

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**RODRIGO YUKIO MIZOTE KAWAMOTO**

**COMPARAÇÃO DE MODELOS DE VIGA-COLUNA DE  
TIMOSHENKO APLICADOS A PROBLEMAS NÃO  
LINEARES NO CONTEXTO DA FORMULAÇÃO  
CORROTACIONAL DO MEF**

MARINGÁ  
2021

**RODRIGO YUKIO MIZOTE KAWAMOTO**

**COMPARAÇÃO DE MODELOS DE VIGA-COLUNA DE  
TIMOSHENKO APLICADOS A PROBLEMAS NÃO  
LINEARES NO CONTEXTO DA FORMULAÇÃO  
CORROTACIONAL DO MEF**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas, para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza

MARINGÁ  
2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

K22c	<p>Kawamoto , Rodrigo Yukio Mizote</p> <p>Comparação de modelos de viga-coluna de Timoshenko aplicados a problemas não lineares no contexto da formulação corrotacional do MEF / Rodrigo Yukio Mizote Kawamoto . -- Maringá, PR, 2021. 82 f. : il. color., figs.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza . Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2021.</p> <p>1. Análise não linear . 2. Deformação de cisalhamento . 3. Deslocamentos residuais . 4. Potra-Pták . 5. Formulação corrotacional do MEF. I. Souza , Luiz Antonio Farani de , orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 23.ed. 624</p>
------	---

RODRIGO YUKIO MIZOTE KAWAMOTO

**COMPARAÇÃO DE MODELOS DE VIGA-COLUNA DE TIMOSHENKO  
APLICADOS A PROBLEMAS NÃO LINEARES NO CONTEXTO DA  
FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DO MEF**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 30/08/2021. Julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

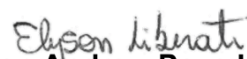
**BANCA EXAMINADORA**



**Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá  
Orientador



**Prof. Dr. Carlos Humberto Martins**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá



**Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo Liberati**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá



**Prof. Dr. Leandro Vanalli**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá



**Prof. Dr. Leonardo Martins e Silva**  
Curso de Engenharia Civil  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza. Minha eterna gratidão pela sua orientação, seu companheirismo e seu constante incentivo desde o primeiro dia de orientação para a realização deste trabalho.

A toda a minha família, em especial meus pais e minha irmã, por todo o suporte, companhia e amor, fundamentais para que eu vencesse mais este desafio de minha vida.

Aos meus colegas e amigos Douglas Fernandes dos Santos e Amanda Letícia Soares, pelas longas conversas em que intercalávamos o tema dos nossos trabalhos com amenidades. Vocês fizeram com que o estudo de implementação computacional da análise não linear de estruturas se tornasse muito menos árduo, muito obrigado.

A todos os Professores, colaboradores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UEM que contribuíram para a minha formação.

A todos os meus amigos próximos, Giuseppe Pietro, Guilherme Possas, Carlos Bolfer Filho, Mateus Moraes, Newman Ishikawa, Helder Kuroda, Lorena Fassina, Alexandre Zanin, Wellington Pereira. Agradeço pela amizade de longa data e por sempre estarem de uma forma ou de outra motivando o desenvolvimento e a concretização deste trabalho.

A Julia N. Hashimoto, pelo enorme incentivo e apoio para ingressar no mestrado e concluir várias etapas do mesmo.

Aos meus amigos Nicolas Germano, Juninho Loop, Giovanna Casagrande e Thaise Rocha, pelo companheirismo que me trouxe muita alegria, energia e inspiração para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao DAAD (Serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico), por me contemplar com uma bolsa de estudos no programa *Hochschulwinterkurs 2020*. Agradeço também a todos os amigos que fizeram parte dessa experiência inesquecível comigo, em especial a Jessica Sauthier, pela amizade e constante ajuda no desenvolvimento desta dissertação.

Ao Dr. Wilson Keniti Ota, minha eterna gratidão pela excepcional ajuda médica no momento em que eu e minha família mais precisamos ao sermos acometidos pela Covid-19. Muito obrigado também a todos os profissionais da área da saúde que sacrificam suas vidas em prol dos outros, principalmente durante a atual pandemia.

A Deus, sempre presente me iluminando e guiando para os melhores caminhos possíveis. Por fim, a todos que de algum modo contribuíram para o meu crescimento e desenvolvimento deste trabalho.

*“Uma ideia é como um vírus. Resiliente. Altamente contagioso. E mesmo a menor semente de uma ideia pode crescer. Pode crescer para definir ou destruir você.”*

A Origem  
(Christopher Nolan)

## RESUMO

Na atualidade, a crescente busca por economia e a aplicação de materiais mais resistentes levam à concepção de estruturas mais flexíveis. Este trabalho tem por objetivos realizar a análise estática de sistemas estruturais planos (viga e pórtico) com comportamento não linear geométrico e comparar diferentes modelos de viga-coluna baseados na teoria de viga de Timoshenko. As estruturas são discretizadas com a formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos. A solução aproximada do problema estrutural é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo com ordem de convergência cúbica. Testes numéricos de problemas de viga e de pórticos encontrados na literatura são efetuados com o programa livre Scilab. As formulações dos modelos são comparadas a partir das trajetórias de equilíbrio com pontos limites obtidas com a técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais. Este trabalho mostra que a consideração da deformação de cisalhamento pode ocasionar deformações maiores na estrutura para níveis menores de carga, quando há grandes deslocamentos na mesma.

**Palavras-chave:** Análise Não Linear; Deformação de Cisalhamento; Deslocamentos Residuais; Potra-Pták; Formulação Corrotacional.

## ABSTRACT

Currently, the growing search for economy and the application of more resistant materials lead to the design of more flexible structures. This work aims to perform the static analysis of plane structural systems (beam and frame) with geometric nonlinear behavior and to compare different beam-column models based on Timoshenko's beam theory. The structures are discretized with the co-rotational formulation of the Finite Element Method. The approximate solution of the structural problem is obtained through an incremental and iterative procedure with order of cubic convergence. Numerical tests of beam and frames problems found in the literature are performed with the Scilab free software. The model formulations are compared from the equilibrium paths with limit points obtained with the Minimum Standard for Residual Displacements path-following technique. This work shows that considering the shear deformation can cause greater deformations in the structure for lower levels of load, when there are large displacements in the structure.

**Keywords:** Nonlinear Analysis; Shear Strain; Residual Displacements; Potra-Pták; Co-Rotational Formulation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Shanghai World Financial Tower visto de cima e seu modelo computacional para análise estrutural.....	15
Figura 2.1 - Leis constitutivas simplificadas para o aço e concreto .....	26
Figura 2.2 - Viga engastada de rigidez EI e comprimento L.....	27
Figura 2.3 - Trajetória de Equilíbrio.....	27
Figura 2.4 - Pontos críticos e fenômenos na trajetória de equilíbrio: (a) <i>snap-through</i> , (b) <i>snap-back</i> e (c) bifurcação.....	29
Figura 2.5 - Descrições cinemáticas de um elemento estrutural .....	30
Figura 2.6 - Descrição Lagrangiana Total (LT) .....	31
Figura 2.7 - Descrição Lagrangiana Atualizada (LA).....	32
Figura 2.8 - Descrição Corrotacional (CR) .....	33
Figura 2.9 - Movimento de um corpo rígido em (a) e movimento com alteração na forma do corpo em (b). Nos dois casos tem-se <i>deformation</i> , mas com medida de <i>strain</i> nula em (a) e diferente de zero em (b).....	35
Figura 2.10 - Deformação na barra.....	35
Figura 3.1 – Mecanismos de deformação: a) Euler-Bernoulli, b) Timoshenko .....	41
Figura 3.2 – Configurações inicial e atual, devido às deformações de flexão, do elemento de viga-coluna .....	43
Figura 4.1– Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson .....	58
Figura 4.2– Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado .....	59
Figura 4.3 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento: <i>snap-through</i> .....	60
Figura 4.4 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento: matriz de rigidez tangente singular.....	60
Figura 4.5 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento: <i>snap-back</i> .....	61
Figura 4.6 – Algoritmo do procedimento incremental e iterativo com o método de Potra-Pták associado à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais .....	64
Figura 5.1 – Viga em balanço: a) modelo estrutural; e b) trajetórias de equilíbrio.....	67
Figura 5.2 – Configurações deformadas da viga em balanço.....	67
Figura 5.3 – Pórtico de Williams: a) modelo estrutural; e b) trajetórias de equilíbrio.....	68

Figura 5.4 – Pórtico de Tang, Zhou e Chan (2015): a) modelo estrutural; e b) trajetórias de equilíbrio.....	70
Figura 5.5 – Pórtico de Lee: a) modelo estrutural e b) trajetórias de equilíbrio.....	72

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

CR	Descrição Corrotacional
LA	Descrição Lagrangiana Atualizada
LT	Descrição Lagrangiana Total
MEF	Método dos Elementos Finitos

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

<b>A</b>	Área da seção transversal
<b>B</b>	Matriz da equação 3.23
<b>C<sub>1</sub></b>	Matriz da equação 3.41
<b>C<sub>2</sub></b>	Matriz da equação 3.42
<b>C<sub>3</sub></b>	Matriz da equação 3.43
<b>D</b>	Matriz constitutiva
<b>E</b>	Módulo de elasticidade longitudinal
<b><i>F<sub>int</sub></i></b>	Vetor de forças internas
<b><i>F<sub>r</sub></i></b>	Vetor de forças de referência que caracteriza a direção da força externa
<b>G</b>	Módulo de elasticidade transversal
<b>I</b>	Momento de inércia
<b>K</b>	Matriz de rigidez
<b>K<sub>el</sub></b>	Matriz de rigidez do elemento de pórtico
<b>K<sub>E</sub></b>	Parcela elástica da matriz de rigidez
<b>K<sub>G</sub></b>	Parcela geométrica da matriz de rigidez
<b>K<sub>M</sub></b>	Parcela material da matriz de rigidez
<b>L<sub>0</sub></b>	Comprimento inicial
<b>L</b>	Comprimento final
<b>M</b>	Momento
<b><math>\bar{M}_i</math></b>	Momento local no elemento de viga i
<b>N</b>	Força normal
<b>Q</b>	Esforço cortante
<b>U</b>	Deslocamento nodal
<b>X<sub>i</sub></b>	Coordenada x do nó i do elemento de viga no sistema global
<b>Y<sub>i</sub></b>	Coordenada y do nó i do elemento de viga no sistema global

### LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

<b>c</b>	Equação de restrição
<b>f</b>	Vetor de cargas

<b>g</b>	Vetor de forças desequilibradas (ou forças residuais)
<b>h</b>	Altura
$k_{cis}$	Coefficiente de correção do cisalhamento
$k_d$	Número de iterações desejadas por passo de carga
$k_{m\acute{a}x}$	Número máximo de iterações no passo de carga
<b>l</b>	Comprimento de arco da trajetória de equilíbrio
$n_{p,total}$	Número de passos ou incrementos de carga
<b>p</b>	Vetor de deslocamentos globais
<b>r</b>	Raio de giração
<b>t</b>	Tempo
$t_1$	Equação 3.44
$t_2$	Equação 3.45
$\Delta t$	Incremento de tempo
<b>u</b>	Vetor de deslocamentos

## LETRAS GREGAS

$\gamma$	Deformação cisalhante
$\delta$	Subincremento
$\Delta$	Incremento
$\varepsilon$	Deformação específica
$\varepsilon_A$	Deformação de Almansi ou deformação de Euler-Almansi
$\varepsilon_E$	Deformação de engenharia ou deformação de Cauchy
$\varepsilon_{eff}$	Deformação efetiva
$\varepsilon_G$	Deformação de Green
$\varepsilon_L$	Deformação logarítmica
$\theta_{il}$	Rotação nodal local do elemento i
$\kappa$	Curvatura
$\lambda$	Parâmetro de carga
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\sigma$	Tensão normal
$\emptyset$	Equação 3.36

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	JUSTIFICATIVA.....	19
1.2	OBJETIVOS .....	20
1.3	METODOLOGIA .....	20
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	21
<b>2</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR</b>	<b>23</b>
2.1	ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS .....	23
2.2	TIPOS DE NÃO LINEARIDADES .....	25
<b>2.2.1</b>	<b>Não Linearidade Física.....</b>	<b>25</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Não Linearidade Geométrica.....</b>	<b>26</b>
2.3	TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO .....	27
2.4	DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS .....	29
<b>2.4.1</b>	<b>Descrição Lagrangiana Total (LT): .....</b>	<b>31</b>
<b>2.4.2</b>	<b>Descrição Lagrangiana Atualizada (LA): .....</b>	<b>32</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Descrição Corrotacional (CR): .....</b>	<b>32</b>
2.5	DEFLEXÃO, DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO .....	34
2.6	MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO UNIDIMENSIONAL .....	35
<b>2.6.1</b>	<b>Deformação de engenharia .....</b>	<b>36</b>
<b>2.6.2</b>	<b>Deformação de Green.....</b>	<b>36</b>
<b>2.6.3</b>	<b>Deformação Logarítmica .....</b>	<b>37</b>
<b>2.6.4</b>	<b>Deformação de Almansi .....</b>	<b>37</b>
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO CORROTACIONAL do elemento de viga-coluna 2d.....</b>	<b>39</b>
3.1	GENERALIDADES SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	39
3.2	TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO .....	40
3.3	MODELO DE VIGA-COLUNA DE EULER-BERNOULLI APRESENTADO POR CRISFIELD (1991) E YAW (2009).....	42

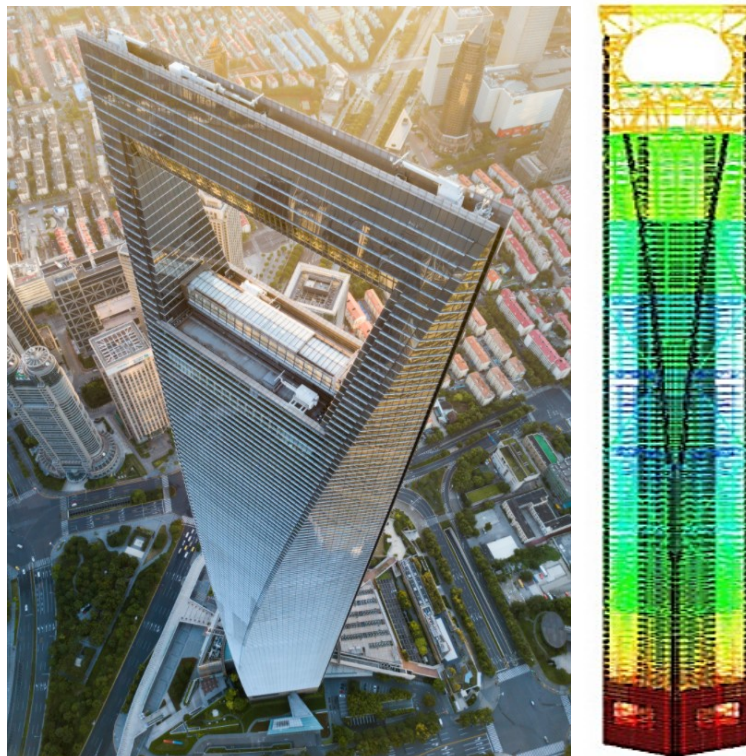
3.4	MODELO DE VIGA-COLUNA DE TIMOSHENKO PROPOSTO POR BATTINI (2002) .....	46
3.5	MODELO DE VIGA-COLUNA DE TIMOSHENKO PROPOSTO POR KIEN (2012).....	47
3.6	MODELO DE VIGA-COLUNA DE TIMOSHENKO PROPOSTO POR TANG, ZHOU E CHAN (2015).....	49
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL .....</b>	<b>52</b>
4.1	ANÁLISE INCREMENTAL E ANÁLISE ITERATIVA .....	52
4.2	MÉTODOS NUMÉRICOS DE NEWTON-RAPHSON E DE POTRA-PTÁK PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES.....	53
4.3	TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO .....	56
4.4	TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO: COMPRIMENTO DE ARCO.....	57
4.5	TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO: NORMA MÍNIMA DOS DESLOCAMENTOS RESIDUAIS .....	62
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>65</b>
5.1	VIGA EM BALANÇO SUJEITA A UM MOMENTO.....	66
5.2	PÓRTICO DE WILLIAMS .....	68
5.3	PÓRTICO PROPOSTO POR TANG, ZHOU E CHAN (2015).....	69
5.4	PÓRTICO DE LEE .....	71
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>75</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Desde as últimas décadas, vive-se a cada dia uma verdadeira revolução na área da tecnologia e da informática. Isso trouxe e continua trazendo enormes avanços para a sociedade, como a fabricação de processadores cada vez mais velozes, o aumento da capacidade de armazenamento de dados e o desenvolvimento de sistemas computacionais cada vez mais robustos. Como consequência, tais avanços influenciam a engenharia estrutural de forma direta e significativa na maneira de projetar, calcular e analisar estruturas (KIMURA, 2018).

