (6.34)$$

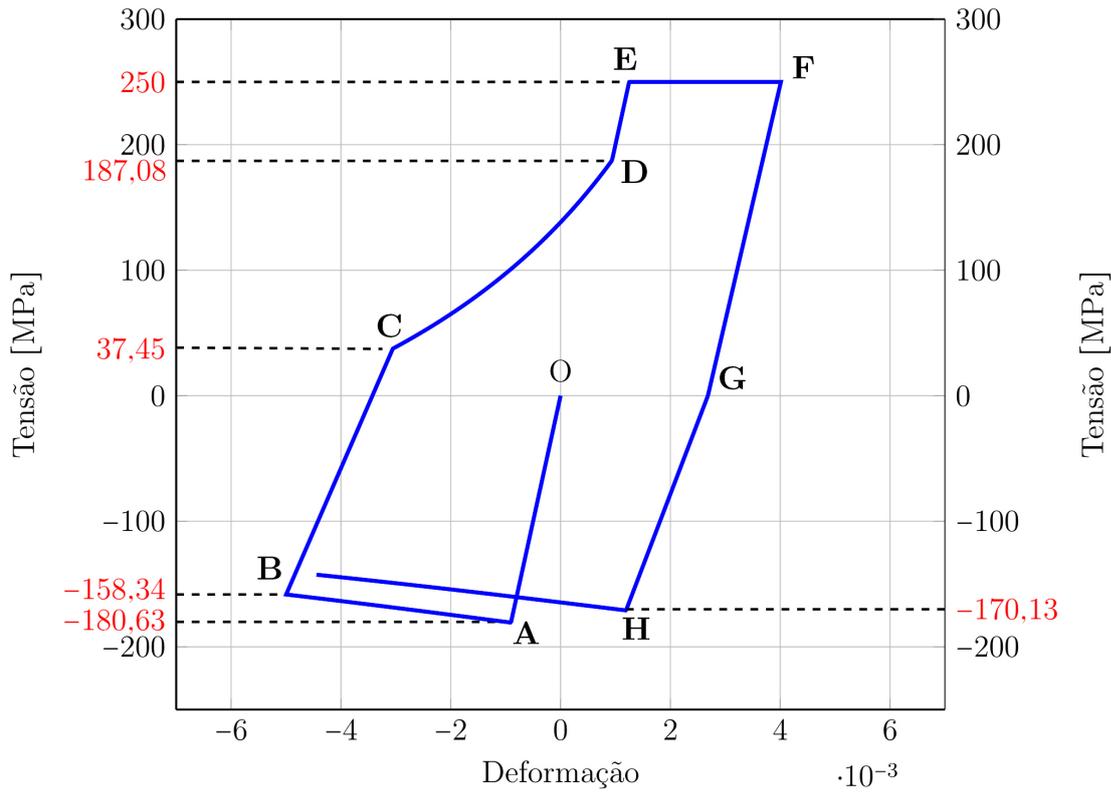


Figura 6.12: Resultados do primeiro ciclo do modelo desenvolvido.

Fonte: Autor.

$$\bar{\lambda}_{m,T} = \bar{\lambda} \sqrt{\frac{k_{y,T}}{k_{K,T}}} = 0,499 \sqrt{\frac{1}{1}} = 0,499; \quad (6.35)$$

$$\alpha = 0,65 \sqrt{\frac{235}{S_y}} = 0,65 \sqrt{\frac{235}{250}} = 0,630; \quad (6.36)$$

$$\varphi_T = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha \lambda_{m,T} + \bar{\lambda}_{m,T}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[1 + 0,630 * 0,499 + 0,499^2 \right] = 0,782; \quad (6.37)$$

$$\chi = \frac{1}{\varphi_T + \sqrt{\varphi_T^2 - \bar{\lambda}_{m,T}^2}} = \frac{1}{0,782 + \sqrt{0,782^2 - 0,499^2}} = 0,722; \quad (6.38)$$

$$S_{cr,T} = \frac{\chi k_{y,T} S_y}{\gamma_{M,fi}} = \frac{0,722 * 1 * 250}{1,0} = 180,636. \quad (6.39)$$

$$E_{cr} = \frac{S_{cr,T}}{E_{s,T}} = \frac{180,636}{200000} = 0,0009031. \quad (6.40)$$

Como é possível notar pela Figura 6.12, a tensão crítica de flambagem está de

acordo com a tensão obtida pela equação (6.40), $S_y = -180,636MPa$. Em seguida, é calculada a tensão correspondente ao final da curva de pós-flambagem (ponto B), onde ocorre inversão de carregamento.

$$S_l = 0,4S_{cr} = 0,4(-180,636) = -72,254; \quad (6.41)$$

$$S = S_l + (S_{cr} - S_l)e^{-(X_1+X_2\sqrt{E_{p1}})E_{p1}}, \quad (6.42)$$

$$E_{p1} = \text{abs}(E_t - E_{cr}) = \text{abs}[-0,005 - (-0,0009031)] = 0,0040969; \quad (6.43)$$

$$S_B = -72,254 + [-180,636 - (-72,254)]e^{-[(50+100\sqrt{0,0040969})0,0040969]} = -158,28MPa, \quad (6.44)$$

Portanto, como é possível observar na Figura 6.12, que a tensão no ponto B é muito próxima da tensão obtida na expressão analítica, $S_B = -158,28MPa$. O segmento B-C deve ter fim na tensão igual à $S_C = 0,15S_Y = 37,5MPa$, o que está de acordo com o valor obtido na Figura 6.12. Assim como, o fim do trecho C-D deve ocorrer na tensão igual à $S_D = 0,75S_y = 187,5MPa$, cujo valor é o mesmo mostrado na Figura.

A tensão crítica de flambagem referente ao segundo ciclo (ponto H da Figura 6.12), é calculada analiticamente pela equação (6.31), sendo igual à

$$Ep = E_F * E_y = 0,004 - 0,00125 = 0,00275, \quad (6.45)$$

$$S_{cr1} = \frac{S_{cr}}{1 + 40\lambda_m E_p} = \frac{-180,64}{1 + 40 \cdot 0,499 \cdot 0,00275} = -171,24MPa, \quad (6.46)$$

6.3.1.1 Teste de carregamento e descarregamento

Neste exemplo, será demonstrado o comportamento de carregamento e descarregamento em todos os tipos de trechos do modelo proposto, que podem ocorrer devido a carregamentos aleatórios. Foi utilizado a mesma barra da seção anterior, com os mesmos dados, sendo alterado somente os pontos de inversão de esforços e os parâmetros que descrevem o trecho de pós-flambagem. Os parâmetros X_1 e X_2 são determinados pelas equações aproximadas (6.17) e (6.18) e, tensão assintótica igual à $S_l = 0,4S_{cr}$. Foi considerada temperatura ambiente.

Na Figura 6.15 são mostrados os valores de deformação em que ocorrem as inversões impostas de carregamento e, na Figura 6.14 os respectivos pontos de inversão são marcados com (•).

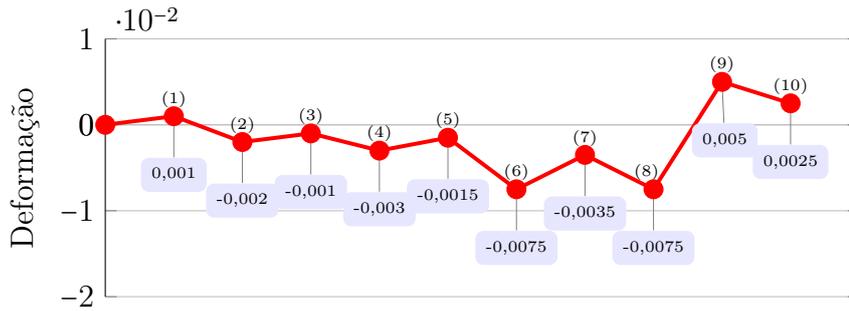


Figura 6.13: Deformações correspondentes aos pontos de inversão de carga externa imposta, referente aos dados da Figura 6.14.

Fonte: Autor.