Um dos principais objetivos da Engenharia Estrutural é tornar os sistemas estruturais mais econômicos, por meio da redução do seu peso e do consumo de materiais, sem, no entanto, diminuir a sua segurança e durabilidade. Nesse contexto, Von Paraski (2012) afirma que vários pesquisadores têm se dedicado e direcionado suas pesquisas para o desenvolvimento de metodologias melhores e mais eficientes para uma análise não linear de sistemas estruturais, que apresente resultados cada vez mais confiáveis e condizentes com a realidade.

**Figura 1.1 - Shanghai World Financial Tower visto de cima e seu modelo computacional para análise estrutural**



Fonte: Architizer (2021) e Lee (2007)



As análises não lineares de estruturas vêm sendo consideradas um paradigma nos dias atuais, influenciando de forma significativa a evolução dos modelos estruturais usualmente empregados no cálculo dos edifícios. Segundo Silva (2011), isto ocorre devido aos grandes avanços dos materiais e recursos computacionais empregados na engenharia, os quais têm possibilitado a construção de estruturas cada vez mais altas, esbeltas e flexíveis, solicitadas por diversos tipos de carregamentos, como o edifício da Figura 1.1. Deste modo, as estruturas ficam sujeitas a grandes mudanças de forma e seu material pode vir a trabalhar em condições nas quais as fórmulas da elasticidade linear não mais se aplicam.

Além disso, os sistemas computacionais atuais destinados ao cálculo de estruturas oferecem inúmeros tipos de análises não lineares, tornando assim fundamental que o Engenheiro Estrutural tenha noções, mesmo que básicas, da influência dos seus efeitos nos resultados obtidos no processamento (KIMURA, 2018).

Há dois tipos básicos de comportamento não linear que ocorrem em análises estruturais. O primeiro é a não linearidade física, causada por um comportamento não linear, plástico ou viscoso das propriedades do material que compõe a estrutura. O segundo tipo é a não linearidade geométrica, que ocorre quando as deformações na estrutura são suficientemente grandes para causar mudanças significativas nela, de modo que as equações de equilíbrio sejam formuladas na configuração deformada da estrutura. A análise não linear geométrica será o foco do presente trabalho.

Quanto mais esbelto é um elemento estrutural, mais importante se torna a não linearidade geométrica, o que origina vários fenômenos que não são encontrados em sistemas lineares. Segundo Rocha (2000), esses fenômenos incluem a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos críticos (pontos limites e de bifurcação) ao longo do caminho não linear de equilíbrio, onde a estrutura pode exibir saltos dinâmicos. A presença da não linearidade exige o desenvolvimento de técnicas de cálculo mais sofisticadas e um conhecimento cada vez mais profundo do comportamento estrutural.

Para viabilizar essas análises, é de fundamental importância o conhecimento de metodologias de solução numérica, bem como dos detalhes da implementação computacional de todas as etapas do processo de análise estrutural. A análise da estabilidade de elementos estruturais esbeltos por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) envolve a solução de um sistema de equações algébricas não lineares, e em análises não lineares o sistema não pode ser resolvido diretamente, tornando-se necessário o emprego de técnicas iterativas baseadas em soluções sucessivas de sistemas lineares, até que a convergência seja alcançada.

Resumidamente, existem duas classes de métodos de solução desse tipo de sistema de equações: a primeira classe baseia-se na adaptação computacional do método de perturbação desenvolvido por Koiter (1970), e a segunda consiste nos métodos que buscam resolver as equações não lineares passo a passo, como os métodos puramente incrementais ou incrementais-iterativos (VON PARASKI, 2012).

Somente por meio do profundo entendimento desses métodos de solução e do código de programação implementado será possível criar rotinas cada vez melhores que encontrem soluções mais próximas da realidade em menos tempo e com menor custo computacional.

Esta pesquisa será focada na análise do sistema estrutural do tipo pórtico plano, que é definido como um modelo estrutural plano de uma estrutura tridimensional e que pode corresponder a uma parcela da estrutura ou pode representar uma simplificação do comportamento tridimensional. Modelos estruturais desse tipo estão contidos em um plano e as solicitações externas (cargas) também estão contidas nesse plano. Isso inclui forças com componentes nas direções dos eixos X e Y e momentos em torno do eixo Z (eixo saindo do plano) (MARTHA, 2017).

As análises de flambagem e pós-flambagem de pórticos são importantes em um projeto de estruturas, em particular para estruturas elásticas esbeltas. Em estruturas aporticadas, a análise de vigas e colunas como membros independentes pode conduzir a resultados errôneos quando se considera grandes deslocamentos (GALVÃO; GONCALVES; SILVEIRA, 2005).

Ademais, as estruturas contemporâneas de aço invariavelmente contêm uma enorme quantidade de membros esbeltos, o que as torna propensas a efeitos de instabilidade em decorrência da não linearidade geométrica. O efeito dessa não linearidade fica relevante nos membros sujeitos a esforços axiais de compressão e contribui para a diminuição da rigidez estrutural, aumentando, assim, a deformação do sistema (IU; BRADFORD, 2012).

De maneira geral, a análise do comportamento de elementos estruturais é realizada com base na teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli, na qual as seções transversais permanecem planas e perpendiculares à linha neutra após a deformação. No entanto, essa teoria não considera os efeitos da deformação de cisalhamento nas seções (SILVA et al., 2018).

A teoria de viga de Timoshenko, por outro lado, emprega uma representação mais precisa da flexão da viga, a qual permite a inclusão da deformação de cisalhamento. A seção transversal inicialmente normal ao eixo longitudinal da viga permanece plana, mas não

necessariamente normal a esse eixo após a deformação. Essa teoria, portanto, é mais adequada para a análise de vigas espessas (KIEN, 2004; ONYIA; ROWLAND-LATO, 2018; RODRIGUES; BURGOS; MARTHA, 2019).

Com base nesses fatos, inúmeros esforços têm sido realizados a fim de criar modelos de Elementos Finitos que incluam os efeitos da deformação de cisalhamento para a análise não linear de vigas e de pórticos. Há várias pesquisas que tratam acerca da análise de estruturas com a teoria de viga de Timoshenko. Edem (2006) propôs um elemento finito de viga de Timoshenko com dois nós. Uma relação entre a rotação de flexão e a rotação de cisalhamento foi obtida usando funções de forma interdependentes.

Jafari, Vahdani e Rahimian (2010) apresentaram uma matriz de flexibilidade consistente para um elemento de viga-coluna baseado na viga de Timoshenko para grandes deslocamentos. Kien (2012) aplicou a formulação corrotacional de um elemento de viga Timoshenko para análise em grandes deslocamentos de vigas e de pórticos planos.

Tang, Zhou e Chan (2015) desenvolveram um elemento de viga-coluna 2D não linear que considera a deformação por cisalhamento. Silva, Gutiérrez e Oliveira (2016) descreveram um modelo de elemento finito de viga unificado que não apresenta bloqueio por deformação a corte e engloba as teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

Freund e Karakoç (2016) propuseram um modelo de viga de Timoshenko o qual leva em conta o empenamento da seção transversal. Esse modelo é uma extensão da teoria de Saint-Venant para torção uniforme de vigas com carregamentos genéricos.

Gan, Huong e Kien (2017) realizaram análises de pós-flambagem de vigas e pórticos planos com elementos de viga baseados na teoria de viga de Timoshenko no contexto da formulação corrotacional.

Wong; Sulistio e Syamsoeyadi (2018) fizeram um aprimoramento do Método dos Elementos Finitos com funções de interpolação de Kriging para as análises estática e dinâmica de flambagem com vigas de Timoshenko.

Tang et al. (2019) propuseram um elemento de viga-coluna o qual permite o efeito P- $\delta$  local e a deformação por cisalhamento para análise de segunda ordem. Tang et al. (2021) apresentaram uma formulação corrotacional consistente para elementos bidimensionais de viga-coluna de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Verificaram que os momentos nodais equivalentes são afetados pela mudança geométrica do elemento e, conseqüentemente, contribuem na matriz de rigidez geométrica.

Souza et al. (2021) apresentaram um modelo numérico-computacional para pórticos com comportamento geométrico não linear, considerando a formulação corrotacional de Elementos Finitos e as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

A análise não linear das estruturas é essencial para a concepção de estruturas aporticadas mais esbeltas, flexíveis e eficientes, sem comprometer sua segurança e qualidade final. Além disso, esse tipo de análise é fundamental para o estudo de ligações estruturais semirrígidas, estruturas próximas ao colapso devido a grandes modificações físicas e em sua geometria, e consequente perda de linearidade na tensão-deformação (LACERDA, 2014).

Há uma tendência crescente das normas atuais de se incorporar, direta ou indiretamente, os efeitos das não linearidades nos projetos. No entanto, várias normas de projeto, mesmo que sugerindo o uso de análises não lineares, ainda apresentam inconsistências no sentido de estabelecer uma conexão entre as etapas de análise e a de projeto estrutural (SANTOS et al. 2012).

Além disso, a análise do comportamento de elementos estruturais é realizada, em geral, com base na teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli, na qual as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo neutro após a deformação, desconsiderando os efeitos da deformação de cisalhamento nas seções. Em contrapartida, a teoria de viga de Timoshenko utiliza uma representação mais precisa da flexão da viga, o que permite a inclusão da deformação de cisalhamento. Muitos trabalhos têm sido realizados com o objetivo de criar modelos de Elementos Finitos baseados nesta teoria de viga e, assim, considerar os efeitos da deformação de cisalhamento para a análise não linear de vigas e pórticos.

Portanto, percebe-se a necessidade de realização de pesquisas com implementação computacional que investiguem de forma mais aprofundada os avanços dos métodos nessa área e busquem resultados cada vez mais condizentes com a realidade, com a finalidade de se obter maior precisão e segurança em projetos envolvendo estruturas altamente deformáveis, como é o caso das estruturas de aço, por exemplo.

Em adição, esta pesquisa contribui na busca de estruturas mais econômicas, resultantes de um projeto mais coerente e seguro, incorporando em sua etapa de análise estrutural os efeitos da não linearidade geométrica em viga e pórticos planos.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é o desenvolvimento e a implementação de um código computacional em ambiente Scilab para a análise estática de sistemas estruturais planos (viga e pórtico) com comportamento não linear geométrico e comparar diferentes modelos de viga-coluna fundamentados na teoria de viga de Timoshenko.

Para isso, os seguintes objetivos específicos são definidos:

- a) Implementar o modelo de elemento de viga-coluna bidimensional baseado na teoria de viga de Euler-Bernoulli desenvolvida por Crisfield (1991) e Yaw (2009), cuja formulação é descrita no contexto corrotacional do Método dos Elementos Finitos;
- b) Implementar os modelos de elementos de viga-coluna bidimensionais baseados na teoria de viga de Timoshenko propostos por Battini (2002), Kien (2012), e Tang, Zhou e Chan (2015), cujas formulações são também descritas no contexto corrotacional do Método dos Elementos Finitos;
- c) Adaptar ao problema estrutural o método iterativo de Potra-Pták para a solução de sistemas de equações não lineares encontrados na literatura, em um procedimento incremental e combinando-o à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (Chan, 1988);
- d) Realizar análises estáticas não lineares de problemas de viga e pórticos planos já consagrados na literatura, obtendo-se a trajetória de equilíbrio com pontos limites de força e de deslocamento;
- e) Comparar os modelos implementados de viga-coluna baseados na teoria de Timoshenko entre si e com o modelo de viga-coluna clássico de Euler-Bernoulli e analisar os resultados numéricos, com o intuito de verificar a eficiência e as limitações do código computacional implementado.

## 1.3 METODOLOGIA

A realização deste trabalho se iniciará com a aquisição dos subsídios teóricos que possibilitem o desenvolvimento e implementação de códigos computacionais, a interpretação dos resultados e a consciente tomada de decisões sobre as análises numéricas. Dentre os principais assuntos a serem estudados, encontram-se: o método corrotacional dos Elementos Finitos, análise não linear de estruturas, métodos numéricos para a solução de sistemas de

equações não lineares, técnicas de continuação, teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e programação em ambiente Scilab.

Após essa preparação teórica, será realizada uma extensa revisão de literatura que englobe todos os assuntos relacionados ao problema da pesquisa. Em seguida, será iniciada a implementação computacional do elemento de pórtico plano em ambiente Scilab. Serão implementados os modelos de viga-coluna fundamentados na teoria de viga de Euler-Bernoulli (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009) e de Timoshenko (BATTINI, 2002; KIEN, 2012; TANG; ZHOU; CHAN, 2015) baseados na formulação corrotacional de Elementos Finitos.

Problemas de viga e pórticos planos com não linearidade geométrica encontrados na literatura serão analisados comparando-se as duas teorias de viga. Nessas análises será utilizado o procedimento incremental e iterativo de Potra-Pták, método alternativo ao procedimento clássico de Newton-Raphson, associado à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais. O algoritmo deverá ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa da estrutura com pontos limites de força e de deslocamento.

Por fim, a redação da dissertação será concluída para a subsequente a defesa. Além disso, os resultados obtidos da pesquisa serão submetidos a periódicos da área.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está estruturado em sete capítulos. No Capítulo 1 realiza-se uma introdução do tema a fim de contextualizar o problema. Além disso, aborda-se as justificativas, o objetivo geral, específicos e a metodologia aplicada para o desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta uma visão geral dos conceitos fundamentais da análise não linear de estruturas, tais como a trajetória de equilíbrio, tipos de não linearidade e medidas de deformação.

No Capítulo 3 são apresentados os modelos de viga-coluna bidimensionais fundamentados nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, sendo as formulações descritas no contexto corrotacional do Método dos Elementos Finitos.

O Capítulo 4 aborda os métodos numéricos para a resolução de sistemas de equações não lineares que ocorrem na análise não linear de estruturas, como também técnicas de continuação para traçar a trajetória de equilíbrio completa.

O Capítulo 5 apresenta exemplos numéricos de estruturas planas com comportamento não linear geométrico implementados com o programa Scilab, a fim de realizar comparações

entre diferentes modelos de viga-coluna baseados nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

No Capítulo 6 discute-se os resultados numéricos obtidos nos exemplos do Capítulo 5.

Por fim, no Capítulo 7 são apresentados a conclusão e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

Este capítulo apresenta alguns conceitos básicos que são pré-requisitos para o entendimento da análise não linear de estruturas, tais como os tipos de não linearidade, a trajetória de equilíbrio, descrições cinemáticas e as principais medidas de deformação.

### 2.1 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

A análise estrutural tem como principal objetivo determinar o comportamento de uma estrutura quando submetida a ações externas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos. Deve-se determinar a resposta da estrutura de modo a verificar se as restrições do projeto são atendidas, buscando tornar o processo de análise o mais eficiente possível (LACERDA, 2014).

De acordo com Pereira (2002), a maioria das estruturas de engenharia exibem um comportamento aproximadamente linear elástico sob cargas de serviços. No entanto, há exceções como arcos e edifícios altos, e estruturas sujeitas a um escoamento localizado prematuro ou fissuração, por exemplo, que apresentam um comportamento não linear. Antes de atingir o seu limite de resistência, quase todas essas estruturas vão apresentar uma resposta não linear significativa.

No contexto da análise estrutural, o método mais utilizado para a discretização de uma estrutura contínua, seguida da obtenção de soluções numéricas é o Método dos Elementos Finitos, devido à sua eficiência e aplicabilidade (GALVÃO, 2000). Esse método tem como objetivo discretizar, ou seja, dividir um meio contínuo em subdomínios, chamados elementos, interligados por pontos nodais nos quais os graus de liberdade são definidos.

A precisão deste método está diretamente ligada às condições de convergência e ao refinamento da malha de elementos, que em condições limites tenderiam à obtenção da solução exata do problema. Isto é, quanto maior o número de pontos na malha, maior o número de elementos, o que significa que mais refinada será a malha e, conseqüentemente, mais próxima da solução analítica do problema será a resposta obtida. Por outro lado, deve-se lembrar que a utilização de uma quantidade de elementos que gere uma solução satisfatória dentro da precisão e do tempo desejados reflete automaticamente em uma notável redução no custo computacional, sem prejuízos relacionados à confiabilidade dos resultados, uma vez que



após certo grau de precisão, as alterações na resposta obtida assumem valores muito pouco significativos (GALVÃO, 2000).

Segundo Bathe (2006), na análise linear de estruturas, a formulação do Método dos Elementos Finitos é construída assumindo as seguintes hipóteses no modelo estrutural:

- a) O material é linearmente elástico;
- b) Os deslocamentos nodais são infinitesimalmente pequenos; e
- c) As condições de contorno não se modificam durante a aplicação das cargas.

Nesse tipo de análise, o vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$  se relaciona linearmente com o vetor de cargas  $\mathbf{f}$  pela Equação (2.1):

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

Em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez. A principal hipótese do comportamento linear de uma estrutura se baseia no fato de que sua rigidez sempre se mantém inalterada durante todo o processo de carregamento dela, independente dos deslocamentos. Logo, se as cargas aumentarem por um fator  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha\mathbf{f}$ , então os deslocamentos aumentam pelo mesmo fator  $\alpha$ , resultando em  $\alpha\mathbf{u}$ .

A análise linear, que considera uma relação linear entre tensões e deformações (linearidade física) e entre deformações e deslocamentos (linearidade geométrica), é muito importante e muito utilizada devido à grande quantidade de situações que esta compreende, maior simplicidade de aplicação e ao fato de que o seu conhecimento já se encontra bem consolidado. No entanto, uma das dificuldades da análise linear é sua incapacidade de refletir o comportamento real de estruturas menos comuns, sob condições de carregamento não comuns ou ainda próximas ao colapso. Nesse contexto, surge a análise não linear física e geométrica, que tem grande aplicabilidade na engenharia estrutural, pois possibilita o conhecimento da capacidade resistente remanescente, após a análise ultrapassar os pontos críticos e/ou atingir deformações inelásticas finitas (SILVA, 2011).

Na análise não linear, a rigidez da estrutura depende dos deslocamentos e do estágio de carregamento em que se encontra. Como a rigidez depende dos deslocamentos, e esses deslocamentos não são conhecidos em um primeiro momento, pois são as incógnitas do problema, é necessário avaliar as mudanças de rigidez da estrutura por meio de métodos incrementais e métodos iterativos. Tais métodos serão explicados nos próximos capítulos. Portanto, é necessário entender porque a rigidez varia, identificando quais são os parâmetros

relacionados a essa variação, além de ser necessário saber quantificar essa variação de rigidez (ALVES FILHO, 2012).

## 2.2 TIPOS DE NÃO LINEARIDADES

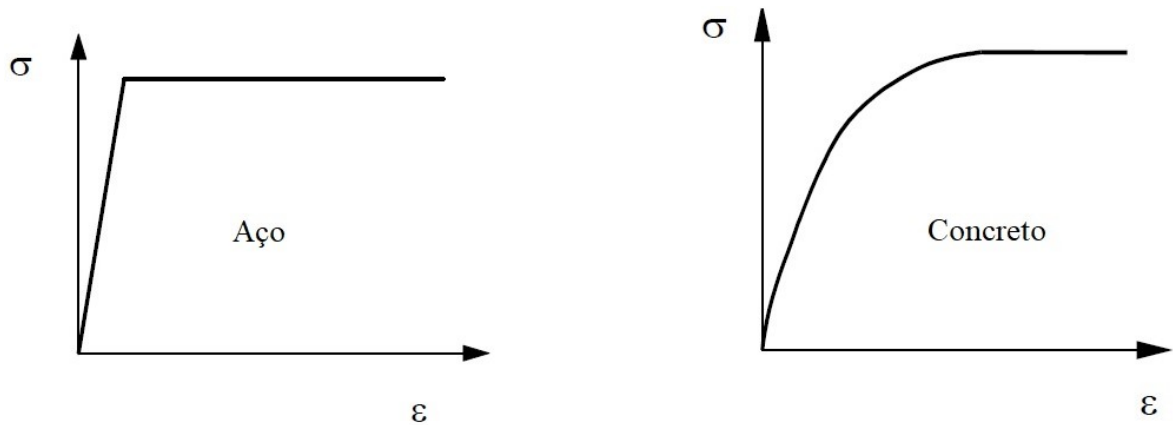
Existem dois fatores principais que geram o comportamento não linear de uma estrutura à medida que o carregamento é aplicado: a alteração das propriedades dos materiais que compõem a estrutura, denominada “não linearidade física”, e a alteração da geometria da estrutura, designada “não linearidade geométrica”. As análises não lineares estão cada vez mais comuns no dia a dia de um engenheiro de cálculo estrutural e vários sistemas computacionais disponibilizam recursos avançados neste quesito. A consideração das não linearidades (física e geométrica) pode ter uma influência significativa no cálculo dos deslocamentos e esforços em uma estrutura, por isso é fundamental compreender cada um dos tipos de não linearidades existentes.

### 2.2.1 Não Linearidade Física

Segundo Lourenço (1999), a não linearidade física ocorre quando o comportamento mecânico dos materiais constituintes da estrutura não é linear, tornando necessário o conhecimento das leis constitutivas do material para que se possa definir um modelo a ser utilizado na análise computacional. Esse tipo de não linearidade ocorre quando o comportamento do material da estrutura não permite o emprego da Lei de Hooke, tornando necessário o conhecimento do comportamento material para que se possa definir um modelo a ser utilizado na análise computacional.

Materiais como o concreto e aço, por exemplo, apresentam comportamento elastoplástico, o que gera gráficos de tensão por deformação não lineares conforme mostra a Figura 2.1. O comportamento do aço, por exemplo, ocorre quando o mesmo atinge uma tensão de escoamento e passa a ter um comportamento elastoplástico que pode ser perfeito ou com encruamento. Dessa forma, a perda de capacidade resistente da estrutura durante a análise deve ser considerada de modo que, a partir de certo valor do carregamento aplicado, alguns elementos ou partes que a compõem perdem a capacidade de recuperar a sua forma inicial quando descarregados, acumulando deformações permanentes denominadas deformações plásticas (LACERDA, 2014).

**Figura 2.1 - Leis constitutivas simplificadas para o aço e concreto**



Fonte: Lourenço (1999)

### 2.2.2 Não Linearidade Geométrica

A não linearidade geométrica está associada a uma relação não linear entre deformação e deslocamento da estrutura, admitindo a consideração de grandes rotações e translações do elemento, juntamente à ocorrência de deformações infinitesimais (BELO, 2009).

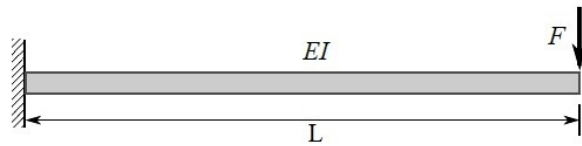
Nesse caso, a análise estrutural é realizada considerando a geometria deformada da estrutura, o que exige cálculos incrementais-iterativos mais complexos e maior custo computacional. O método de análise da não linearidade geométrica leva em consideração a cinemática apresentada pelo problema, sendo a formulação corrotacional um dos métodos a serem empregados para a descrição do movimento do elemento estrutural (CUNHA, 2015).

As não linearidades geométricas podem ser classificadas em:

- a) Pequenas deformações, mas grandes deslocamentos ou rotações

Este primeiro caso ocorre, em geral, em arcos, molas, barras de treliça, placas e cascas finas. De acordo com Borst et al. (2012), é possível uma viga apresentar pequena deformação e grande deslocamento, como mostra a Figura 2.2. Ao aumentar sua rigidez  $EI$ , pode-se obter uma deformação arbitrariamente pequena nesta viga. No entanto, ao aumentar seu comprimento  $L$ , pode-se obter deslocamentos eventualmente grandes na mesma viga.

**Figura 2.2 - Viga engastada de rigidez  $EI$  e comprimento  $L$**



Fonte: adaptado de Lacerda (2014)

b) Grandes deformações

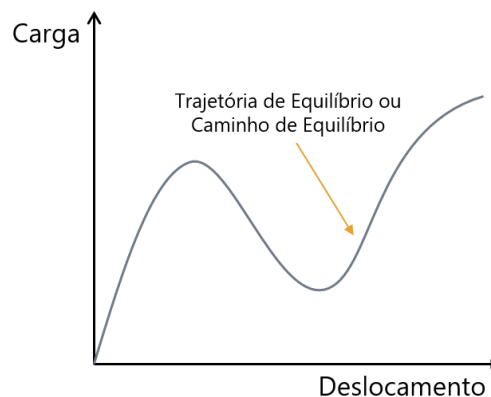
Na maioria dos casos, pode-se considerar como grande deformação quando a mesma supera o valor de 5%. Este tipo de não linearidade ocorre na formação de metais e em materiais de borracha. Por ser grande a deformação, essa não linearidade gera muitas vezes não linearidade física também.

O conceito de grande e pequeno é, naturalmente, impreciso. Alguns autores preferem utilizar os termos deformação infinitesimal para se referir a pequena deformação e deformação finita para grande deformação (LACERDA, 2014).

### 2.3 TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO

Para se realizar uma análise não linear estática de uma estrutura, utiliza-se comumente um gráfico que relaciona carga e deslocamento, composto por unidade de deslocamento ou rotação no eixo das abscissas e unidade de carga no eixo das ordenadas. Este gráfico, apresentado na Figura 2.3, é conhecido como trajetória de equilíbrio ou caminho de equilíbrio.

**Figura 2.3 - Trajetória de Equilíbrio**



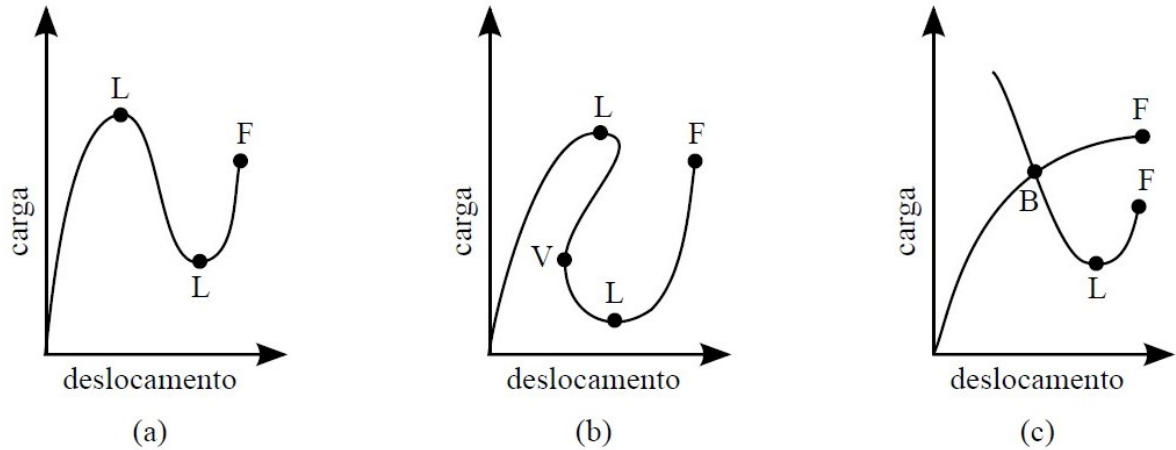
Cada um dos pontos que formam essa trajetória representa uma possível posição de equilíbrio da estrutura à medida em que ela é carregada, e são denominados pontos de equilíbrio. Por meio da trajetória de equilíbrio, é possível identificar e ilustrar muitos conceitos-chave relacionados à física, matemática ou computação. Um bom exemplo é o conceito de ponto crítico, que está diretamente ligado à instabilidade da estrutura em análise não linear. Dentre os tipos de pontos críticos que podem ser identificados em uma trajetória de equilíbrio, podem-se citar (FELIPPA, 2001):

- Ponto limite: é um ponto em que se pode traçar uma reta tangente horizontal, ou seja, paralela à abscissa, podendo ser um ponto de máximo ou mínimo na trajetória de equilíbrio, o qual indica a perda de rigidez total da estrutura;
- Ponto de viragem (*turning point*): é um ponto em que se pode traçar uma reta tangente vertical, ou seja, paralela à ordenada, o qual indica mudança no sentido de deslocamento da estrutura;
- Ponto de falha: localizado ao final da trajetória de equilíbrio e indica o colapso da estrutura;

Existem também outros pontos críticos na trajetória de equilíbrio, como o ponto de bifurcação, no qual duas ou mais trajetórias de equilíbrio se cruzam. A identificação desses pontos é muito importante para um projeto de engenharia, pois a estrutura pode se tornar instável ao atingir esses pontos (LACERDA, 2014).

Na Figura 2.4 é possível visualizar os pontos limite (L), pontos de bifurcação (B), pontos de viragem (V) e pontos de falha (F). Além disso, a Figura 2.4 (a) ilustra o fenômeno de *snap-through*, conhecido também como salto de deslocamento, cuja principal característica é o salto repentino entre dois pontos limite com a tangente de rigidez tornando-se negativa e a estrutura torna-se instável. A Figura 2.4 (b) ilustra o fenômeno de *snap-back*, conhecido também como salto de força, que é uma forma amplificada do *snap-through* e provoca uma grande mudança na curva da trajetória de equilíbrio. Por fim, a Figura 2.4 (c) ilustra o fenômeno de bifurcação, que às vezes é chamado de flambagem, e marca o cruzamento de duas trajetórias de equilíbrio.

Figura 2.4 - Pontos críticos e fenômenos na trajetória de equilíbrio: (a) *snap-through*, (b) *snap-back* e (c) bifurcação



Autor: Lacerda (2014)

## 2.4 DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS

No contexto da análise não linear geométrica utilizando o método dos elementos finitos, usualmente classificam-se as formulações matemáticas em lagrangiana e euleriana com relação à descrição do movimento de um elemento. Na descrição lagrangiana, também chama de descrição material, avalia-se o comportamento de uma partícula, ou ponto material, quando esta se move no espaço. Por outro lado, na descrição euleriana, ou espacial, descreve-se o que acontece a um ponto fixo do espaço com o passar do tempo (HOLZAPFEL, 2000).