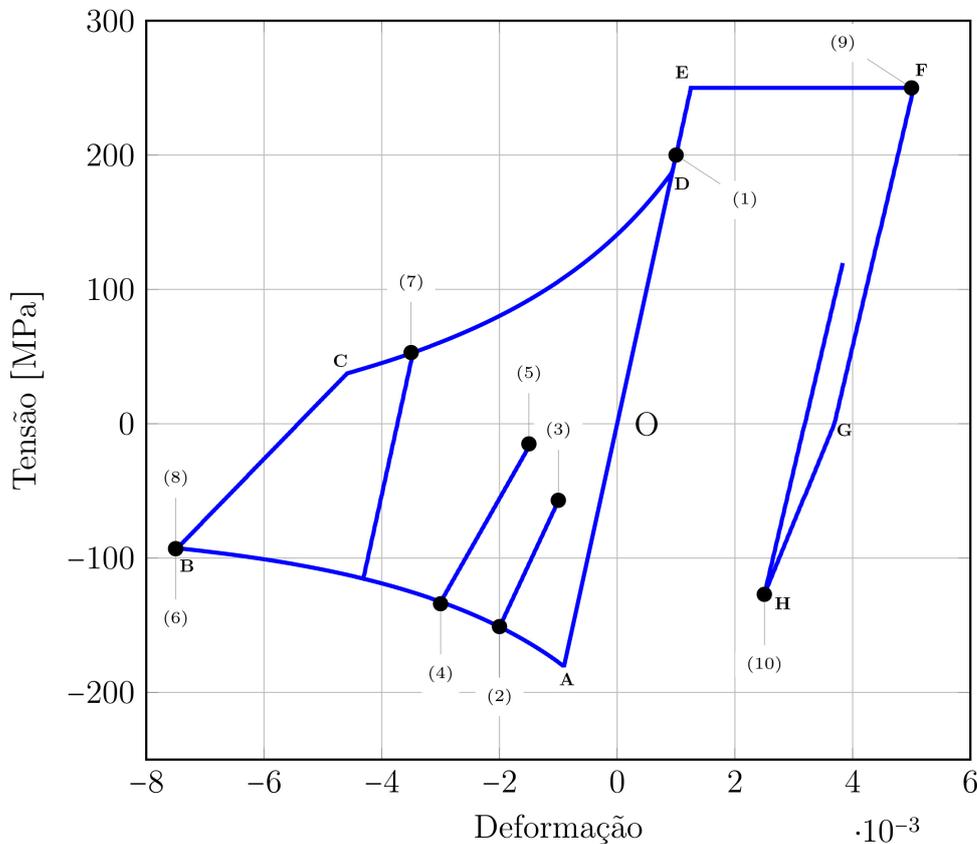


Figura 6.14: Um ciclo com carregamentos e descarregamentos aleatórios.

Fonte: Autor.

6.3.1.2 Loop histerético

Nesse exemplo, a mesma barra utilizada nas aplicações anteriores sujeita a temperatura ambiente, foi submetida a sucessivos carregamentos de tração seguido de compressão, limitados pelas deformações apresentadas na Figura 6.15, gerando o loop histerético mostrado na Figura 6.16. Os parâmetros X_1 e X_2 utilizados são determinados pelas equações

aproximadas (6.17) e (6.18), e a tensão assintótica utilizada foi igual a $S_l = 0,4S_{cr}$. Foi considerada temperatura ambiente.

É possível notar na Figura 6.16 que o patamar de plastificação em todos os loops não se altera, isso é devido a não consideração de nenhuma regra de encruamento, a não ser aquela contida no modelo constitutivo para elevadas temperaturas do EC3, mas como esta análise se restringe a 20°C, não há encruamento. O efeito Bauschinger é evidente, a cada ciclo a tensão crítica de flambagem diminui devido ao acúmulo de deformação plástica.

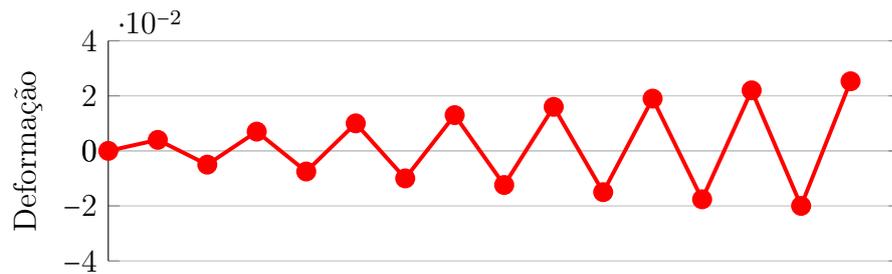


Figura 6.15: Deformações em que ocorreram inversão de carregamento.

Fonte: Autor.

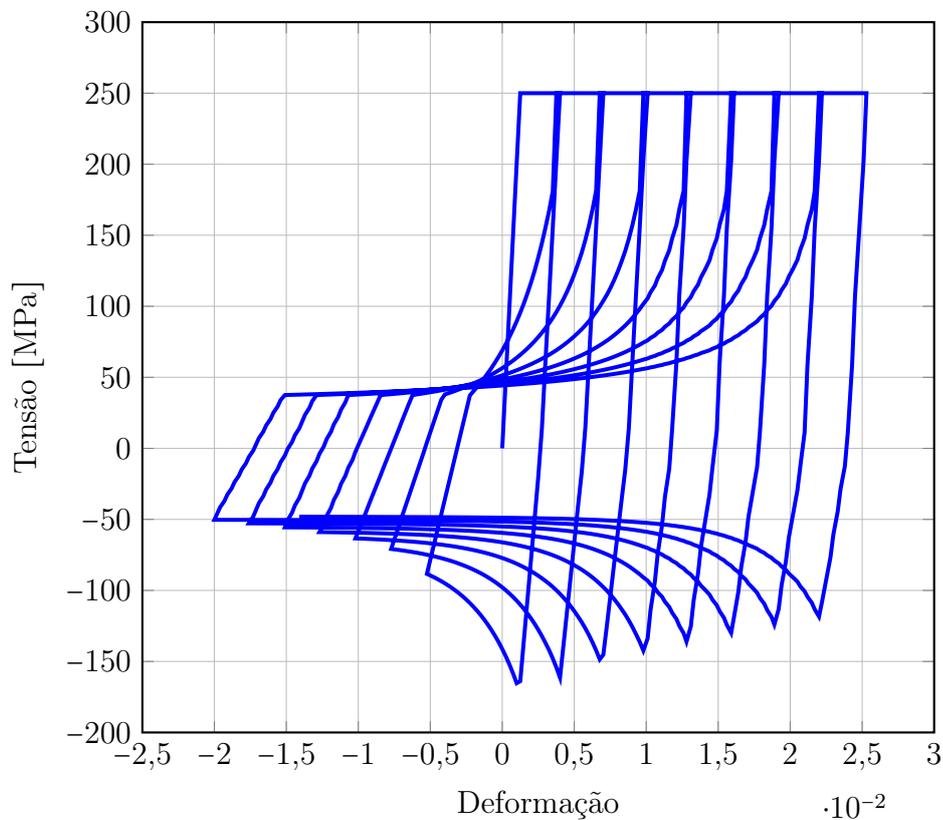


Figura 6.16: Loops histeréticos obtidos pelo modelo proposto para temperatura de 20.

Fonte: Autor.

6.3.1.3 Modelo cíclico considerando elevadas temperaturas

Com a finalidade de aplicar o modelo proposto em conjunto com os efeitos térmicos, a mesma barra simples utilizada nos exemplos anteriores, agora é sujeita a diferentes temperaturas. Na Figura 6.17 são mostrados os diagramas tensão-deformações para temperaturas de 20°C, 300°C, 400°C, 500°C, 600°C, 700°C, 800°C, 900°C e 1000°C. A temperatura é mantida constante durante cada análise.

Foram impostos restrições nos deslocamentos, de forma que atingido o valor selecionado, era aplicada a inversão na força axial externa. Os valores de deslocamento foram selecionados de forma a obter curvas históricas mais visuais.

Foram utilizados incrementos de comprimento de arco com valores fixos iguais a $\Delta L = 10^{-4}$, totalizando 3000 incrementos com número máximo de iterações igual à $NI_{Max}=100$ e tolerância igual $tol = 10^{-4}$.

Tabela 6.2: Valores de deslocamento que marcam a reversão do carregamento.

Temperaturas 20/300/400/500°C	Temperaturas 600/700°C	Temperaturas 800/900/1000°C
0,02	0,029	0,035
-0,05	0,015	0,003
0,024	0,034	0,04
-0,053	0,01	-0,002
0,028	0,039	0,045
-0,056	0,005	-0,007
0,032	0,044	0,05
-0,059	0	-0,012
0,036	0,049	0,055
-0,062	-0,005	-0,017
0,04	0,054	0,06
-0,065	-0,01	-0,022
0,044	0,059	0,065
-0,068	-0,015	-0,027
0,048	0,064	0,07
-0,071	-0,02	-0,032

Fonte: Autor.