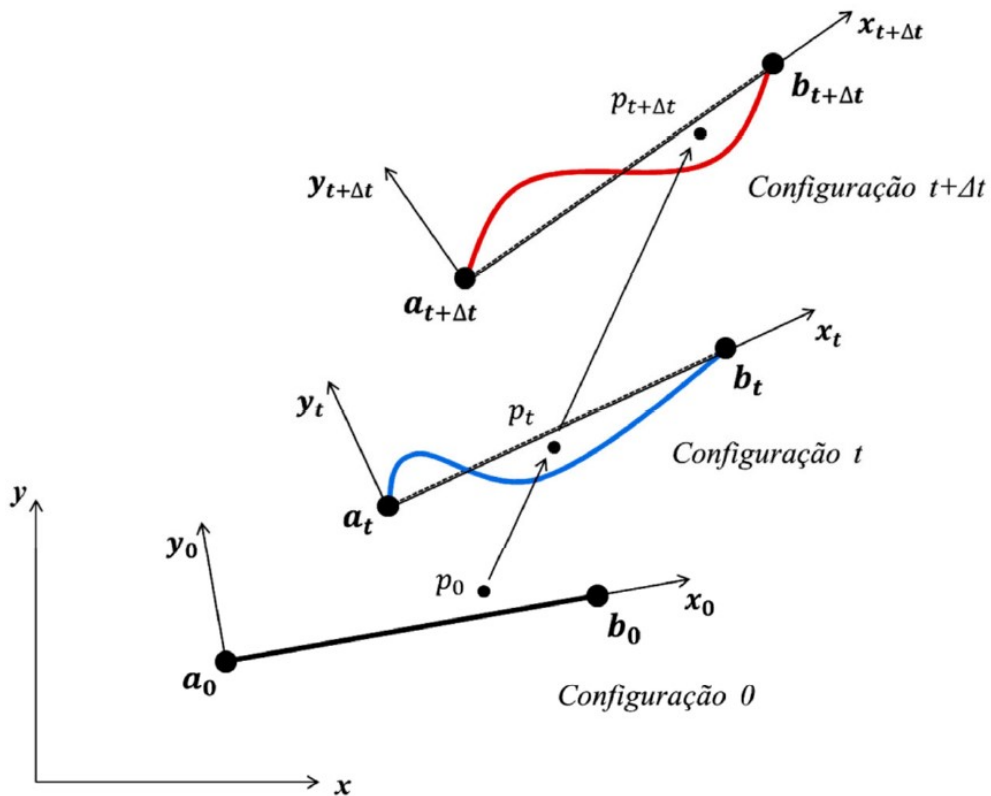
Desta forma, na descrição lagrangiana todo o comportamento do sólido é especificado em uma configuração prévia à sua mudança de configuração. Assim, sabendo a configuração tomada como referência, qualquer configuração posterior do corpo é obtida em relação àquela onde este estava. Enquanto que na descrição euleriana o comportamento é especificado na sua configuração atual e, desse modo, não está associado à localização inicial do corpo, mas onde este realmente se encontra. Esta descrição é bastante vantajosa no estudo da mecânica dos fluidos, por exemplo, pois nela é descrita uma região de análise e, portanto, não é preciso acompanhar o movimento de cada ponto material específico. Esta também pode ser utilizada para modelagem de sólidos com o método dos elementos finitos, no entanto, ao se verificar a quantidade de trabalho presentes na literatura, conclui-se que a descrição euleriana é preterida pela comunidade científica em favor da descrição lagrangiana (SIQUEIRA, 2016).

As formulações lagrangianas utilizadas em elementos finitos são geralmente classificadas em: descrição lagrangiana total (LT), descrição lagrangiana atualizada (LA) e descrição corrotacional (CR). A diferença entre essas descrições cinemáticas se dá pela escolha da configuração de referência (MENIN, 2006).

Portanto, os métodos de análise estrutural que consideram a não linearidade geométrica tem como objetivo estabelecer o equilíbrio da estrutura em sua configuração deformada, causada pela consideração de grandes deslocamentos e rotações. Observa-se, portanto, a necessidade de se realizar um estudo cinemático do sistema visando a consideração e/ou determinação do movimento do elemento estrutural até atingir a sua posição de equilíbrio (CUNHA, 2015).

Para a definição e diferenciação das descrições cinemáticas citadas, considera-se o exemplo ilustrado pela Figura 2.5. O elemento estrutural  $ab$ , em sua configuração inicial (configuração 0, descarregada e indeformada), pode ser definido em termos do sistema de coordenadas global fixo,  $xy$ , ou em termos do sistema de coordenadas locais,  $x_0y_0$ , no qual  $x_0$  corresponde ao eixo da barra, direcionado no sentido dos nós  $a_0$  e  $b_0$ .

**Figura 2.5 - Descrições cinemáticas de um elemento estrutural**



Fonte: Cunha (2015)

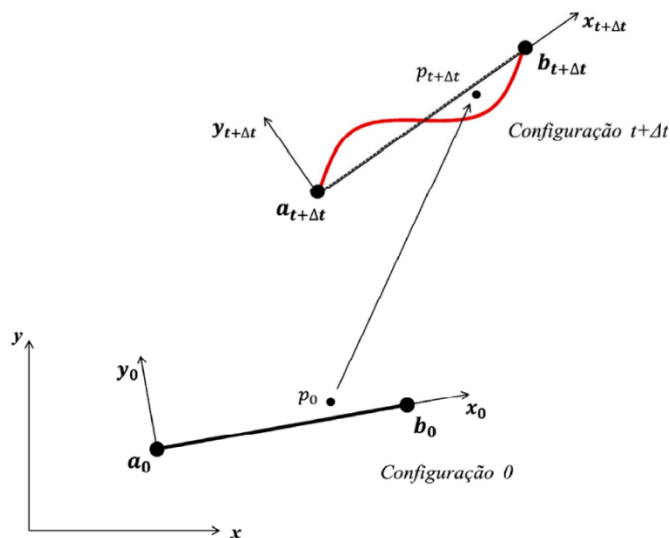
Após a aplicação gradual do carregamento, o sistema muda da configuração 0 para a configuração  $t$ , de forma que todas as variáveis do problema já tenham sido determinadas nesta última configuração, estando o sistema em equilíbrio. Pode-se agora estabelecer como referência o elemento  $ab$  na configuração  $t$ , utilizando o sistema de coordenadas globais ou o novo sistema local atualizado,  $x_t y_t$ , com  $x_t$  determinado pelos extremos do elemento na nova configuração. O elemento terá mudado a sua forma e dimensão neste processo, mas as equações de equilíbrio formuladas estarão satisfeitas e a posição de qualquer ponto material, na posição inicial  $p_0$ , poderá ser mapeada na nova posição  $p_t$  (CUNHA, 2015).

Tomando-se como base um estado de equilíbrio conhecido em uma configuração  $t$ , os procedimentos incrementais-iterativos buscam determinar o próximo estado de equilíbrio em uma nova configuração  $t+\Delta t$ .

#### 2.4.1 Descrição Lagrangiana Total (LT):

Na descrição lagrangiana total (LT), as equações do método dos elementos finitos são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, que é, em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura. Dessa forma, todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo  $t + \Delta t$  são referidas à configuração inicial (indeformada) da estrutura, ou seja, o elemento  $ab$  é referido ao sistema  $x_0 y_0$ , de acordo com a Figura 2.6 (MENIN, 2006).

**Figura 2.6 - Descrição Lagrangiana Total (LT)**



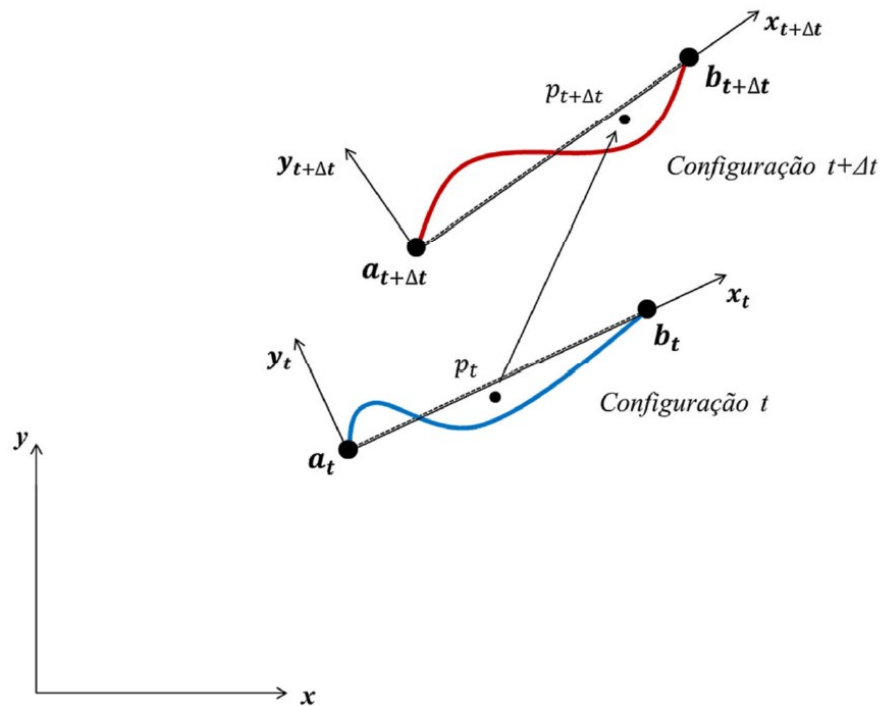
Fonte: Cunha (2015)



### 2.4.2 Descrição Lagrangiana Atualizada (LA):

Na descrição lagrangiana atualizada (LA), as equações do método dos elementos finitos são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio, ou seja, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga. Uma vez atingido o equilíbrio, todas as tensões e deformações da estrutura passam a ser definidas em função da nova configuração de equilíbrio. Desse modo, todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo  $t + \Delta t$  são referidas à última configuração de equilíbrio da estrutura, ou seja, o elemento  $ab$  é referido ao sistema  $x_t y_t$ , como ilustra a Figura 2.7.

Figura 2.7 - Descrição Lagrangiana Atualizada (LA)



Fonte: Cunha (2015)

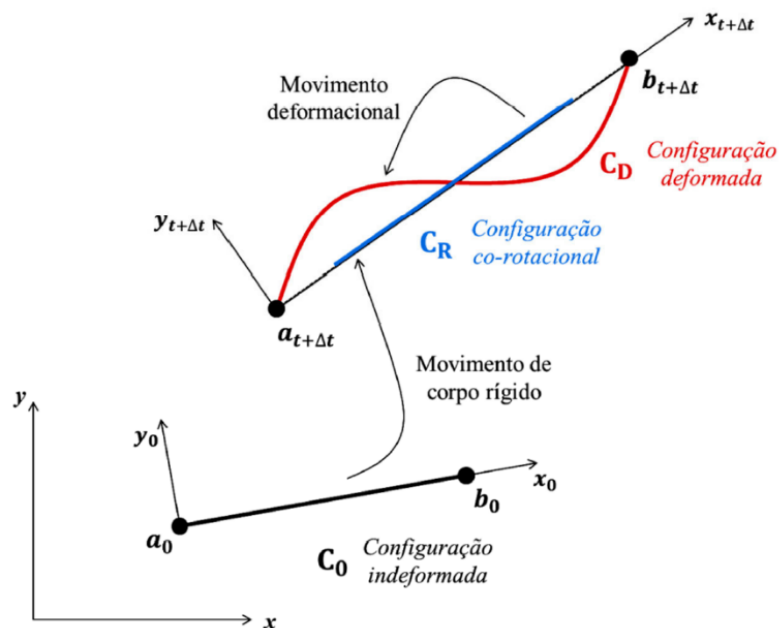
### 2.4.3 Descrição Corrotacional (CR):

Segundo Menin (2006), a descrição cinemática corrotacional (CR), as equações do método dos elementos finitos de cada um dos elementos são definidas em relação a dois sistemas distintos:

- Uma configuração de base, que permanece fixa ao longo de toda a análise, que é utilizada para medir os deslocamentos de corpo rígido;
- Uma configuração corrotacional, que acompanha cada um dos elementos, a partir do qual são obtidos, exclusivamente, os deslocamentos deformacionais, usados posteriormente para definir as tensões e deformações do elemento.

Portanto, a descrição corrotacional distingue de forma explícita os movimentos de corpo rígido e os movimentos deformacionais do elemento, como mostra a Figura 2.8.

**Figura 2.8 - Descrição Corrotacional (CR)**



Fonte: Cunha (2015)

De acordo com Menin (2006), a descrição corrotacional apresenta uma série de vantagens sobre a descrição lagrangiana, como a eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e pequenas deformações, e a possibilidade de reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existent em uma análise não linear geométrica de estruturas. Além disso apresenta facilidade no estudo de não linearidades físicas, caracterizadas por pequenas deformações, juntamente com não linearidades geométricas, e também facilidade na adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações.

Por outro lado, observa-se algumas desvantagens da descrição corrotacional em relação à descrição lagrangiana, pois a primeira não é vantajosa no estudo de problemas que envolvem grandes deformações plásticas e pode levar a uma matriz de rigidez tangente não

simétrica para elementos com graus de liberdade de rotação no espaço. Além disso, a formulação corrotacional envolve formulações matemáticas mais complexas para a avaliação dos graus de liberdade de rotação, sendo somente eficiente para o caso de elementos finitos com geometria inicial simples, como elementos de treliças e vigas contendo dois nós, e elementos de placas ou cascas contendo três ou quatro nós. Para elementos com geometrias mais complexas, o nível de dificuldade aumenta consideravelmente, apesar de que os elementos com geometria simples são, geralmente, os elementos utilizados com maior frequência em análises estruturais com não linearidade geométrica (MENIN, 2006).

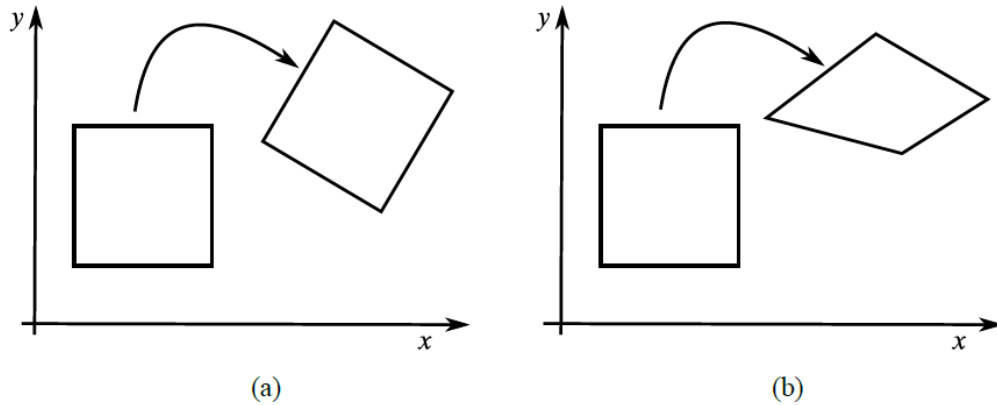
## 2.5 DEFLEXÃO, DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO

É de extrema importância definir e compreender a diferença entre os conceitos de deflexão, deslocamento e deformação. Deflexão é a amplitude ou a magnitude de um deslocamento. Deflexão é uma grandeza escalar, enquanto que deslocamento é uma grandeza vetorial. Deformação pode ter dois significados diferentes na língua portuguesa: o significado de *deformation* e o significado de *strain* (FELIPPA, 2012).

Deformação, no sentido de *deformation*, significa uma transformação do corpo de uma configuração de referência para a configuração atual. Na língua inglesa, o conceito de *deformation* não difere um simples movimento de corpo rígido de uma alteração na forma do corpo. Por outro lado, deformação no sentido de *strain*, significa uma medida adimensional normalizada do deslocamento entre os pontos materiais do corpo com relação a uma configuração ou comprimento de referência. Portanto, *strain* mede o quanto uma deformação, no sentido de *deformation*, é diferente de um movimento de corpo rígido (LACERDA, 2014).

A Figura 2.9 ilustra a diferença entre os conceitos. Enquanto na Figura 2.9 (a) tem-se um movimento de corpo rígido, na Figura 2.9 (b) tem-se um movimento que não é de corpo rígido, pois o corpo apresenta mudança de forma. Ambos os movimentos se enquadram na definição de *deformation* (mudança de configuração), no entanto a medida de *strain* no corpo da Figura 2.9 (a) é nula e na Figura 2.9 (b) é diferente de zero.

**Figura 2.9 - Movimento de um corpo rígido em (a) e movimento com alteração na forma do corpo em (b). Nos dois casos tem-se *deformation*, mas com medida de *strain* nula em (a) e diferente de zero em (b)**

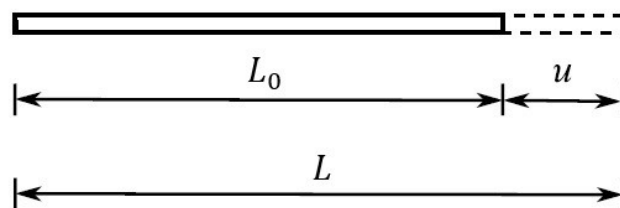


Fonte: Lacerda (2014)

## 2.6 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO UNIDIMENSIONAL

A deformação de uma barra é caracterizada por um deslocamento  $u$  como ilustra a Figura 2.10. Seja  $L_0$  o comprimento inicial (antes da deformação) da barra e  $L$  o seu comprimento final após a deformação, tal que  $u = L - L_0$ .

**Figura 2.10 - Deformação na barra**



Fonte: Adaptado de Lacerda (2014)

Existem várias medidas de deformação que podem ser apropriadas para a análise não linear de pórticos. Em seguida serão apresentadas algumas delas.

### 2.6.1 Deformação de engenharia

A deformação de engenharia ou deformação de Cauchy é a medida de deformação mais simples dentre as outras, e é dada por:

$$\varepsilon_E = \frac{\mathbf{u}}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (2.2)$$

Observa-se que a deformação de engenharia mede a deformação mesmo que a barra tenha sofrido uma grande rotação na direção de  $\varepsilon_E$ .

### 2.6.2 Deformação de Green

A deformação de Green é particularmente adequada para a análise de estruturas com grandes deslocamentos, porém com pequenas deformações. A partir da deformação de engenharia ( $\varepsilon_E$ ), pode-se reescreve-la da seguinte forma:

$$\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{(L - L_0)(L + L_0)}{L_0(L + L_0)} = \frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2(2 + \varepsilon_E)} \quad (2.3)$$

No caso de a deformação ser pequena, tem-se que  $\varepsilon_E \approx 0$ . Desprezando  $\varepsilon_E$  tem-se, então, a deformação de Green ( $\varepsilon_G$ ), dada por:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \quad (2.4)$$

A relação entre as deformações de Green e de engenharia é definida por:

$$\varepsilon_G = \varepsilon_E \left(1 + \frac{\varepsilon_E}{2}\right) \quad (2.5)$$

### 2.6.3 Deformação Logarítmica

A deformação logarítmica é a medida mais adequada para grandes deformações, tal qual ocorre em materiais semelhantes à borracha, por exemplo. É também conhecida como deformação natural, deformação verdadeira ou deformação de Hencky. Essa medida de deformação baseia-se na soma de todos os incrementos infinitesimais de deformação que ocorrem durante o alongamento da barra desde o comprimento inicial  $L_0$  até o final  $L$ . O incremento infinitesimal de deformação é dado por:

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L} \quad (2.6)$$

A deformação logarítmica é definida pela integração desse incremento:

$$\varepsilon_L = \int_{L_0}^L d\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} \quad (2.7)$$

A relação entre as deformações logarítmica e a de engenharia é dada por:

$$\varepsilon_L = \ln (1 + \varepsilon_E) \quad (2.8)$$

A relação entre as deformações logarítmicas e a de Green é dada por:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \ln (1 + 2\varepsilon_G) \quad (2.9)$$

A deformação logarítmica pode ser generalizada para mais de uma dimensão, no entanto essa generalização é complexa e de alto custo computacional (BONET; WOOD, 2008).

### 2.6.4 Deformação de Almansi

A deformação de Almansi ou deformação de Euler-Almansi é expressa por:

$$\varepsilon_A = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2} \quad (2.10)$$

Sua concepção é similar à deformação de Green, exceto que a primeira tem como referência a configuração deformada (descrição euleriana) e a segunda tem como referência a configuração inicial (descrição lagrangiana).

### **3 FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DO ELEMENTO DE VIGA-COLUNA 2D**

Neste capítulo são apresentados os modelos de viga-coluna bidimensionais descritas no contexto corrotacional do Método dos Elementos Finitos que foram utilizados neste trabalho. Além disso, as formulações desses modelos são fundamentadas nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

#### **3.1 GENERALIDADES SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Segundo Galvão (2000), dentro da análise estrutural, o método mais utilizado para a discretização de um problema contínuo e posterior obtenção de soluções numéricas é o Método dos Elementos Finitos, graças à sua eficiência e aplicabilidade. O método consiste em dividir o meio contínuo em subdomínios, também chamados elementos, interligados por pontos nodais cujos graus de liberdade são definidos.

A precisão deste método está diretamente ligada às condições de convergência e ao refinamento da malha, que em seu limite tenderia à obtenção da solução exata do problema. Ou seja, quanto maior o número de nós na malha, maior o número de elementos, logo mais refinada estará a malha e, portanto, mais próxima da solução analítica do problema será a resposta obtida. Entretanto, deve-se ressaltar que a utilização de uma quantidade de elementos que gera uma solução satisfatória dentro de certa precisão desejada e do tempo esperado influenciam diretamente em uma redução considerável no custo computacional, sem prejuízos na confiabilidade dos resultados. Isso ocorre porque após certo grau de precisão, as alterações na resposta obtida assumem valores muito pouco significativos (Galvão, 2000).

Segundo Rao (1999), a solução geral de um problema de análise estática de estrutura utilizando o Método dos Elementos Finitos pode, de forma resumida, ser dividida em seis passos. Primeiramente, divide-se a estrutura em vários elementos e decide-se sobre o número, o tipo, o tamanho e o arranjo de cada um dos elementos. Em seguida, seleciona-se um modelo adequado de deslocamento ou interpolação, assumindo-se uma solução adequada para os elementos, de modo a aproximar razoavelmente a solução. O terceiro passo é a obtenção das matrizes de rigidez e dos vetores de carga dos elementos, utilizando-se equações de equilíbrio ou princípios variacionais. No quarto passo, reúne-se os elementos para obtenção das equações de equilíbrio da estrutura, ou seja, as matrizes de rigidez de cada elemento finito são



reunidas em uma única matriz, que descreverá o comportamento global da estrutura. O quinto passo é o da modificação das equações de equilíbrio, considerando as condições de contorno do problema, e solução dos deslocamentos desconhecidos. Por fim, no sexto passo calcula-se as tensões e deformações nos elementos, a partir dos deslocamentos nodais e das matrizes de rigidez obtidos.

No contexto da análise não linear geométrica utilizando o Método dos Elementos Finitos, existem duas formulações comumente utilizadas: a formulação corrotacional e a formulação posicional de elementos finitos. A formulação posicional foi desenvolvida originalmente por Coda (2003), a qual difere do Método dos Elementos Finitos padrão para sólidos no sentido que o método padrão possui como incógnitas os deslocamentos nodais, enquanto no método posicional as incógnitas são as posições nodais (GRECO; VENTURIN, 2006).

Por outro lado, na formulação corrotacional as equações do MEF de cada um dos elementos são definidas em relação a dois sistemas distintos: uma configuração de base, que permanece fixa ao longo de toda a análise, sendo utilizada para medir os deslocamentos de corpo rígido, e uma configuração corrotacional que acompanha cada um dos elementos, a partir da qual são obtidos, de forma exclusiva, os deslocamentos deformacionais, em função dos quais são definidas as tensões e deformações (MENIN, 2006).

## 3.2 TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO

Na análise de estruturas, existem mais de uma teoria para descrever o comportamento de vigas, sendo as duas principais a de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko. Cada uma dessas teorias estabelece algumas hipóteses a fim de criar um modelo matemático que descreva esse fenômeno físico.

A teoria mais comumente usada é a de Euler-Bernoulli, que admite que, para pequenas deformações, as seções transversais de uma viga permanecem planas e perpendiculares à linha neutra. Esta consideração exige que a deformação do material imposta pelas tensões cisalhantes sejam desprezadas, de modo a considerar que a deformação da viga seja provocada somente pela ocorrência do momento fletor. Tal hipótese torna-se inválida no caso de grandes deformações e deslocamentos (DA SILVA, 2019).

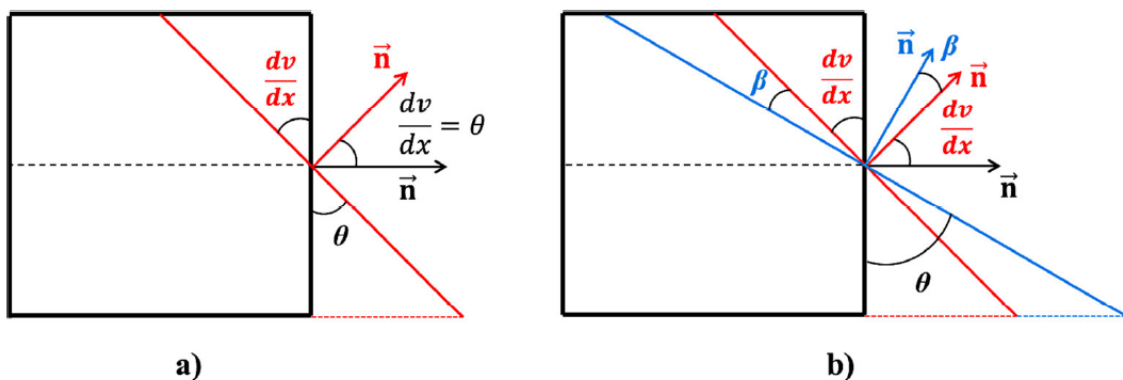
Na teoria de viga de Timoshenko, a deformação cisalhante na seção transversal da barra é levada em consideração no processo de solução do problema. Entretanto, considera-se

que a deformação por cisalhamento é constante ao longo da seção transversal. Essa teoria de viga pode ser aplicada em vigas com esbeltez menores ( $\lambda = L/h < 10$ , em que  $L$  é o comprimento da viga e  $h$  é a altura da seção transversal) e seus resultados se tornam mais relevantes à medida que a altura da seção aumenta. Considera-se que as seções transversais planas e perpendiculares ao eixo neutro se mantêm planas, porém não perpendiculares ao eixo neutro deformado (OÑATE, 2013).

Segundo Silva (2019), a teoria de viga de Timoshenko pode ser considerada como a mais precisa do ponto de vista físico do problema, pois sua formulação se aproxima mais do comportamento real da estrutura ao levar em conta o efeito do cisalhamento, que é desconsiderado na teoria de viga de Bernoulli. No entanto, o coeficiente de cisalhamento, presente na formulação de Timoshenko, ainda é objeto de muitos estudos, como pode ser visto em Dong et al (2010), Chan et al. (2011) e Faghidian (2017).

De acordo com Cunha (2015), a presença do esforço cortante na seção transversal do elemento e, portanto, a presença de tensões de cisalhamento, introduzem deformações cisalhantes  $\gamma$ , que provocam o deslizamento relativo da seção transversal (empenamento), o que resulta em uma variação angular  $\beta$ , entre a tangente à elástica da viga e o vetor  $\mathbf{n}$  perpendicular à seção transversal. Os mecanismos de deformação por flexão e por cisalhamento são ilustrados na Figura 3.1.

**Figura 3.1 – Mecanismos de deformação: a) Euler-Bernoulli, b) Timoshenko**



Fonte: Cunha (2015)

A Figura 3.1b ilustra o mecanismo de deformação cisalhante e mostra que a rotação total da seção transversal está associada à rotação da linha elástica da viga proveniente da

flexão  $dv/dx$  somada à rotação proveniente da deformação cisalhante  $\beta$ . Portanto, dentro da hipótese de viga de Timoshenko, a deformação cisalhante  $\gamma$  e a curvatura  $\kappa$  são dadas por:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (3.1)$$

$$\kappa = -\frac{d\theta}{dx} \quad (3.2)$$

A força cortante e o momento fletor são então dados por:

$$M = EI\kappa \quad (3.3)$$

$$Q = k_{cis}GA\gamma \quad (3.4)$$

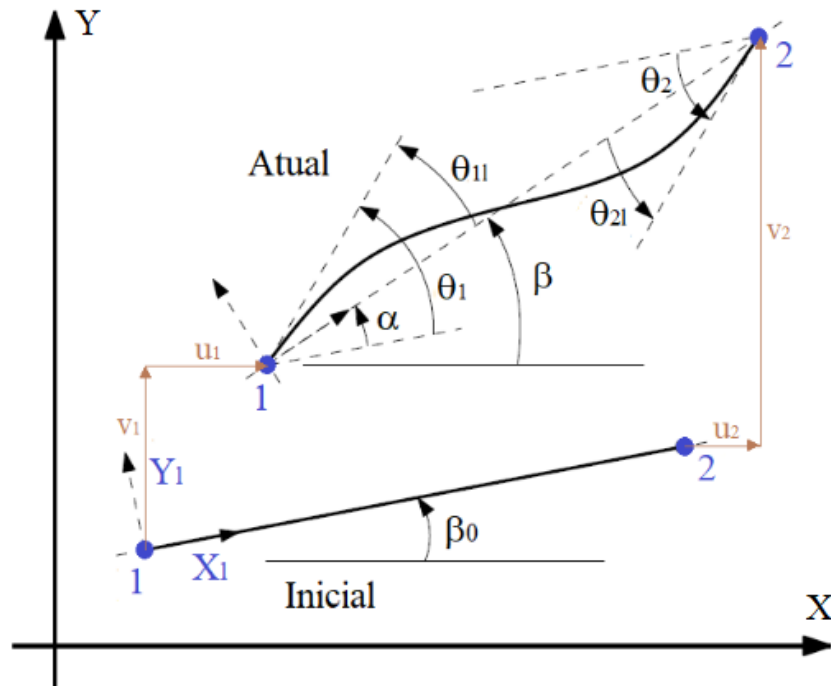
Considera-se que a deformação cisalhante  $\gamma$  é constante ao longo de toda a seção transversal. Como essa hipótese não condiz com a realidade devido às condições de contorno do elemento, multiplica-se o módulo de elasticidade transversal  $G$  pelo coeficiente de correção do cisalhamento  $k_{cis}$ .