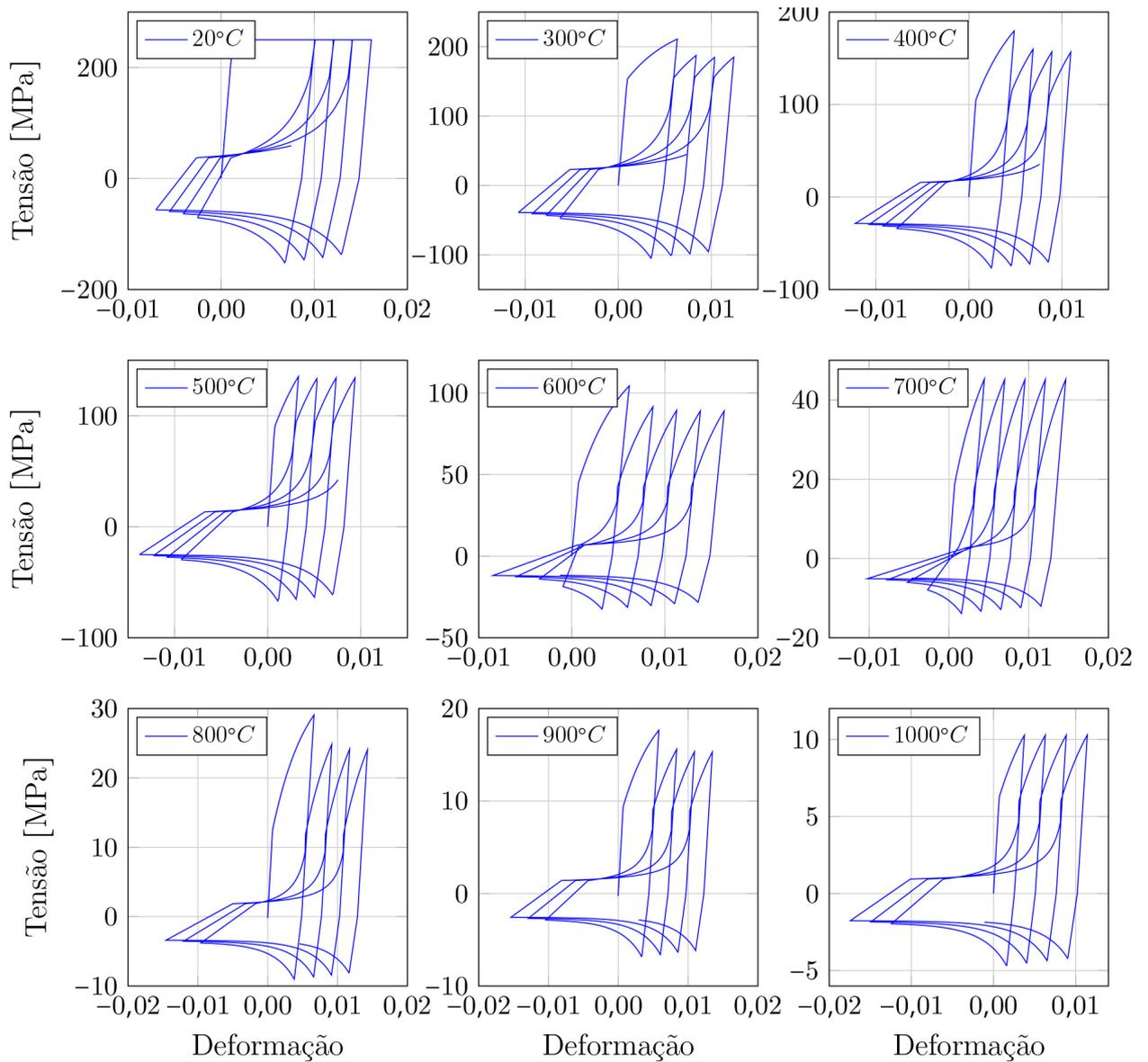


Figura 6.17: Curvas histeréticas para uma barra simples apoiada sujeita à várias temperaturas.

Fonte: Autor.

Nas Figuras 6.18 e 6.19 foram plotadas as curvas força-deslocamento, correspondente as curvas tensão-deformação da Figura 6.17. As curvas estão separadas em figuras diferentes devido a escalas, o que levou a adotar diferentes valores deslocamento como marcadores de inversão de carregamento. Pelos gráficos é evidente o efeito da degradação térmica, sendo que força máxima em 500°C corresponde a 54% da força máxima a 20°C, 18% em 700°C, 12% em 800°C, 7% em 900°C e em 4% à 1000°C.

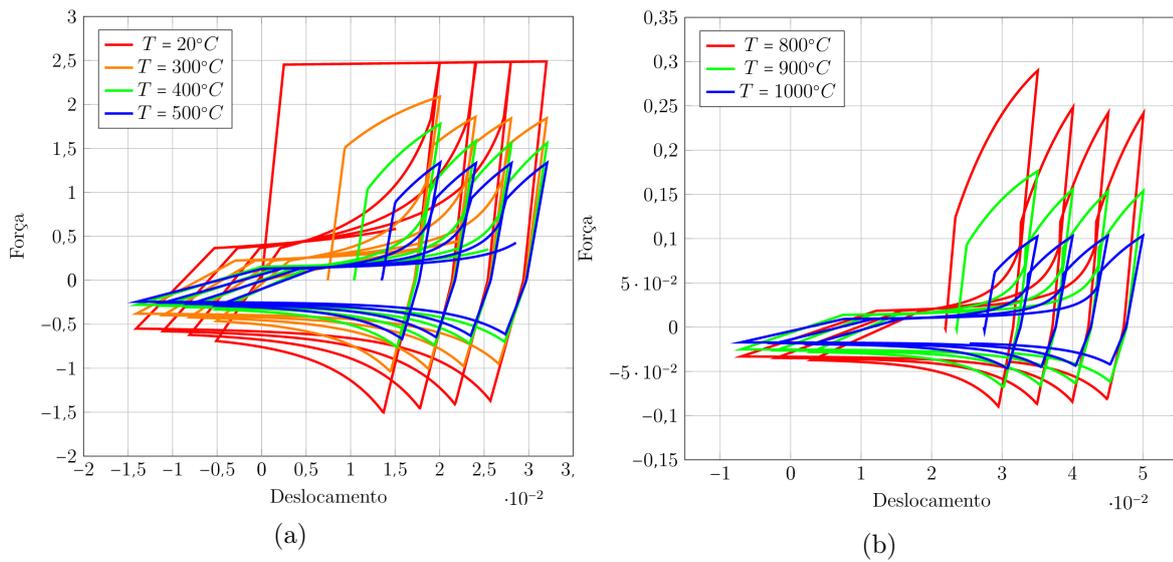


Figura 6.18: Comparação de curvas histeréticas de diferentes temperaturas mas com iguais pontos de inversão de cargas.

Fonte: Autor.

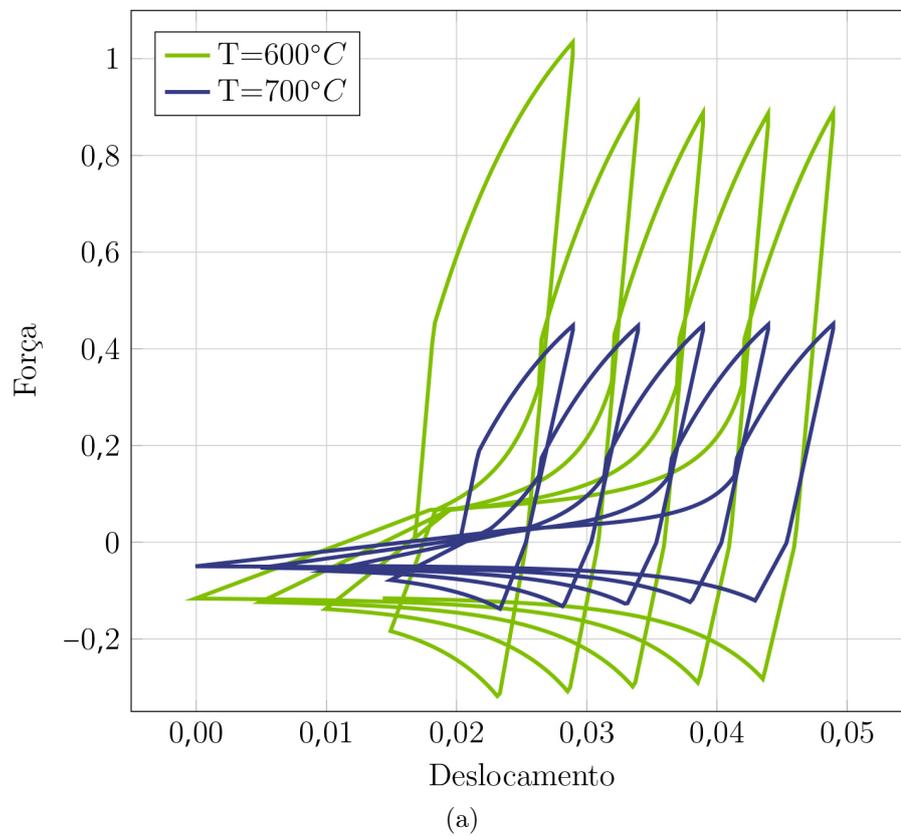


Figura 6.19: Comparação de curvas histeréticas de diferentes temperaturas com iguais pontos de inversão de cargas.

Fonte: Autor.