Com base nessas duas teorias de viga, apresentam-se a seguir quatro modelos de viga-coluna bidimensionais propostos por diversos autores e que foram utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

### 3.3 MODELO DE VIGA-COLUNA DE EULER-BERNOULLI APRESENTADO POR CRISFIELD (1991) E YAW (2009)

A formulação corrotacional do elemento finito de viga-coluna com dois nós e três graus de liberdade por nó é descrita nesta seção. Assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma, conforme a hipótese da teoria de viga de Euler-Bernoulli. Considere o elemento de viga-coluna em suas configurações inicial e atual, conforme o desenho esquemático na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Configurações inicial e atual, devido às deformações de flexão, do elemento de viga-coluna



Fonte: adaptada de Yaw (2009)

Na configuração inicial, as coordenadas dos nós 1 e 2 do elemento de viga no sistema global são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. O comprimento original (indeformado)  $L_0$  da viga é dado pela Equação (3.5) (YAW, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (3.5)$$

Para o elemento de viga na sua configuração atual, as coordenadas nodais globais são  $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$  para o nó “1” e  $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$  para o nó “2”, em que  $u_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $X$  e  $v_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $Y$ , com  $i = 1, 2$ . O comprimento atual (deformado)  $L$  é (Yaw, 2009):

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2} \quad (3.6)$$

O vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{p}$  do elemento finito  $m$  é dado por:

$$\mathbf{p}_m = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (3.7)$$

O deslocamento axial local ( $u_1$ ) do elemento é calculado por:

$$u_1 = L - L_0 \quad (3.8)$$

A deformação específica  $\varepsilon$  é assumida constante e é determinada por  $\varepsilon = u_1/L_0$ . A força axial  $N$  da viga é, então, dada por:

$$N = \frac{EAu_1}{L_0} \quad (3.9)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga-coluna ( $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$ ) são relacionados com as rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ), e são dados por (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

na qual  $I$  é o momento de inércia da seção transversal. As rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ) são computadas por, respectivamente:

$$\theta_{11} = \arctan \left( \frac{\cos\beta \operatorname{sen}\beta_1 - \operatorname{sen}\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\beta_1} \right) \quad (3.11)$$

$$\theta_{21} = \arctan \left( \frac{\cos\beta \operatorname{sen}\beta_2 - \operatorname{sen}\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\beta_2} \right) \quad (3.12)$$

na qual  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$  e  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ . Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais, e as expressões para os ângulos inicial  $\beta_0$  e corrente da barra  $\beta$  são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan \left( \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) \quad (3.13)$$

$$\beta = \arctan \left( \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1} \right) \quad (3.14)$$

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right) \quad (3.15)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right) \quad (3.16)$$

A matriz de rigidez tangente elementar  $\mathbf{K}_{el}$  é determinada em função da parcela da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  e da matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais  $\mathbf{K}_G$ , dada pela seguinte expressão (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (3.17)$$

na qual

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (3.19)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

em que  $r = \sqrt{I/A}$  é o raio de giração, os vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{r}$  são, respectivamente:

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \quad (3.21)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (3.22)$$

em que  $c = \cos\beta$  e  $s = \sin\beta$ . A matriz  $\mathbf{B}$  é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

As expressões para calcular os valores do seno e do cosseno do ângulo  $\beta$ , denotados por  $s$  e  $c$  na Equação (3.23) são dadas por, respectivamente:

$$\cos(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L} \quad (3.24)$$

$$\sin(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L} \quad (3.25)$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_{el}$  é determinado por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [\mathbf{N} \quad \bar{\mathbf{M}}_1 \quad \bar{\mathbf{M}}_2]^T \quad (3.26)$$

### 3.4 MODELO DE VIGA-COLUNA DE TIMOSHENKO PROPOSTO POR BATTINI (2002)

O elemento de viga-coluna de Timoshenko clássico com dois nós é definido com interpolações lineares para os deslocamentos  $u$  e  $v$  e para a rotação  $\theta$  no sistema de coordenadas locais, os quais são dados por, respectivamente (BATTINI, 2002):

$$u = \frac{x}{L_0} u_1 \quad (3.27)$$

$$v = 0 \quad (3.28)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) \theta_{11} + \frac{x}{L_0} \theta_{21} \quad (3.29)$$

A curvatura  $\kappa$ , a deformação de cisalhamento  $\gamma$  e a deformação  $\epsilon$  são definidas por, respectivamente:

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\theta_{11}}{L_0} + \frac{\theta_{21}}{L_0} = \frac{\theta_{21} - \theta_{11}}{L_0} \quad (3.30)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L_0}\right)\theta_{11} - \frac{x}{L_0}\theta_{21} \quad (3.31)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa y = \frac{u_1}{L_0} - \left(\frac{\theta_{21} - \theta_{11}}{L_0}\right)y \quad (3.32)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  na Equação (3.18), utiliza-se a seguinte matriz constitutiva  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4L_0} \begin{bmatrix} 4EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EI + \mu GAL_0^2 & -4EI + \mu GAL_0^2 \\ 0 & -4EI + \mu GAL_0^2 & 4EI + \mu GAL_0^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

em que  $G$  é módulo transversal de cisalhamento e  $\mu$  é o coeficiente de correção de cisalhamento. Para o cálculo da matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$  são utilizados os momentos locais nas extremidades do elemento de viga  $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$  determinados pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{L_0}(\theta_{11} - \theta_{21}) + \frac{1}{4}\mu GAL_0(\theta_{11} + \theta_{21}) \\ \frac{EI}{L_0}(\theta_{21} - \theta_{11}) + \frac{1}{4}\mu GAL_0(\theta_{11} + \theta_{21}) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_e$  é determinado segundo a Equação (3.26), com os valores dos momentos  $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$  obtidos pela Equação (3.34) e a força normal  $N$  calculada pela Equação (3.9).

### 3.5 MODELO DE VIGA-COLUNA DE TIMOSHENKO PROPOSTO POR KIEN (2012)

Kien (2012) desenvolveu um elemento de viga de Timoshenko para análise de grandes deslocamentos de vigas e pórticos planos formulados no contexto do método corrotacional. A



expressão para um arco abatido é adotada para a deformação local. A deformação efetiva  $\varepsilon_{\text{eff}}$  é escrita em termos dos deslocamentos nodais por:

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{u_1}{L_0} + \frac{1}{(1 + \varnothing)^2} \left[ \frac{\varnothing(2 + \varnothing)}{24} (\theta_{11} - \theta_{21})^2 + \frac{1}{30} (2\theta_{11}^2 - \theta_{11}\theta_{21} + \theta_{21}^2) \right] \quad (3.35)$$

na qual  $\varnothing$  é dado por:

$$\varnothing = \frac{12 EI}{L_0^2 \mu GA} \quad (3.36)$$

Os esforços internos do vetor de força interna  $\mathbf{F}_{\text{el}}$  são calculados como segue:

$$N = EA\varepsilon_{\text{eff}} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 = & \frac{L_0 EA}{(1 + \varnothing)^2} \left[ \frac{\varnothing(2 + \varnothing)}{12} (\theta_{11} - \theta_{21})^2 + \frac{1}{30} (4\theta_{11} - \theta_{21}) \right] \varepsilon_{\text{eff}} + \\ & \frac{EI}{L_0(1 + \varnothing)^2} [\varnothing(2 + \varnothing)(\theta_{11} - \theta_{21}) + 2(2\theta_{11} + \theta_{21})] + \frac{\varnothing^2 L_0 \mu GA}{4(1 + \varnothing)^2} (\theta_{11} + \theta_{21}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 = & \frac{L_0 EA}{(1 + \varnothing)^2} \left[ \frac{\varnothing(2 + \varnothing)}{12} (\theta_{21} - \theta_{11})^2 + \frac{1}{30} (4\theta_{21} - \theta_{11}) \right] \varepsilon_{\text{eff}} + \\ & \frac{EI}{L_0(1 + \varnothing)^2} [\varnothing(2 + \varnothing)(\theta_{21} - \theta_{11}) + 2(\theta_{11} + 2\theta_{21})] + \frac{\varnothing^2 L_0 \mu GA}{4(1 + \varnothing)^2} (\theta_{11} + \theta_{21}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  na Equação (3.18), utiliza-se a matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EI}{L_0(1 + \varnothing)^2} \mathbf{C}_1 + \frac{\varnothing^2 L_0 \mu GA}{4(1 + \varnothing)^2} \mathbf{C}_2 + EAL_0 \mathbf{C}_3 \quad (3.40)$$

na qual

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varnothing^2 + 2\varnothing + 4 & -(\varnothing^2 + 2\varnothing - 2) \\ 0 & -(\varnothing^2 + 2\varnothing - 2) & \varnothing^2 + 2\varnothing + 4 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0^2} & \frac{t_1}{L_0} & \frac{t_2}{L_0} \\ t_1^2 + \frac{5\varnothing^2 + 10\varnothing + 8}{60(1 + \varnothing)^2} \varepsilon_{\text{eff}} & t_1 t_2 - \frac{5\varnothing^2 + 10\varnothing + 2}{60(1 + \varnothing)^2} \varepsilon_{\text{eff}} & \\ \text{sim.} & t_2^2 + \frac{5\varnothing^2 + 10\varnothing + 8}{60(1 + \varnothing)^2} \varepsilon_{\text{eff}} & \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$t_1 = \frac{1}{60(1 + \varnothing)^2} [5\varnothing(2 + \varnothing)(\theta_{11} - \theta_{21}) + 2(4\theta_{11} - \theta_{21})] \quad (3.44)$$

$$t_2 = \frac{1}{60(1 + \varnothing)^2} [5\varnothing(2 + \varnothing)(\theta_{21} - \theta_{11}) + 2(4\theta_{21} - \theta_{11})] \quad (3.45)$$

O vetor de força interna  $\mathbf{F}_e$  é calculado conforme a Equação (3.26) e a matriz de rigidez de acordo com as Equações (3.17)-(3.19), utilizando a matriz  $\mathbf{D}$  dada na Equação (3.40) e os esforços internos  $N$ ,  $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$  nas Equações (3.37)-(3.39), respectivamente.

### 3.6 MODELO DE VIGA-COLUNA DE TIMOSHENKO PROPOSTO POR TANG, ZHOU E CHAN (2015)

Tang, Zhou e Chan (2015) desenvolveram um elemento de viga-coluna com efeito de segunda ordem e deformação por cisalhamento baseado na hipótese da teoria de viga de Timoshenko. As funções de deslocamento transversal e de rotação, livres de travamento por cisalhamento, são derivadas dos graus nodais de liberdade e das equações de equilíbrio. A deformação axial  $\varepsilon$  do elemento com a parcela da deformação por cisalhamento é calculada como segue:

$$\varepsilon = \frac{u_1}{L_0} + \frac{2\beta_1\theta_{11}^2 - \beta_2\theta_{11}\theta_{21} + 2\beta_1\theta_{21}^2}{30} \quad (3.46)$$

em que

$$\beta_1 = \frac{1 + 15b + 90b^2}{(1 + 12b)^2} \quad (3.47)$$

$$\beta_2 = \frac{1 + 60b + 360b^2}{(1 + 12b)^2} \quad (3.48)$$

$$b = \frac{EI}{\mu GAL_0^2} \quad (3.49)$$

Os esforços internos são determinados pelas seguintes expressões:

$$N = EA \left( \frac{u_1}{L_0} + \frac{2\beta_1\theta_{11}^2 - \beta_2\theta_{11}\theta_{21} + 2\beta_1\theta_{21}^2}{30} \right) \quad (3.50)$$

$$\bar{M}_1 = \left( \alpha_1 \frac{4EI}{L_0} + \beta_1 \frac{4NL_0}{30} \right) \theta_{11} + \left( \alpha_2 \frac{2EI}{L_0} - \beta_2 \frac{NL_0}{30} \right) \theta_{21} \quad (3.51)$$

$$\bar{M}_2 = \left( \alpha_2 \frac{2EI}{L_0} - \beta_2 \frac{NL_0}{30} \right) \theta_{11} + \left( \alpha_1 \frac{4EI}{L_0} + \beta_1 \frac{4NL_0}{30} \right) \theta_{21} \quad (3.52)$$

em que

$$\alpha_1 = \frac{1 + 3b}{1 + 12b} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{1 - 6b}{1 + 12b} \quad (3.53)$$

A matriz **D** simétrica é dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ \text{sim.} & & D_{33} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

em que

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{EA}{L_0}, D_{12} = \frac{EA}{30} (4\beta_1 \theta_{11} - \beta_2 \theta_{21}), D_{21} \\ &= \frac{EA}{30} (-\beta_2 \theta_{11} + 4\beta_1 \theta_{21}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} D_{22} &= \alpha_1 \frac{4EI}{L_0} + \beta_1 \frac{4EAu_1}{30} + \frac{EAL_0}{900} [24\beta_1^2 \theta_{11}^2 - 12\beta_1 \beta_2 \theta_{11} \theta_{21} \\ &\quad + (8\beta_1^2 + \beta_2^2) \theta_{21}^2] \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} D_{23} &= \alpha_2 \frac{2EI}{L_0} - \beta_2 \frac{EAu_1}{30} + \frac{EAL_0}{450} [-3\beta_1 \beta_2 \theta_{11}^2 + (8\beta_1^2 + \beta_2^2) \theta_{11} \theta_{21} \\ &\quad - 3\beta_1 \beta_2 \theta_{21}^2] \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} D_{33} &= \alpha_1 \frac{4EI}{L_0} + \beta_1 \frac{4EAu_1}{30} + \frac{EAL_0}{900} [(8\beta_1^2 + \beta_2^2) \theta_{11}^2 - 12\beta_1 \beta_2 \theta_{11} \theta_{21} \\ &\quad + 24\beta_1^2 \theta_{21}^2] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  representam o efeito linear devido à deformação de cisalhamento, enquanto que os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  representam o efeito não linear devido à deformação de cisalhamento. Se a deformação de cisalhamento é desprezada, então o parâmetro  $b$  assume valor igual a zero e os correspondentes parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  ficam iguais a um. Assim, fazendo essas considerações as equações para a matriz de rigidez e para o vetor de força interna recaem na hipótese de viga de Euler-Bernoulli. O vetor de força interna  $\mathbf{F}_{el}$  é calculado conforme a Equação (3.26) e a matriz de rigidez de acordo com as Equações (3.17), (3.18) e (3.19), utilizando a matriz  $\mathbf{D}$  dada nas Equações (3.54)-(3.58) e os esforços internos  $N$ ,  $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$  calculados conforme as Equações (3.50), (3.51) e (3.52), respectivamente.

## 4 MÉTODO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

O problema básico da análise não linear é encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura na posição deformada que está sob a ação de um carregamento aplicado. O sistema de equações não lineares que descreve o equilíbrio estático de um sistema estrutural com não linearidade geométrica é descrito por (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

na qual,  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças desequilibradas (ou vetor de forças residuais),  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas, avaliado em função do vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ , e  $\lambda$  é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor de forças de referência  $\mathbf{F}_r$ .

O sistema dado em Equação (4.1) tem  $(n + 1)$  incógnitas, que são o vetor  $\mathbf{u}$  com  $n$  elementos e o parâmetro  $\lambda$ , mas somente  $n$  equações. Assim, uma equação de restrição  $c(\mathbf{u}, \lambda) = 0$  é adicionada ao sistema. É justamente a forma desta equação de restrição que distingue as várias estratégias de iteração, todas com o mesmo objetivo de corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa precedente e, assim, restaurar o equilíbrio da estrutura o mais rápido possível.

### 4.1 ANÁLISE INCREMENTAL E ANÁLISE ITERATIVA

De maneira geral, na análise não linear a questão central é que a rigidez da estrutura varia com os deslocamentos da mesma. Ou seja, à medida que o carregamento aumenta a partir da condição inicial em que a estrutura se encontra indeformada, a proporção na qual os deslocamentos variam se modifica, aumentando, diminuindo ou permanecendo a mesma em cada incremento de carga. Portanto, a rigidez deve ser tratada separadamente em cada um desses incrementos (ou trechos) do carregamento. Deste modo, a previsão desse aumento dos deslocamentos da estrutura só pode ser efetuada por incrementos, por etapas, pois em cada um desses incrementos a rigidez será diferente. Por este motivo a análise incremental é um dos conceitos-chave da análise não linear (ALVES FILHO, 2012).

Da Equação (4.1), como  $\mathbf{g}$  é uma função não linear dos deslocamentos, iterações para correção do parâmetro de força são necessárias para obter a solução. Assim, para uma sequência do parâmetro de força  $\lambda$ , uma sequência do respectivo incremento de

deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  é gerada. A seleção automática do tamanho do incremento desse parâmetro ( $\Delta\lambda$ ) é essencial e deve transmitir o grau de não linearidade atual do sistema estrutural em análise. Ou seja, uma estratégia eficiente de incremento automático de força deve fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear, pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear e ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas que detectem quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados (ROCHA, 2000).

Outro conceito-chave da análise não linear é o de análise iterativa. Ao longo da trajetória de equilíbrio de uma estrutura, existe o equilíbrio entre as forças internas e as forças externas aplicadas a cada nó. As forças internas na estrutura são calculadas pelo conhecimento da geometria deformada dela e pela equação constitutiva que relaciona as forças internas e a condição deformada. Portanto, em um dado incremento de carga conhecido, propõe-se uma condição deformada da estrutura e, para essa condição, calcula-se as consequentes forças internas. Verifica-se, em seguida, se essa condição proposta deformada para o incremento gera uma força interna que equilibre o incremento de carga proposto em cada nó do modelo da estrutura. Se isso não ocorrer, conclui-se que a deformada proposta não é a verdadeira associada ao incremento de carga conhecido. Deve-se, portanto, propor outra deformada e depois outra, até se ter sucesso na busca. Isso só pode ser efetuado em um processo iterativo, utilizando estratégias numéricas adequadas (ALVES FILHO, 2012).