6.3.2 Treliça de Von Misses

A treliça de Von Misses, apresentada nos capítulos anteriores, é analisada novamente, agora associando efeitos térmicos com o modelo fenomenológico proposto. Foram utilizadas os mesmos dados da geometria dos exemplos anteriores, sendo as barras simétricas, com comprimento $L=50\text{cm}$ e ângulo com plano horizontal $\theta = 5^\circ$. Os dados do aço utilizado são: módulo de elasticidade igual à 200 Gpa e tensão de escoamento igual a 250 Mpa . Foi utilizada seção com área $A = 3,73\text{cm}^2$ e $I_x = I_y = 10,55\text{ cm}^2$ (Figura ??). Para obter o resultados mostrados a seguir foram utilizados 400 incrementos de comprimento de arcos iguais a $\Delta L = 0,05$, com no máximo 200 iterações para convergência. O parâmetro de carga foi deixado livre para aumentar ou diminuir conforme o comportamento não linear, ou seja, nenhuma restrição de deslocamento ou deformação foi imposta.

Na Figura 6.20 são plotadas as curvas força-deslocamento e sua respectiva curva tensão-deformação resultantes de análise elástica e inelástica da treliça de Von Misses em temperatura ambiente. Os pontos identificados com o numeral indicam transições de trechos de comportamento durante análise, sendo que os pontos na Figura (a) correspondem aos pontos na Figura (b). O ponto 1 marca a flambagem e o início da pós-flambagem inelástica. No ponto 2 ocorre início do descarregamento elástico e recarregamento à tração. No ponto 3 ocorre reversão da tensão. No ponto 4 a barra volta ao comportamento de tração elástica e no ponto 5 ocorre escoamento à tração.

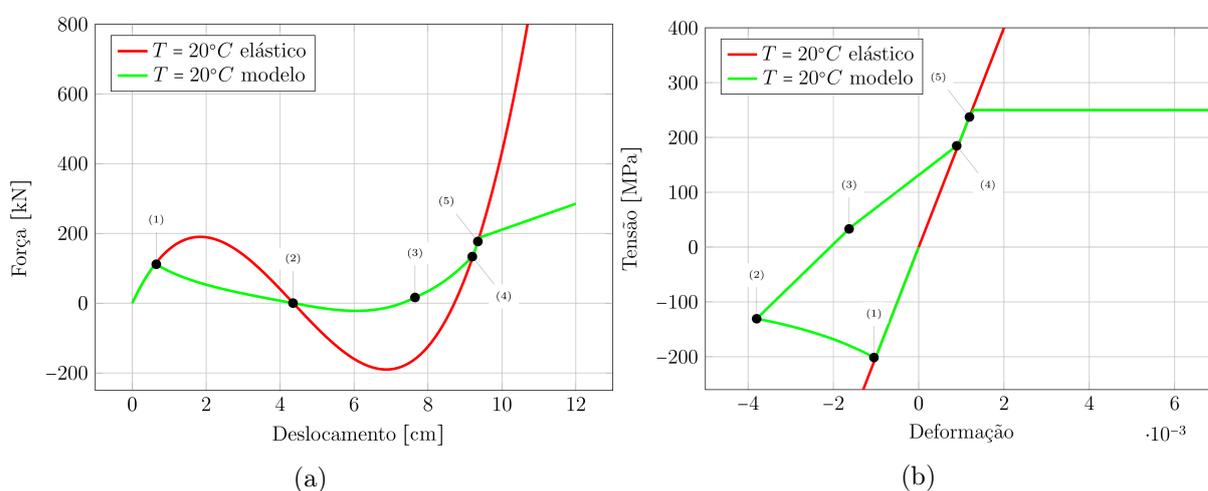


Figura 6.20: Comparação entre modelo elástico e modelo inelástico proposto: (a) Diagrama força-deslocamento e (b) Diagrama tensão-deformação.

Fonte: Autor.

Na Figura 6.21 são mostrados os diagramas força-deslocamento obtidos pelo modelo inelástico proposto variando a temperatura do material. É possível notar que para todas temperaturas, exceto para temperatura de 20°C , a análise se inicia com deformações negativas (neste gráfico, deformações negativas indicam expansão do material). Isso é

devido à execução de análise termina inicial e aplicação da correspondente deformação térmica e em seguida é feita análise mecânica.

Já na Figura 6.22(a) e (b) são apresentados os as curvas correspondentes de tensão-deformação para várias temperaturas. As curvas nas Figuras 6.20 e 6.21 referentes às temperaturas de 800°C, 900°C e 1000°C são mostradas separadas devido a escala, pois se fossem apresentadas junto com as outras temperaturas, estas curvas apareceriam quase como linhas horizontais.

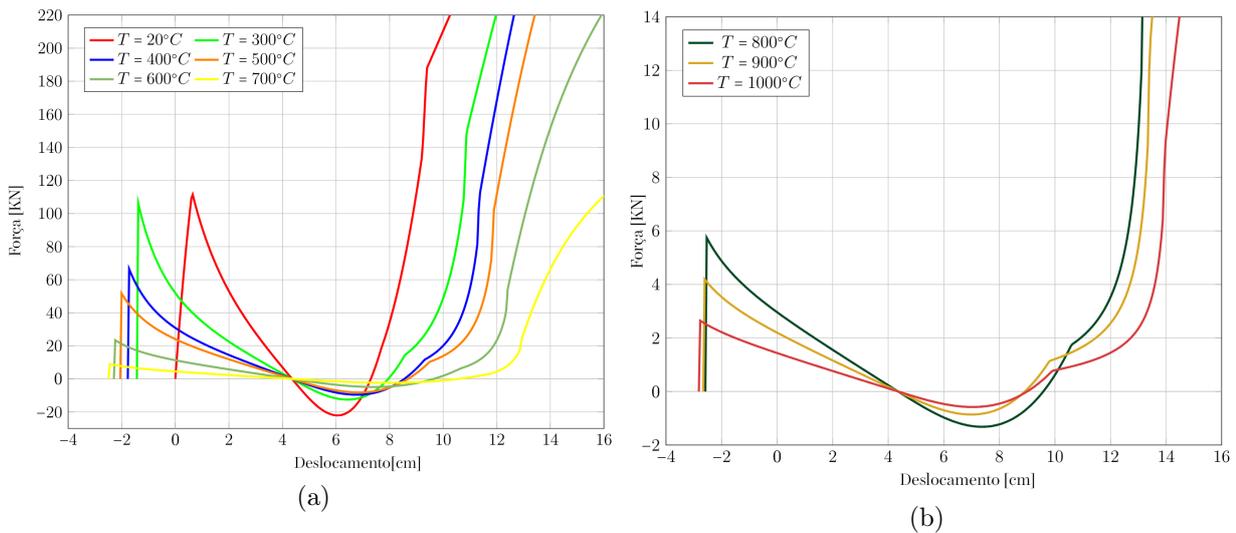


Figura 6.21: Análise inelástica - Diagramas força-deslocamento para várias temperaturas.

Fonte: Autor.

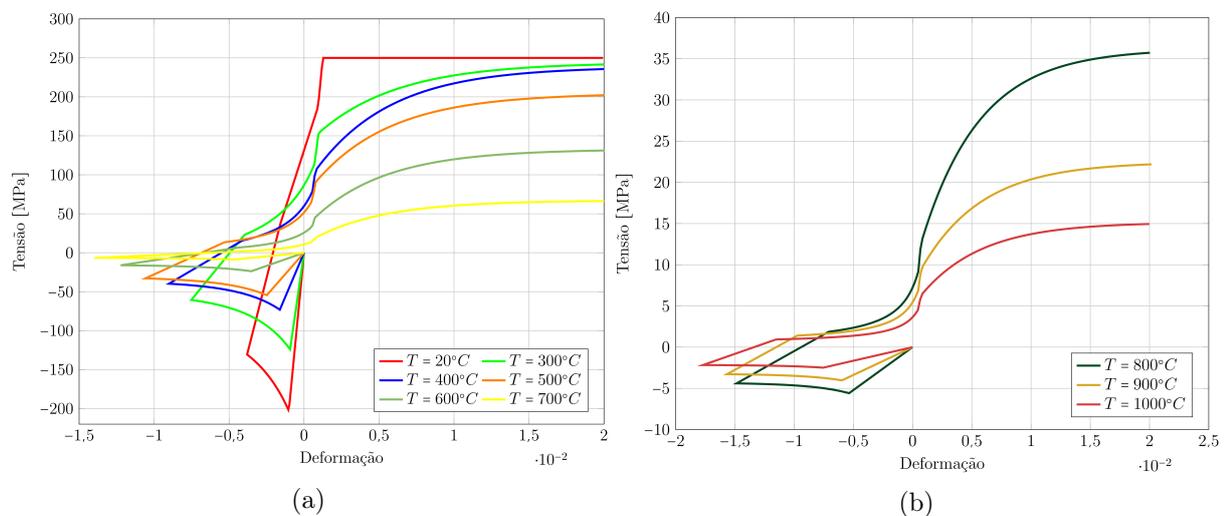


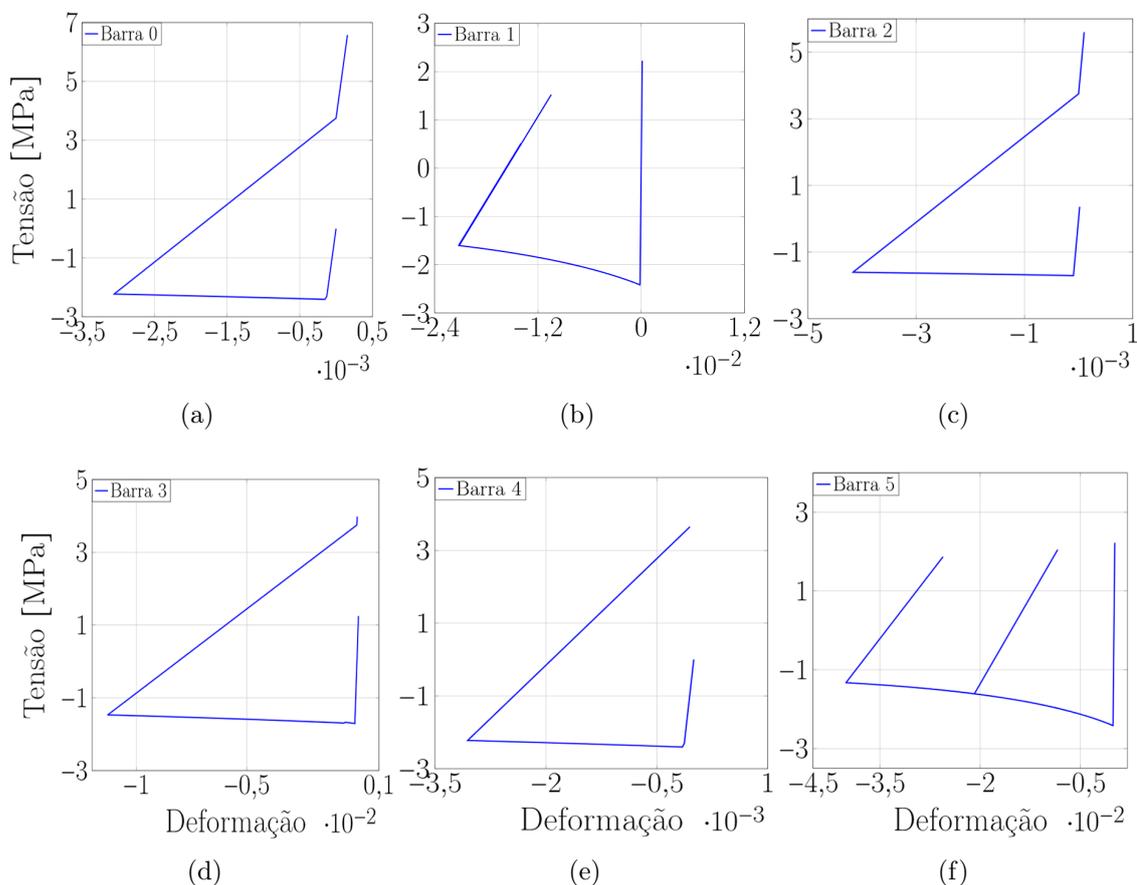
Figura 6.22: Análise inelástica - Diagramas tensão-deformação para várias temperaturas.

Fonte: Autor.

6.3.3 Star Dome

A aplicação do domo hexagonal, apresentado na seção 4.5.0.2, foi analisada novamente com o modelo inelástico proposto considerando os efeitos da temperatura. A geometria foi mantida igual, enquanto as propriedades materiais utilizadas foram: módulo de elasticidade $K = 18000 \text{KN/cm}^2$ e tensão de escoamento igual à $S_y = 25 \text{KN/cm}^2$. A seção adotada possui área $A = 3 \cdot 10^{-2}$ e momento de inércia $I_x = I_y = 5 \cdot 10^{-4}$. Para obter os dados mostrados a seguir, foram necessários 30000 incrementos de comprimento de arco iguais à $\Delta L = 0,002$ e número máximo de iterações igual à 1000. O parâmetro de carga foi deixado livre para aumentar ou diminuir conforme o comportamento não linear, ou seja, nenhuma restrição de deslocamento ou deformação foi imposta.

Este exemplo é consideravelmente mais complexo do que os exemplos apresentados anteriormente, pois, nesse caso, o diagrama força-deslocamento de um determinado nó da estrutura depende do comportamento individual de cada barra da estrutura. Na Figura 6.23(a-r) são apresentadas as curvas tensão-deformação individual de 18 barras das 23 que compõem a estrutura, obtidas por análise inelástica em temperatura ambiente. Na Figura 6.25 é apresentada a curva força-deslocamento do nó no topo da estrutura (ponto de aplicação da carga concentrada).



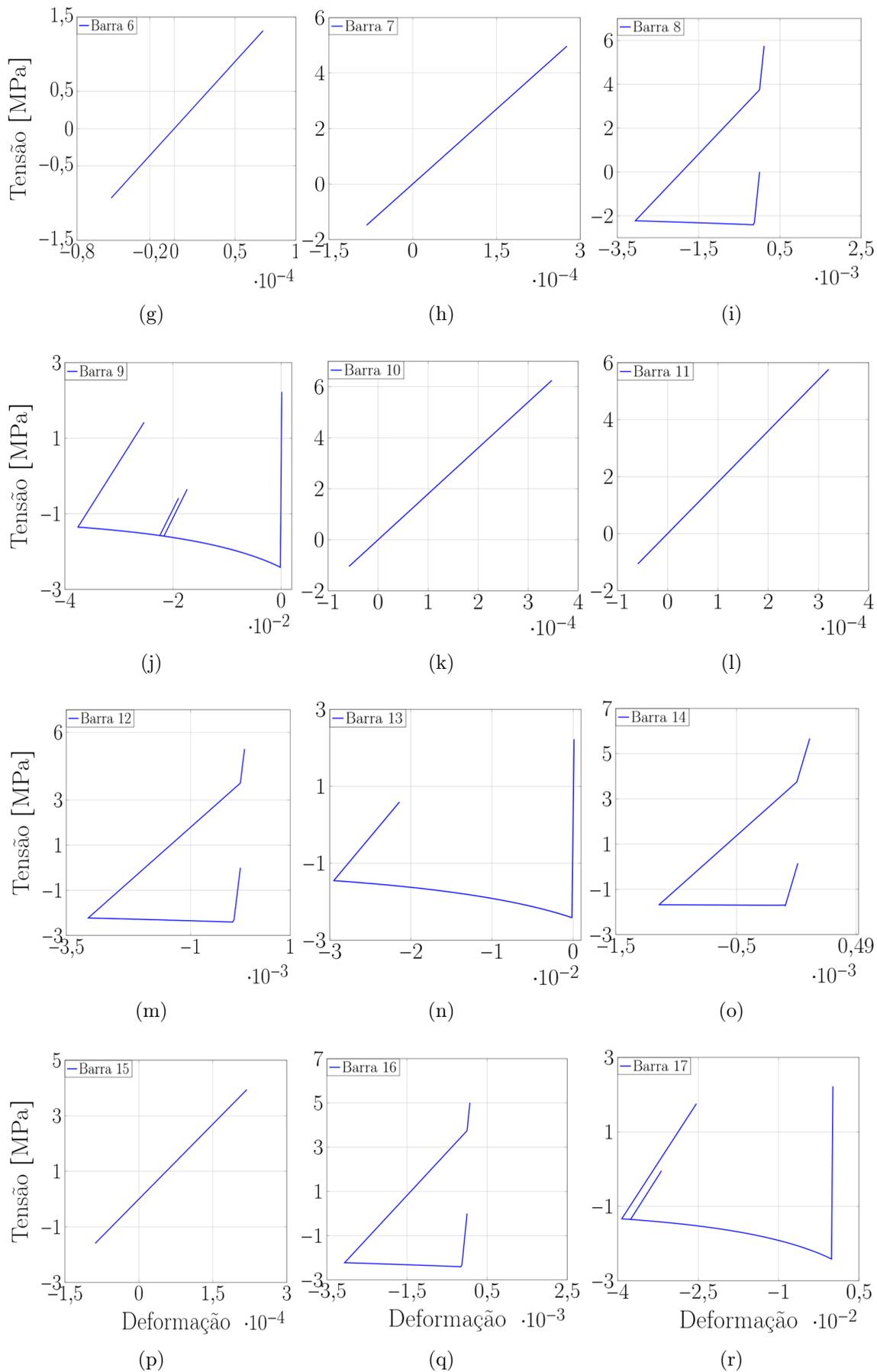


Figura 6.23: Diagramas tensão-deformação individual para algumas barras da estrutura.

Fonte: Autor.