Neste trabalho, a solução da Equação (4.1) é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo com o método de Potra-Pták, associado à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais, que estão detalhados a seguir.

## 4.2 MÉTODOS NUMÉRICOS DE NEWTON-RAPHSON E DE POTRA-PTÁK PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Saffari e Mansouri (2011) afirmam que de toda a computação numérica, os sistemas de equações não lineares são talvez os mais difíceis de resolver. Existem várias abordagens para encontrar soluções. Para um problema não linear, a solução do conjunto de equações não lineares normalmente ocupa a maior parte do tempo de processamento. Como o método de Newton-Raphson possui características de convergência quadrática, ele é comumente usado

para resolver equações não lineares. Em cada etapa iterativa desse método um conjunto de equações algébricas lineares é resolvido.

Vários métodos iterativos já foram propostos para melhorar as soluções dadas pelo método de Newton-Raphson para equações não lineares. Entretanto, muitos desses métodos exigem de forma muito intensa do processamento computacional, o que restringe sua aplicação prática. Nos últimos anos, houve certo progresso na criação de métodos iterativos projetados para melhorar a aplicação do método de Newton-Raphson e, ao mesmo tempo, não exigir o cálculo de segundas derivadas (matriz Hessiana) para resolver as equações não lineares. Tais métodos podem ser classificados como pertencendo à categoria de um passo ou dois passos. No caso dos métodos de dois passos, frequentemente ocorre a combinação do método de Newton-Raphson com algum outro método de um passo (SAFFARI; MANSOURI, 2011).

No método de dois passos, duas equações são usadas para encontrar a raiz aproximada das equações não lineares. Uma equação delas é chamada de preditora, pois fornece uma predição sobre a raiz usando a estimativa inicial. A outra equação é chamada de corretora, pois fornece uma correta aproximação utilizando o valor predito pelo primeiro ponto. Portanto, métodos de dois passos são também chamados de métodos preditores-corretores.

O método de Newton-Raphson é um dos mais importantes para o entendimento da lógica das estratégias iterativas. Aplicando-o ao sistema na Equação (4.1), chega-se à seguinte expressão (BATHE, 2006):

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)}\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}^{(k-1)} \quad (4.2)$$

em que  $\mathbf{K} = \partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{u}$  é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural (matriz Jacobiana) e  $\delta\mathbf{u}^{(k)}$  é o subincremento de deslocamentos. O superíndice (k-1) indica a iteração anterior e (k) indica a iteração atual. Os parâmetros totais de força ( $\lambda$ ) e do vetor de deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ) no passo de força  $t+\Delta t$  e iteração k são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)} \quad (4.4)$$

Com a combinação das Equações (4.2) e (4.3), chega-se à expressão para  $\delta \mathbf{u}^{(k)}$  (CRISFIELD, 1991):

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (4.5)$$

na qual  $\delta \lambda^{(k)}$  é o subincremento do parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e  $\delta \mathbf{u}_g^{(k)}$  e  $\delta \mathbf{u}_r^{(k)}$  são obtidos, respectivamente, por:

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (4.6)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r \quad (4.7)$$

O cálculo explícito de  $[\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1}$  pode ser evitado resolvendo-se o sistema de equações lineares via decomposição (por exemplo, fatoração LU e fatoração de Cholesky), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária. Os parâmetros incrementais do parâmetro de força ( $\Delta \lambda$ ) e do vetor de deslocamentos nodais ( $\Delta \mathbf{u}$ ) no passo de força  $t+\Delta t$  e iteração  $k$  são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)} \quad (4.8)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (4.9)$$

Os autores Potra e Pták (1984) desenvolveram um método iterativo de dois passos com ordem de convergência cúbica baseado no método de Newton-Raphson, para encontrar uma raiz aproximada de uma função não linear do tipo  $f(x) = 0$ . Esse método consiste de duas avaliações da função  $f(x)$  dada e necessita apenas do cálculo de derivadas de primeira ordem  $f'(x)$ . Esse método foi adaptado para o problema estrutural em Souza et al. (2018) num procedimento incremental, cujas equações iterativas são:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \quad (4.10)$$



$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})] \quad (4.11)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} \quad (4.13)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k+1)} \quad (4.14)$$

O superíndice  $(k + 1)$  nas equações indica a iteração corrente e  $(k)$  a iteração anterior, no passo de carga atual. O cálculo explícito da inversa da matriz de rigidez  $[\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1}$  pode ser evitado resolvendo-se os sistemas de equações lineares via decomposição (por exemplo, fatoração LU ou fatoração de Cholesky), visto que uma única fatoração de  $\mathbf{K}$  no início do ciclo iterativo é necessária. Os parâmetros incrementais do parâmetro de carga ( $\Delta \lambda$ ) e do vetor de deslocamentos nodais ( $\Delta \mathbf{u}$ ) no passo de carga  $t + \Delta t$  e iteração  $(k + 1)$  são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta \lambda^{(k+1)} = \Delta \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k+1)} \quad (4.15)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}^{(k+1)} \quad (4.16)$$

### 4.3 TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO

A análise não linear de estruturas considera os comportamentos não lineares tanto geométricos quanto materiais de uma dada estrutura. À medida que a complexidade estrutural aumenta, os sistemas de equações não lineares que regem seu comportamento necessitam de técnicas que descrevam por completo suas trajetórias de equilíbrio. Deste modo, as técnicas de continuação (ou métodos de continuação) foram desenvolvidas para traçar essas trajetórias de soluções não lineares arbitrárias, identificando os pontos críticos e comportamentos de equilíbrio dessas estruturas (SOUSA, 2013).

As técnicas de continuação são, basicamente, métodos provisorios-corretores que auxiliam o traçado de soluções não lineares arbitrárias, identificando os pontos críticos e comportamentos de equilíbrio dessas estruturas. Algumas das técnicas mais conhecidas são:

comprimento de arco, deslocamento generalizado e norma mínima dos deslocamentos residuais. Elas se diferenciam umas das outras pelas condições de restrição adotadas para a resolução do sistema de equações não lineares (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2011).

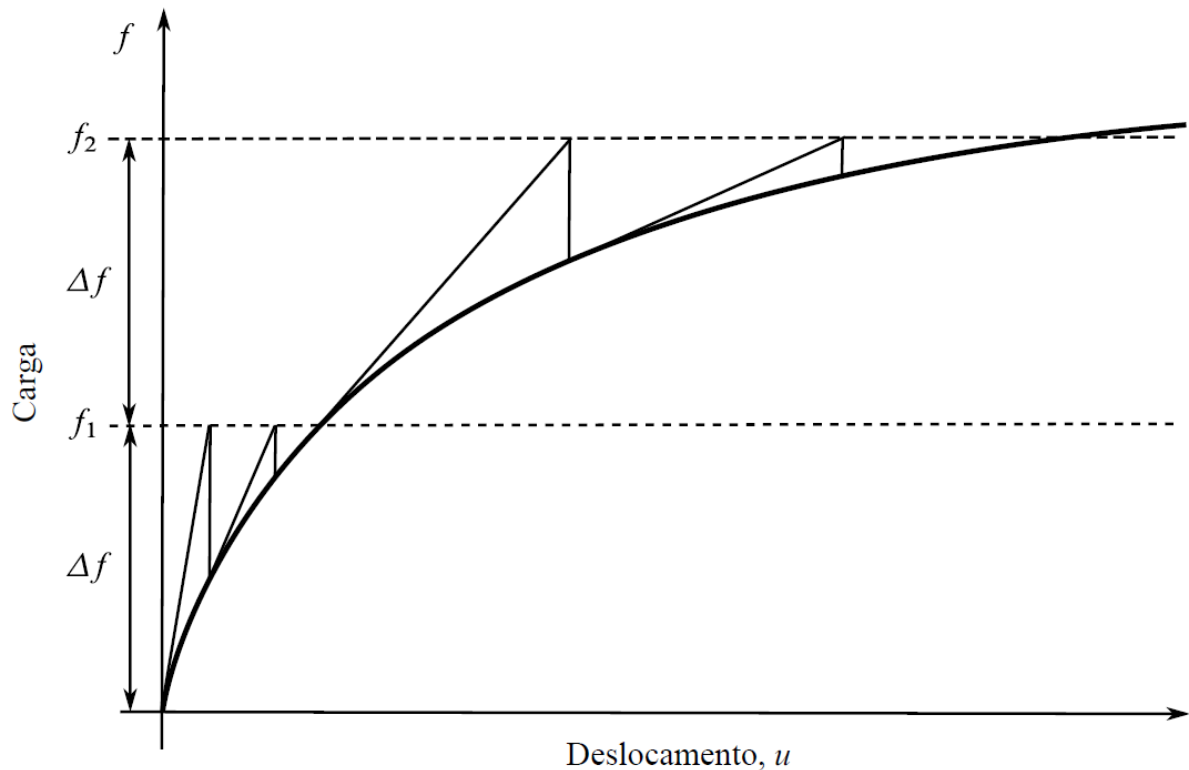
Para ultrapassar os pontos limites e traçar a trajetória de equilíbrio completa das estruturas, adota-se neste trabalho o método de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais. A determinação do parâmetro de carga iterativo,  $\delta\lambda$ , é função de uma dada estratégia de iteração ou equação de restrição imposta ao problema. A ideia básica de uma estratégia de iteração é tratar o parâmetro de carga  $\lambda$  como uma variável adicional, de forma a obter todo o traçado da trajetória de equilíbrio com possíveis passagens pelos pontos limites. Com isso, para equilibrar o número de equações e o número de incógnitas, uma equação de restrição deve ser somada às equações de equilíbrio originais.

#### 4.4 TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO: COMPRIMENTO DE ARCO

A técnica do Comprimento de Arco é uma das mais utilizadas para a determinação da trajetória de equilíbrio na análise não linear de estruturas. Seu entendimento auxilia na compreensão de outras várias técnicas. No Comprimento de Arco, incrementa-se simultaneamente tanto a carga quanto o deslocamento por meio da adição de uma equação de restrição no sistema de equações de equilíbrio, juntamente com a nova incógnita parâmetro de carga  $\lambda$ . Há diferentes tipos de restrição, como a restrição de hiperplano fixo (ou restrição linear), hiperplano atualizado e hiperesfera.

Segundo Lacerda (2014), o método de Newton-Raphson só fornece a solução de um simples ponto no caminho de equilíbrio. Para obter outros pontos, combinam-se as iterações de Newton-Raphson com um procedimento incremental, como por exemplo a Técnica de Continuação Comprimento de Arco Linear. A ideia é aplicar as iterações para vários ciclos de nível de carga. Ou seja, no primeiro ciclo obtém-se uma solução para um nível de carga  $\Delta f$ . No segundo ciclo, obtém-se outra solução para um nível de carga  $2\Delta f$  e assim por diante, gerando uma solução para cada nível de carga. O procedimento é ilustrado na Figura 4.1.

**Figura 4.1– Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson**



Fonte: Lacerda (2014)

O procedimento incremental-iterativo deveria ser usado mesmo quando se busca uma solução para um único nível de carga. Inserir uma grande carga  $f$  de uma só vez para o método de Newton-Raphson pode levar a problemas de convergência, pois a solução inicial pode estar muito longe da solução final e, neste caso, a prática mostra que as iterações podem encontrar dificuldades para convergir e até mesmo não encontrar a solução do problema. Incrementar a carga lentamente até atingir a carga desejada  $f$  torna a solução inicial, em cada nível, próxima da solução final, facilitando a convergência.

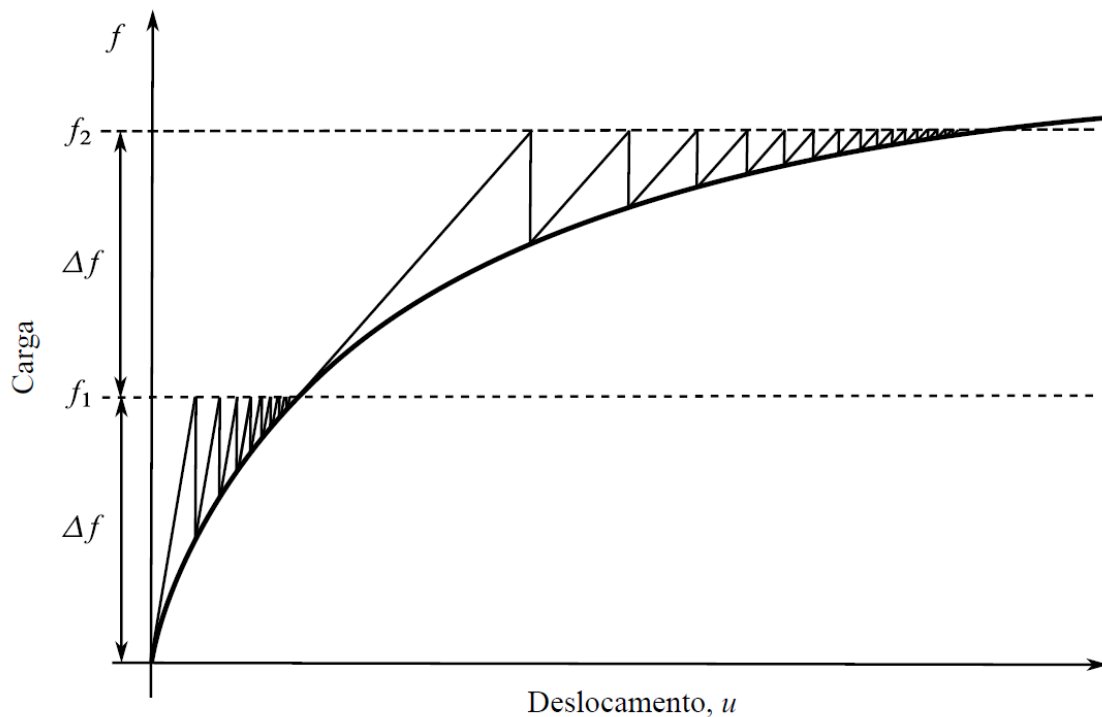
Além disso, o procedimento incremental-iterativo é importante para materiais que exibem dependência do caminho seguido pela estrutura durante sua deformação. Diferentes tensões podem ser obtidas dependendo da forma com que são aplicadas as cargas. Aplicar incrementos de cargas pequenos permite seguir mais de perto o caminho de deformação e obter a solução correta do problema (BORST et al., 2012).

O método de Newton-Raphson requer computar e fatorar a matriz de rigidez tangente em cada iteração. Há problemas que geram grandes matrizes de rigidez tangente, principalmente problemas tridimensionais. Nesses casos, o custo computacional de montar e

fatorar grandes matrizes repetidas vezes é consideravelmente alto. Vários métodos têm sido propostos, para lidar com esse problema, como o método de Newton-Raphson Modificado, entre outros.

O método de Newton-Raphson modificado consiste em computar a matriz de rigidez tangente uma única vez e na primeira iteração de cada ciclo de nível de carga no procedimento incremental-iterativo, conforme ilustra a Figura 4.2.

**Figura 4.2– Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado**



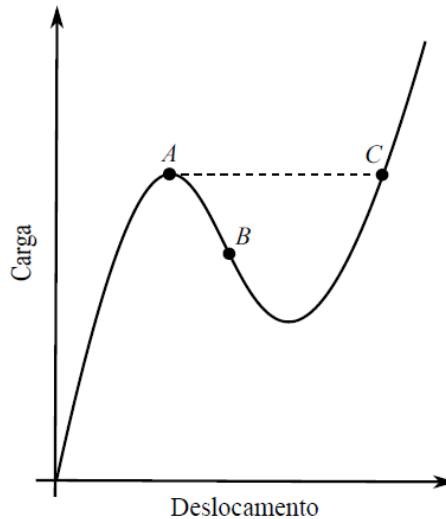
Fonte: Lacerda (2014)

Uma outra alternativa é prescrever deslocamentos incrementais em vez de cargas incrementais. A primeira alternativa é denominada controle de carga e a segunda é chamada de controle de deslocamento. Quando um deslocamento é prescrito em um nó, geram-se tensões na estrutura que resulta em uma força naquele nó que é oposta, mas igual em módulo, à força externa que causaria o mesmo deslocamento que foi prescrito naquele nó.