Na Figura 6.25 são comparadas as curvas força-deslocamento obtidas submetendo a estrutura a diferentes temperaturas.

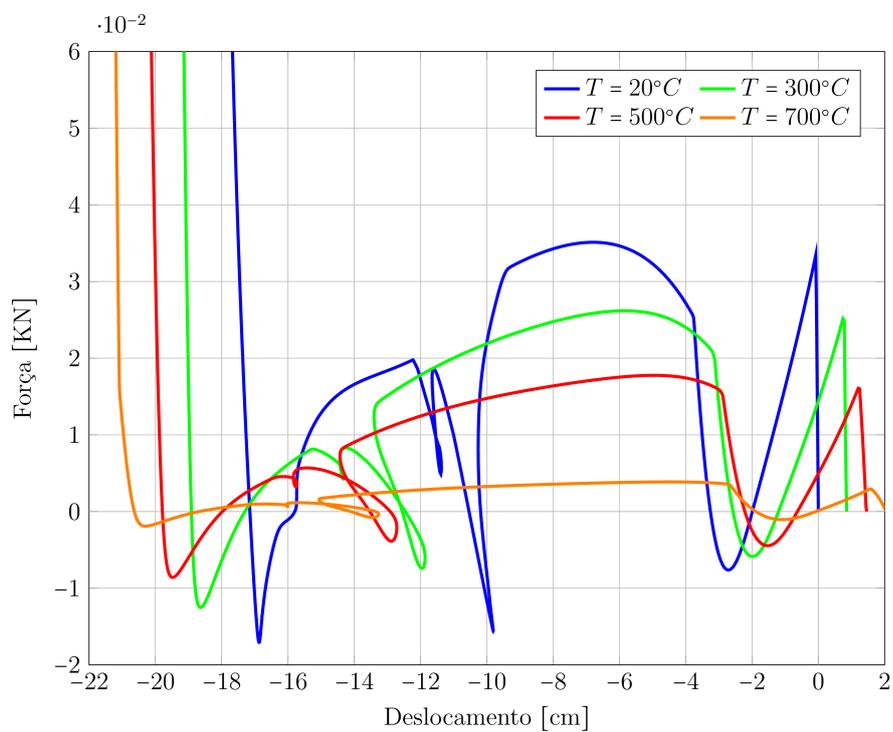


Figura 6.25: Diagrama força-deslocamento para várias temperaturas.

Fonte: Autor.

Capítulo 7

Conclusões

Ao longo do desenvolvimento do presente trabalho foram apresentados e descritos os aspectos de interesse relacionados ao desenvolvimento e posterior aplicação de um código computacional para análise não linear termoestrutural simplificada em regime de grandes deslocamentos e pequenas deformações de treliças espaciais, associado a um modelo fenomenológico inelástico histerético.

Inicialmente, foi empregado o método dos elementos finitos posicional que devido sua natureza não linear é eficaz para análises de grandes deslocamentos. Neste primeiro trabalho, foi adotado o elemento de treliça espacial devido a sua formulação simples, o que torna elementar a introdução de outros tipos de análises.

O método de continuação utilizado mostrou boa convergência, tanto nos exemplos mais simples, como naqueles em que ocorrem bruscas mudanças de direção na trajetória de equilíbrio, como mostrado no capítulo 6.

Os resultados obtidos nos exemplos do capítulo 5, quando comparados com aqueles obtidos nas referências, permitiram comprovar a precisão para análises termoestruturais em temperaturas elevadas. A sequência de análise é feita primeiro estimando os efeitos térmicos, ou seja, calculando as deformações térmicas e atualizando as propriedades do material degradados devido à temperatura e, em seguida executando a análise mecânica.

O modelo fenomenológico proposto inclui plastificação à tração, flambagem e pós-flambagem inelástica à compressão e degradação da tensão crítica de flambagem devido ao histórico de deformações plásticas. Foi demonstrado teoricamente a acurácia do modelo.

Como modelos fenomenológicos são válidos somente para uma determinada configuração para a qual foi calibrado, este trabalho intentou desenvolver um modelo fenomenológico razoavelmente flexível, baseado em modelos de diferentes trabalhos. O modelo proposto futuramente pode ser calibrado com dados específicos de barras de treliça sujeitas a elevadas temperaturas, pois em nenhum trabalho publicado foram encontrados tais informações.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

- *Explorar análise de colapso local e colapso progressivo*
 - Ao implementar no programa critérios de falhas das barras, seria possível analisar colapsos locais e seus efeitos globais. Seria interessantes analisar a redistribuição de esforços e os mecanismos de colapso global. De acordo com [Rigobello \(2011\)](#), por meio de análises estáticas não é possível continuar simular o comportamento das estruturas após um colapso local e, como sugeriu [Franssen e Gens \(2004\)](#), tal problema pode ser contornado empregando análises dinâmicas. No entanto, como apresentado neste trabalho, o método de continuação junto com o modelo fenomenológico foram eficazes além dos pontos limites.
- *Calibrar o modelo fenomenológico histerético para barras de treliça sujeitas à elevadas temperaturas*
 - Através de ensaios em laboratório de elementos de treliça de aço sob carregamentos cíclicos e elevadas temperaturas, podem ser gerados dados para calibrar o modelo aqui apresentado e, dessa forma, gerar um modelo fenomenológico preciso para o tipo de elemento estrutural desejado.
- *Acoplar código de análise térmica transiente ao código de análise estrutural*
 - Associar ao modelo proposto código computacional baseado em elementos finitos de análise térmica transiente para determinação campos de temperatura. Dessa forma, seria possível simular propagação de calor, deformações não uniformes, efeitos de restrições devido à diferentes expansões térmicas, arqueamento das barras devido a diferente distribuição de temperatura na seção dos elementos, entre outros.
- *Considerar efeito de degradação da tensão de escoamento*
 - Para tornar o modelo fenomenológico mais acurado, segundo [Zheng e Fan \(2019\)](#), este deve considerar o efeito cumulativo da degradação da tensão de escoamento como uma função do dano cumulativo devido à fadiga. Podem ser utilizados para estimar os efeitos da fadiga os modelos de [Coffin \(1954\)](#) e [Manson \(1965\)](#)

Bibliografia

AISC, A. I. o. S. C. *Manual of steel construction: Load and resistance factor design. Structural members, specification and codes*. 2. ed. Chicago, IL: American Institute of Steel Construction, 1994. v. 1.

AL-AUKAILY, A.; SCOTT, M. H. Sensitivity analysis for displacement-controlled finite-element analyses. *Journal of Structural Engineering*, v. 144, n. 3, p. 04017222, 2018.

AL-RASBY, S. N. Solution techniques in nonlinear structural analysis. *Computers and Structures*, v. 40, p. 985–993, 1991.

ALVES, D. P. R.; BARRA, L. P. S.; ROCHA, B. M. Modeling of the thermo-elastoplastic behavior of space trusses. *Mecánica Computacional*, XXXIV, p. 485–499, 2016.

ARGYRIS, J. *Continua and discontinua, Proc. Conf. on Matrix Methods for Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80*. Ohio: Wright Patterson AFB, 1965.

ARGYRIS, J. e. a. Finite element method – the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 17-18, n. Part 1, p. 1–106, 1999.

ARGYRIS, J. H. Progress in aeronautical sciences. In: _____. Oxford/London/New York/Paris: Pergamon Press. Preis geb. 60 s., 1965. v. 4, cap. Recent Advances in Matrix Methods of structural Analysis, p. 201–213.

ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C.; SCHARPF, D. W. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 14, n. 3, p. 401–451, 1978.

BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. 2. ed. Watertown: Pearson Education, 2014. 1065 p.

BATHE, K. J.; RAMM, E.; WISON, E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 9, p. 353–386, 1975.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.

BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L.; KLEIN, M. J. Large displacement, transient analysis of space frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, n. 1, p. 65–84, 1977.

BLACK, R. G.; WENGER, W. A.; POPOV, E. P. *Inelastic buckling of steel struts under cyclic load reversals*. Berkeley, CA: Earthquake Engineering Research Center, 1980.

BLANDFORD, G. E.; WANG, S. T. Response of space trusses during progressive failure. *Proceedings of Dynamic Response and Progressive Failure of Special Structures, ASCE*, p. 1–16, 1993.

BONET, J.; WOOD, R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 2. ed. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 2008. 205 p. ISBN 978-0-511-39468-3.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 5, n. 5, p. 579–595, 2000.

BORST, R. de et al. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. 2. ed. Chichester: Wiley & Sons, 2012. 527 p. ISBN 978-0-470-66644-9.

CALDAS, R. B. *Análise numérica de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio*. Tese (Tese de Doutorado) — Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional fem applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.

CARVALHO, P. R. P. *Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato*. Tese (Dissertação de mestrado) — Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2019.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos numéricos para engenharia*. Porto Alegre: AMGH, 2011. 825 p. ISBN 978-85-8055-011-5.

CHEN, C. H.; HU, H. K. Seismic response of concentrically braced steel frames made with rectangular hollow bracing members. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 130, n. 11, p. 1–11, 2017.

CLARKE, M. J.; HANCOCK, M. J. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 29, p. 1365–1391, 1990.

CLOUGH, R. The finite element method in plane stress analysis. In: *SECOND ASCE CONFERENCE ON ELECTRONIC COMPUTATION*. Pittsburgh, PA: [s.n.], 1960. p. 345–378.

CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Tese para concurso de professor titular) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. *O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica*. São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p. ISBN 978-85-8023-068-0.

- CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, n. 1, p. 185–207, 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-lagrangian position-based fem applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 91, p. 1–15, 2014.
- CODÁ, G. S. C. M. *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Tese (Tese de Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- COFFIN, L. F. J. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, v. 76, p. 931–950, 1954.
- CRISFIELD, M. An arc-length method including line searches and accelerations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 19, p. 1269–1289, 1983.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers and Structures*, v. 13, p. 55–62, 1981.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Cambridge: John Wiley & Sons, 1991. v. 1. 361 p.
- DAVARAN, A.; FAR, N. E. An inelastic model for low cycle fatigue prediction in steel braces. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 65, n. 3, p. 523 – 530, 2009. ISSN 0143-974X.
- DICLELI, M.; CALIK, E. E. Physical theory hysteretic model for steel braces. *Journal of Structural Engineering*, v. 134, n. 7, p. 1215–1228, 2008.
- EN 1993-1-2. *Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-2: General rules and rules for buildings*. Brussels: The European Union Per Regulation, 2005.
- EN 1994-1-2. *Eurocode 4: “Design of composite steel and concrete structures: Part 1-2: General rules – Structural fire design*. Brussels: The European Union Per Regulation, 2005.
- ESLAMLOU, S. D.; ASGARIAN, B. Determining critical areas of transmission towers due to sudden removal of members. *Case Studies in Engineering Failure Analysis*, v. 9, p. 138 – 147, 2017.
- Eurocode 3 Part 1.1. *EN 1993-1-1 (2005): Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings*. 2005. 93 p.
- FAFARD, M.; MASSICOTTE, B. Geometrical interpretation of the arc-length method. *Computers Structures*, v. 46, n. 4, p. 603–615, 1993.

- FELIPE, T. R. C. *Análise Mecânica e Probabilística de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso Progressivo*. Tese (Dissertação de mestrado) — Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2019.
- FELL, B. V. *Large-scale testing and simulation of earthquake-induced ultra low cycle fatigue in bracing members subjected to cyclic inelastic buckling*. Tese (Tese de PhD) — Dept. of Civil and Environment Engineering - Univ. of California Davis, Califórnia, 2008.
- FELL, B. V. et al. Experimental investigation of inelastic cyclic buckling and fracture of steel braces. *Journal of Structural Engineering*, v. 135, n. 1, p. 19–32, 2009.
- FENG, Y. T.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. Determination of travel directions in path-following methods. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 21, n. 7, p. 43–59, 1995.
- FENG, Y. T.; PERIÉ, D.; OWEN, D. R. J. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Computers Structures*, v. 58, n. 3, p. 479–485, 1996.
- FENG, Y. T.; PERIÉ, D.; OWEN, D. R. J. On the sign of the determinant of the structural stiffness matrix for determination of loading increment in arc-length algorithms. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 13, p. 47–49, 1997.
- FORDE, B. W. R.; STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers Structures*, v. 27, p. 625–630, 1987.
- FRANSSEN, J. M. Failure temperature of a system comprising a restrained column submitted to fire. *Fire Safety Journal*, v. 34, n. 2, p. 191–207, 2000.
- FRANSSEN, J. M.; GENS, F. Dynamic analysis used to cope with partial and temporary failures. In: FRANSSEN, J. M. et al. (Ed.). *Proceedings of SiF'04: Third International Structures in Fire workshop*. Ottawa, Canada: IRC, 2004.
- FRANSSEN, J. M.; SCHLEICH, J. B.; CAJOT, L. G. A simple model for the fire resistance of axially-loaded members according to eurocode 3. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 35, n. 1, p. 49–69, 1995. ISSN 0143974X.
- FRANSSEN, J. M. et al. A Simple Model for the Fire Resistance of Axially Loaded Members - Comparison with Experimental Results. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 37, n. 3, p. 175–204, 1996. ISSN 0143974X.
- FREITAS, J. A. T. de; RIBEIRO, A. C. B. S. Large displacement elastoplastic analysis of space trusses. *Computers Structures*, v. 44, n. 5, p. 1007 – 1016, 1992.
- FRIED, I. Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 47, p. 283–297, 1984.
- FUKUTA, T. et al. Seismic performance of steel frames with inverted v braces. *Journal of Structural Engineering*, v. 115, n. 8, p. 2016–2028, 1989.
- GADALA, M. S.; DOKAINISH, M. A.; ORAVA, G. A. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 887–914, 1984.

- GOGGINS, J. M. et al. Behaviour of tubular steel members under cyclic axial loading. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 62, n. 1, p. 121 – 131, 2006.
- GRECO, M.; CODA, H. B. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006a.
- HILL, C. D.; BLANDFORD, G. E.; WANG, S. T. Post-buckling analysis of steel space trusses. *Journal of Structural Engineering*, v. 115, n. 4, p. 900–919, 1989.
- HO, H. C.; CHUNG, K.; WONG, Y. Structural fire engineering study on unprotected long span steel trusses. *Procedia Engineering*, v. 14, p. 1132 – 1139, 2011. The Proceedings of the Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction.
- HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics : a Continuum Approach for Engineering*. 1. ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons, 2000. 205 p. ISSN 1572-9648. ISBN 0471823198. Disponível em: <<http://www.citeulike.org/group/2006/article/1044720>>.
- IKEDA, K.; MAHIN, A.; DERMITZAKIS, S. N. *Phenomenological modeling of steel braces under cyclic loading*. Berkeley, CA: Earthquake Engineering Research Center, 1984.
- IU, C.; CHAN, S. A simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, n. 10, p. 1495–524, 2004.
- JIN, J.; EL-TAWIL, S. Inelastic cyclic model for steel braces. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 129, n. 5, p. 548–557, 2003.
- KASHANI, M. M. et al. Phenomenological hysteretic model for corroded reinforcing bars including inelastic buckling and low-cycle fatigue degradation. *Computer Structures*, v. 156, p. 58–71, 2015.
- KASHANI, M. M. et al. Finite element investigation of the influence of corrosion pattern on inelastic buckling and cyclic response of corroded reinforcing bars. *Engineering Structures*, v. 75, p. 113 – 125, 2014. ISSN 0141-0296.
- KASSIMALI, A.; BIDHENDI, E. Stability of trusses under dynamic loads. *Comput and Struct*, v. 29, n. 3, p. 381–392, 1988.
- KIRBY, R. R.; PRESTON, B. R. High Temperature Properties of Hot-rolled, Structural Steels for Use in Fire Engineering Design Studies. *Fire Safety Journal*, v. 13, n. 1, p. 17–26, 1988.
- KONDOH, K.; ATLURI, S. Influence of local buckling on global instability: Simplified, large deformation, post-buckling analyses of plane trusses. *Computers Structures*, v. 21, n. 4, p. 613 – 627, 1985.
- KOUHIA, R.; MIKKOLA, M. Tracing the equilibrium path beyond simple critical points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, n. 12, p. 2923–2941, 1989.
- KRENK, S. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, n. 5, p. 823–839, 1995.
- KRENK, S. *Non-linear modeling and analysis of solids and structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 361 p. ISBN 978-0-511-60413-3.

- KRENK, S.; HEDEDAL, O. A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 123, n. 1, p. 95–107, 1995.
- KRISHNAMOORTHY, C. S.; RAMESH, G.; DINESH, K. U. Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 22, p. 109–142, 1996.
- KRISHNAN, S. Modified elastofiber element for steel slender column and brace modeling. *Journal of Structural Engineering*, v. 136, n. 11, p. 1350–1366, 2010.
- KZAM, A. K. L. *Análise da instabilidade estrutural global e local pelo mef posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio*. 236 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016.
- LACERDA, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. 107 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.
- LAM, W. F.; MORLEY, C. T. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. *Journal of Structural Engineering*, v. 118, p. 169–185, 1992.
- LANDESMANN, A.; BATISTA, E.; ALVES, J. Implementation of advanced analysis method for steel-framed structures under fire conditions. *Fire Safety Journal*, v. 40, n. 4, p. 339–66, 2005.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. Chichester: John Wiley Sons, 2004. 356 p. ISBN 0-470-84789-1.
- LI, G.; FAHNESTOCK, L. A.; LI, H. N. Simulation of steel brace hysteretic response using the force analogy method. *Journal of Structural Engineering*, v. 139, n. 4, p. 526–536, 2013.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese (Tese de Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- MAISON, B.; POPOV, E. Cyclic response prediction for braced steel frames. *Journal of the Structural Division*, v. 106, p. 1401–1416, 1980.
- MANSON, S. S. Fatigue: A complex subject—some simple approximations. *Exp. Mech.*, v. 5, n. 4, p. 193–226, 1965.
- MEEK, J. L.; TAN, H. S. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg*, v. 47, p. 261–282, 1984.
- MESQUITA, L. et al. Experimental and numerical research in the critical temperature of laterally unrestrained steel beams. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 61, n. 10, p. 1435–46, 2005.

- MINSKI, R. L. *Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, 1977.
- MURTHA-SMITH, E. Nonlinear analysis of space trusses. *Journal of Structural Engineering*, v. 120, n. 9, p. 2717–2736, 1994.
- NAJJAR, S.; BURGESS, I. Nonlinear analysis for three-dimensional steel frames in fire conditions. *Engineering Structures*, v. 18, n. 1, p. 77–89, 1996.
- NETO, E. A. de S.; FENG, Y. On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and ‘snap-backs’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 179, n. 1, p. 81–89, 1999.
- OGDEN, R. *Non-linear Elastic Deformations*. [S.l.]: Dover Publications, 1997. ISBN 9780486696485.
- PAPADRAKAKIS, M. Inelastic post-buckling analysis of trusses. *Journal of Structural Engineering*, v. 109, n. 9, p. 2129–2147, 1983.
- PASCON, J. *Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- PASCON, J. *Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica*. Tese (Dissertação de Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- PASCON J.; CODA, H. Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 76, p. 2013, 21–38.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 133, p. 25–41, 2017.
- PECKNOLD, D.; GHABOUSSI, J.; HEALEY, T. Snap-through and bifurcation in a simple structure. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 111, n. 7, p. 909–922, 1985.
- PETERSON, A.; PETERSSON, H. On finite-element analysis of geometrically nonlinear problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 51, p. 277–286, 1985.

- PIAN, T. H. H.; TONG, P. Variational formulation of finite-displacements analysis. In: VEUBEKE, B. F. de (Ed.). *High Speed Computin 9 of Elastic Structures*. Liege: University of Liege, 1971. p. 43–63.
- PORCARI, G. L. F.; ZALOK, E.; MEKKY, W. Fire induced progressive collapse of steel building structures: A review of the mechanisms. *Engineering Structures*, v. 82, p. 261 – 267, 2015. ISSN 0141-0296.
- POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 17, p. 1455–1467, 1981.
- POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, n. 10, p. 1455–1467, 1981.
- POWELL, G. H.; CHEN, P. F. S. 3d beam-column element with generalized plastic hinges. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 112, n. 7, p. 627–641, 1986.
- PROTA, A.; CICCIO, F.; COSENZA, E. Cyclic behavior of smooth steel reinforcing bars: Experimental analysis and modeling issues. *Journal of Earthquake Engineering*, v. 13, n. 4, p. 500–519, 2009.
- PSOTNY, M.; RAVINGER, J. Von misses truss with imperfection. *Slovak Journal of Civil Engineering*, v. 2003, n. 2, p. 1–7, 1991.
- RAMESH, G.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, n. 21, p. 3633–3657, 1994.
- RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: W. STEIN E., B. K. W. (Ed.). *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Heidelberg: Springer, 1981.
- REMENNIKOV, A. M.; WALPOLE, W. R. Modelling the inelastic cyclic behaviour of a bracing member for work-hardening material. *International Journal of Solids and Structures*, v. 34, n. 27, p. 3491 – 3515, 1997.
- RIBEIRO, J. C. L. *Desenvolvimento e aplicação de sistema computacional para simulação via método dos elementos finitos do comportamento de estruturas de aço e mistas em situação de incêndio*. 260 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.
- RIGOBELLO, R. *Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio*. 296 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 7, p. 22, 1979.
- SAFFARI, H.; FADAEE, M. J.; TABATABAEI, R. Nonlinear analysis of space trusses using modified normal flow algorithm. *Journal of Structural Engineering*, v. 134, n. 6, p. 998–1005, 2008.

SANCHES, R. A. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 14, n. 1, p. 52–71, 2017.

SANCHES, R. A. K. *Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Tese (Tese de Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

SANCHES R. A. K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, n. 14, p. 2014, 3401–3418.

SANTIAGO, A. et al. Numerical study of a steel sub-frame in fire. *Computers and Structures*, v. 86, n. 15-16, 2008.

SCHULZ, M.; FILIPPOU, F. P. Non-linear spatial timoshenko beam element with curvature interpolation. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 50, p. 761–785, 1990.

SCHWEIZERHOF, K. H.; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, p. 261–279, 1986.

SHABACK, B.; BROWN, T. Behaviour of square hollow structural steel braces with end connections under reversed cyclic axial loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v. 30, n. 4, p. 745–753, 2003.

SIMONS, J.; BERGAN, P. G.; NYGARD, M. K. Hyperplane displacement control method in nonlinear analysis. In: LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T.; PARK, K. (Ed.). *Innovative Methods for Nonlinear Problems*. Swansea: Pineridge press, 1984. cap. 19, p. 345–363.

THAI, H. T.; KIM, S. E. Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 65, n. 10, p. 1987 – 1994, 2009.

THAI, H. T.; KIM, S. E. Nonlinear inelastic time-history analysis of truss structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 67, n. 12, p. 1966–1972, 2011.

TREMBLAY, R.; ARCHAMBAULT, M. H.; FILIATRAULT, A. Seismic response of concentrically braced steel frames made with rectangular hollow bracing members. *Journal of Structural Engineering*, v. 129, n. 12, p. 1626–1636, 2003.

TRUONG, V. H.; KIM, S. E. Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm. *Advances in Engineering Software*, v. 121, p. 59 – 74, 2018. ISSN 0965-9978.

URIZ, P.; FILIPPOU, F. C.; MAHIN, S. A. Model for cyclic inelastic buckling of steel braces. *Journal of Structural Engineering*, v. 134, n. 4, p. 619–628, 2008.

USMANI, A. et al. Fundamental principles of structural behaviour under thermal effects. *Fire Safety Journal*, v. 36, n. 8, p. 721–744, 2001.

WAGNER, W.; WRIGGERS, P. Eng. comput. *A Simple Method for the Calculation of Post-Critical Branches*, v. 5, p. 103–109, 1988.

WANG, Y.; MOORE, D. Effect Of Thermal Restraint On Column Behaviour In A Frame. *Fire Safety Science*, v. 4, p. 1055–1066, 1994. ISSN 18174299.

WANG, Y. C. *Steel and composite structures - Behaviour and design for fire safety*. New York: Spon Press, 2002. 351 p.

WANG, Y. C. Postbuckling behavior of axially restrained and axially loaded steel columns under fire conditions. *Journal of Structural Engineering*, v. 130, n. 3, p. 371–380, 2004.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *Int. J. Solids Struct*, v. 15, p. 529–551, 1979.

WUTZOW, W. W. *Formulação do método dos elementos de contorno para materiais porosos reforçados*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade de São Paulo / École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, 2008.

YANG, Y. B.; LIN, T. J.; LEU, L. J. Inelastic postbuckling response of steel trusses under thermal loadings. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 134, n. 4, 2008.

YANG, Y. B. et al. Inelastic postbuckling response of steel trusses under thermal loadings. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 64, n. 12, p. 1394–1407, 2008.

YARZA, A.; CAVIA, P.; PARKE, G. 73. an introduction to the fire analysis of double-layer grids. In: _____. *Space Structures 4*. [S.l.: s.n.], 1983. p. 683–692.

ZAYAS, V. A.; POPOV, E. P.; MAHIN, S. A. *Cyclic inelastic buckling of tubular steel braces*. Berkeley, CA: Univ. of California, Earthquake Engineering Research Center, 1980.

ZHENG, H. D.; FAN, J. Analysis of the progressive collapse of space truss structures during earthquakes based on a physical theory hysteretic model. *Thin-Walled Structures*, v. 123, p. 70 – 81, 2018. ISSN 0263-8231.

ZHENG, H. D.; FAN, J. Phenomenological hysteretic model for steel braces including inelastic postbuckling and low-cycle fatigue prediction. *Journal of Structural Engineering*, v. 145, n. 6, 2019.

ZHENG, H. D.; FAN, J.; LONG, X. H. Analysis of the seismic collapse of a high-rise power transmission tower structure. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 134, p. 180–193, 2017.

ZHOU, M.; CARDOSO, R. P.; BAHAI, H. A new material model for thermo-mechanical analysis of steels in fire. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier Ltd, v. 159, n. May, p. 467–486, 2019. ISSN 00207403. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.05.007>.

ZHU, K.; AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S. Nonlinear dynamic analysis of lattice structures. *Computers Structures*, v. 52, n. 1, p. 9 – 15, 1994.