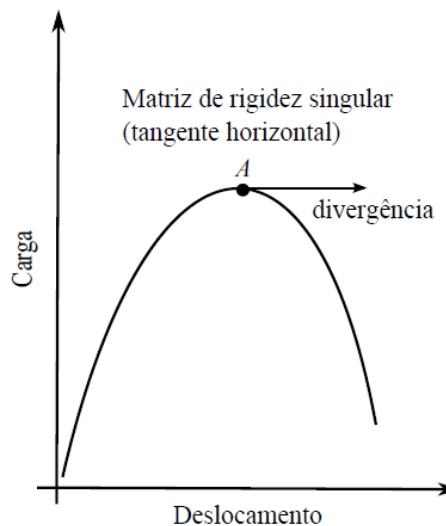
De acordo Lacerda (2014), o controle de carga tem suas limitações para traçar o caminho de equilíbrio. Por exemplo, na Figura 4.3 não seria possível alcançar o ponto B, pois o aumento de carga faria o trajeto saltar diretamente para o ponto C. E mesmo neste caso, pode haver problemas de convergência. A matriz de rigidez tangente torna-se singular no

ponto A (ponto de limite) do caminho de equilíbrio como mostra a Figura 4.4 e por isso não pode ser invertida. Isto significa que a tangente de rigidez é horizontal. Além disso, um salto de A para C pode ser muito para que o método de Newton-Raphson possa convergir corretamente.

**Figura 4.3– Limitações do controle de carga e controle de deslocamento: snap-through**



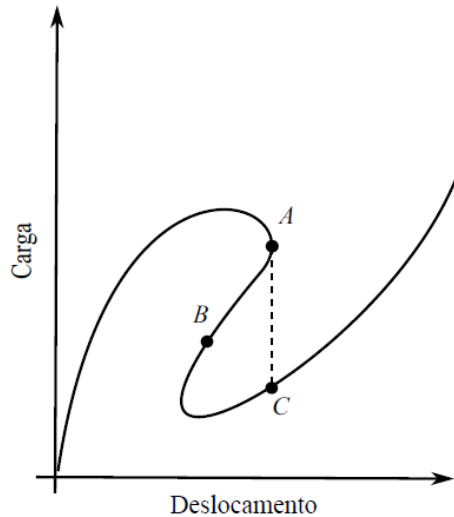
**Figura 4.4– Limitações do controle de carga e controle de deslocamento: matriz de rigidez tangente singular**



O controle de deslocamento deveria, sempre que possível, ser utilizado no lugar do controle de carga pois supera parte de suas limitações. O ponto B da Figura 4.5 seria

alcançado naturalmente e a matriz de rigidez tangente não se tornaria singular no ponto de máximo (ponto de limite).

**Figura 4.5– Limitações do controle de carga e controle de deslocamento: snap-back**



Contudo, o snap-back causa dificuldades ao controle de deslocamento da mesma forma que o snap-through causa ao controle de carga. Por exemplo, o controle de deslocamento não pode alcançar pontos como o ponto B da Figura 3.12(c), saltando de A para C. Um método indicado para resolver todos esses problemas é denominado de método do comprimento de arco, descrito a seguir.

Foram vistos, anteriormente, procedimentos para determinar o caminho de equilíbrio controlando a carga ou o deslocamento. Foi mostrado que estes procedimentos têm suas limitações, tais como tangente horizontal nos pontos de limite e dificuldade de seguir o caminho gerado pelo fenômeno snap-back. O método do comprimento de arco supera todos estes problemas de uma forma elegante e eficiente, pois nele incrementa-se simultaneamente tanto a carga como o deslocamento, adicionando-se uma nova equação ou restrição no sistema de equações de equilíbrio e uma nova incógnita: o parâmetro de carga. De fato, ele tornou-se método preferido para determinar o caminho de equilíbrio, apesar de outros métodos também terem sido propostos (KRENK, 2009).

No método do Comprimento de Arco Linear (restrição hiperplano fixo) proposto por Riks (1972), o caminho de iteração é sempre mantido ortogonal à tangente inicial em cada etapa. A expressão para o incremento de carga inicial (solução predita) é dada por  $(k=0)$  (Crisfield, 1991):

$$\Delta\lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{u}_r\|} \quad (4.17)$$

em que  $\Delta l$  representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de carga corrente de acordo com a expressão (Crisfield, 1991):

$$\Delta l = {}^0\Delta l \left( \frac{k_d}{t_k} \right)^{0,5} \quad (4.18)$$

em que  ${}^0\Delta l$  representa o incremento de comprimento de arco no passo de carga inicial,  $k_d$  é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente e  $t_k$  é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior.

No processo iterativo subsequente, a equação de restrição  $c(k)$  usada para calcular  $\delta\lambda(k)$  é obtida fazendo com que a solução incremental iterativa  $(\delta\mathbf{d}k, \delta\lambda \mathbf{F}_r)$  seja ortogonal à solução incremental predita  $(\Delta\mathbf{d}0, \Delta\lambda\mathbf{F}_r)$ , conforme a expressão:

$$c^{(k)} = (\delta\mathbf{u}^{(k)})^T \Delta\mathbf{u}^0 + \delta\lambda^{(k)} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.19)$$

#### 4.5 TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO: NORMA MÍNIMA DOS DESLOCAMENTOS RESIDUAIS

Chan (1988) apresentou uma estratégia de iteração definida como o Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais. Nessa estratégia, ao invés de se usarem restrições geométricas e de energia, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (ou deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas. Vale ressaltar que esse é o objetivo principal do ciclo iterativo. O subincremento de carga é calculado por ( $k > 0$ ):

$$\delta\lambda_i^{(k)} = - \frac{\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}, \text{ com } i = 1,2 \quad (4.20)$$

na qual,

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{a}, \lambda^{(k)}) \text{ com } \mathbf{a} = \mathbf{u}^{(k)} \text{ ou } \mathbf{y}^{(k+1)} \quad (4.21)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}_r \quad (4.22)$$

Ao final de cada processo iterativo, obtém-se uma nova condição de equilíbrio da estrutura analisada quando pelo menos um dos dois, ou ambos os critérios de convergência forem atendidos. São considerados dois critérios de convergência para o ciclo iterativo, sendo um baseado nos deslocamentos, verificado sempre no final da iteração atual, dado por:

$$\|\delta \mathbf{u}_2\| \leq \text{tol}_1 \|\mathbf{u}\| \quad (4.23)$$

e o outro, nas forças, verificado no início da iteração atual utilizando parâmetros da iteração anterior:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol}_2 \|\mathbf{F}_r\| \quad (4.24)$$

em que  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana e  $\text{tol}_1$  e  $\text{tol}_2$  são as tolerâncias fornecidas pelo usuário.

O algoritmo com o procedimento incremental e iterativo proposto associado à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (Chan, 1988) é mostrado na Figura 4.6. Os dados de entrada no algoritmo são: comprimento inicial de arco  ${}^0\Delta l$ ; número máximo de iterações em cada passo de carga  $k_{\text{máx}}$ ; número de iterações desejadas em cada passo de carga  $k_d$ ; tolerâncias  $\text{tol}_1$  e  $\text{tol}_2$ ; incremento de carga  $\Delta P$ ; e número máximo de passos de carga  $NP_{\text{máx}}$ . As saídas do algoritmo são: vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ ; parâmetro de carga total  $\lambda$ ; número total de passos de carga  $NP$ ; número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução  $k_{\text{total}}$ ; e número médio de iterações por passo de carga  $k_{\text{médio}}$ .



**Figura 4.6– Algoritmo do procedimento incremental e iterativo com o método de Potra-Pták associado à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais**

*Entrada:*  ${}^0\Delta l$ ,  $k_d$ ,  $NP_{\text{máx}}$ ,  $tol_1$ ,  $tol_2$ ,  $k_{\text{máx}}$ ,  $\Delta P$   
*Saída:*  $NP$ ,  $k_{\text{total}}$ ,  $\lambda$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $t$ ,  $k_{\text{médio}}$

1.  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}$ ,  $\Delta \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}$ ,  $\lambda \leftarrow 0$ ,  $k_{\text{total}} \leftarrow 0$ ,  $\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l$
2. tic() (inicia o cronômetro)
3.  $\text{aux\_1} \leftarrow tol_1 \cdot \|\mathbf{F}_r(\Delta P)\|$
4. Para  $NP \leftarrow 1, \dots, NP_{\text{máx}}$  faça
5.  $k \leftarrow 0$
6. Calcular a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$
7. Decompor a matriz  $\mathbf{K}$  em matrizes triangulares  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$  (Fatoração LU)
8.  $\text{aux\_2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1}\mathbf{F}_r(\Delta P)$
9.  $\delta \mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1}\text{aux\_2}$
10.  $\Delta \lambda^{(0)} \leftarrow \Delta l / \|\delta \mathbf{u}_r\|$
11. Se  ${}^t\Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r < 0$  então
12.  $\Delta \lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta \lambda^{(0)}$
13. Fim-Se
14.  $\delta \mathbf{u} \leftarrow \Delta \lambda^{(0)} \delta \mathbf{u}_r$
15.  $\Delta \mathbf{u}^{(0)} \leftarrow \delta \mathbf{u}$
18. Para  $k \leftarrow 1, \dots, k_{\text{máx}}$  faça
19.  $k = k + 1$
20. Calcular a matriz de rigidez  $\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
21. Decompor a matriz  $\mathbf{K}$  em matrizes triangulares  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$  (Fatoração LU)
22.  $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r(\Delta P) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$  //passo 1
23.  $\text{aux\_2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1}\mathbf{g}$
24.  $\delta \mathbf{u}_g \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1}\text{aux\_2}$
25.  $\text{aux\_2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1}\mathbf{F}_r(\Delta P)$
26.  $\delta \mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1}\text{aux\_2}$
27.  $\delta \lambda_1 \leftarrow -(\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_g) / (\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r)$
28.  $\delta \mathbf{u}_1 \leftarrow \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{u}_r$
29.  $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_1$  //passo 2
30.  $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r(\Delta P) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{y})$
31.  $\text{aux\_2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1}\mathbf{g}$
32.  $\delta \mathbf{u}_g \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1}\text{aux\_2}$
33.  $\delta \lambda_2 \leftarrow -(\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_g) / (\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r)$
34.  $\delta \mathbf{u}_2 \leftarrow \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{u}_r$
35.  $\Delta \mathbf{u} \leftarrow \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_2$
36.  $\Delta \lambda \leftarrow \Delta \lambda + \delta \lambda_2$
37.  $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r(\Delta P) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
38. Se  $\|\mathbf{g}\| < \text{aux\_1}$  ou  $\|\delta \mathbf{u}_2\| < tol_2 \cdot \|\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}\|$  então
39. Sair do loop
40. Fim-Se
41. Fim-Para
42.  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$
43.  $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta \lambda$
44.  $\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l (k_d/k)^{0.5}$
45.  $k_{\text{total}} \leftarrow k_{\text{total}} + k$
46. Fim-Para
47.  $k_{\text{médio}} \leftarrow k_{\text{total}} / NP$
48.  $t \leftarrow \text{toc()}$  (lê o cronômetro)

## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção, simulações de problemas de estruturas planas com comportamento não linear geométrico (uma viga em balanço e três pórticos) são efetuadas com o programa Scilab (Scilab, 2020), com o intuito de comparar os diferentes modelos de viga-coluna baseados nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Os pesos próprios das estruturas são desprezados nas análises. Além disso, salienta-se que, ao invés de ser considerado um número máximo de passos de carga  $NP_{\text{máx}}$  como critério de parada para o fim da simulação (ver linha 4 do algoritmo na Figura 4.6), é adotado um deslocamento vertical máximo no nó da malha em que é aplicado o carregamento.

De forma geral, o processo de simulação numérica é dividido em três etapas: pré-processamento (entrada de dados), processamento (análise dos dados) e pós-processamento (saída dos dados). O pré-processamento é a etapa inicial da implementação computacional e nele ocorre a leitura dos dados necessários à análise do problema, como os parâmetros que definem o modelo de elementos finitos adotado para o sistema estrutural e os parâmetros que controlam a estratégia de solução não-linear. Em seguida, na etapa de processamento é realizada a análise dos dados de entrada, onde para cada passo de carga (ou incremento de carga), um problema de equilíbrio é resolvido. Por fim, no pós-processamento ocorre a saída dos dados relativos à configuração deformada da estrutura, como a impressão da trajetória de equilíbrio, número total de iterações acumuladas e tempo de processamento (ROCHA, 2000).

Para a simulação numérica de pórticos planos, destaca-se a importância dos pórticos em L, conhecidos na literatura como *L-Frames*. Isso porque em estruturas apertadas esbeltas sujeitas a grandes deflexões, como é o caso dos pórticos em L, certos membros podem apresentar configurações de equilíbrio crítico e, principalmente, configurações pós-críticas, fortemente dependentes das características dos membros adjacentes (GALVÃO, 2004).

Koiter (1967) mostrou que alguns pórticos em L apresentavam bifurcação assimétrica e, conseqüentemente, sua capacidade pós-crítica era afetada por imperfeições. Seus resultados puderam ser comparados com os obtidos experimentalmente por Roorda (1965). Desde então, o comportamento pós-crítico desse tipo de estrutura tem sido fartamente estudado. Vários autores no passado estudaram a região inicial da trajetória pós-crítica dessas estruturas através de expansões assintóticas da energia potencial ou das equações de equilíbrio que governam seu comportamento não-linear. Esses estudos normalmente tinham a preocupação de determinar a inclinação e a curvatura do início da resposta pós-crítica, pois,

como se sabe, esses dois parâmetros são suficientes para caracterizar o tipo de bifurcação, podendo ainda ser usados para estimar a sensibilidade da estrutura a imperfeições.

Essas soluções aproximadas podem, entretanto, descrever somente a região inicial do comportamento pós-crítico do pórtico e ainda gerar erros significativos quando houver grandes deslocamentos ou grandes imperfeições no sistema estrutural.

Devido à constatação da forte não-linearidade no seu comportamento pós-crítico, os pórticos em L têm sido usados por vários autores para testar a eficiência de várias formulações de elementos finitos, bem como o desempenho computacional de várias estratégias de solução de sistemas de equações não lineares.

## 5.1 VIGA EM BALANÇO SUJEITA A UM MOMENTO

Considere a viga em balanço ilustrada na Figura 5.1 (a) com comprimento indeformado  $L_0 = 1,0$  m, seção transversal retangular com dimensões  $(0,5 \times 0,6)$  m<sup>2</sup> e submetida a uma carga momento  $M = 2\pi EI\lambda/L_0$  aplicada na extremidade livre. As propriedades materiais consideradas são: módulo de elasticidade longitudinal  $E = 1,0 \times 10^7$  KPa; módulo de cisalhamento  $G = E/2$ ; e coeficiente de correção de cisalhamento  $\mu = 1,0$ .

Na Figura 5.1 (b) aparecem as trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical na extremidade livre *versus* incremento de carga  $\lambda$ ) obtidas com os modelos de viga de Timoshenko implementados, havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Bathe e Bolourchi (1979). A configuração indeformada ( $NP = 0$ ) e as configurações deformadas (para os passos de carga  $NP = 5, 15, 30$  e  $37$ ) estão ilustradas na Figura 5.2, evidenciando os níveis elevados de deslocabilidade da estrutura. A viga é discretizada com 41 elementos finitos de viga-coluna e 42 nós. Os parâmetros adotados para o método de solução (algoritmo da Figura 4.6) são:  ${}^0\Delta l = 0,8$ ;  $k_d = 5$ ;  $k_{m\acute{a}x} = 150$ ;  $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-5}$ ; e  $\Delta P = 1,0$  kN.

Figura 5.1 – Viga em balanço: a) modelo estrutural; e b) trajetórias de equilíbrio

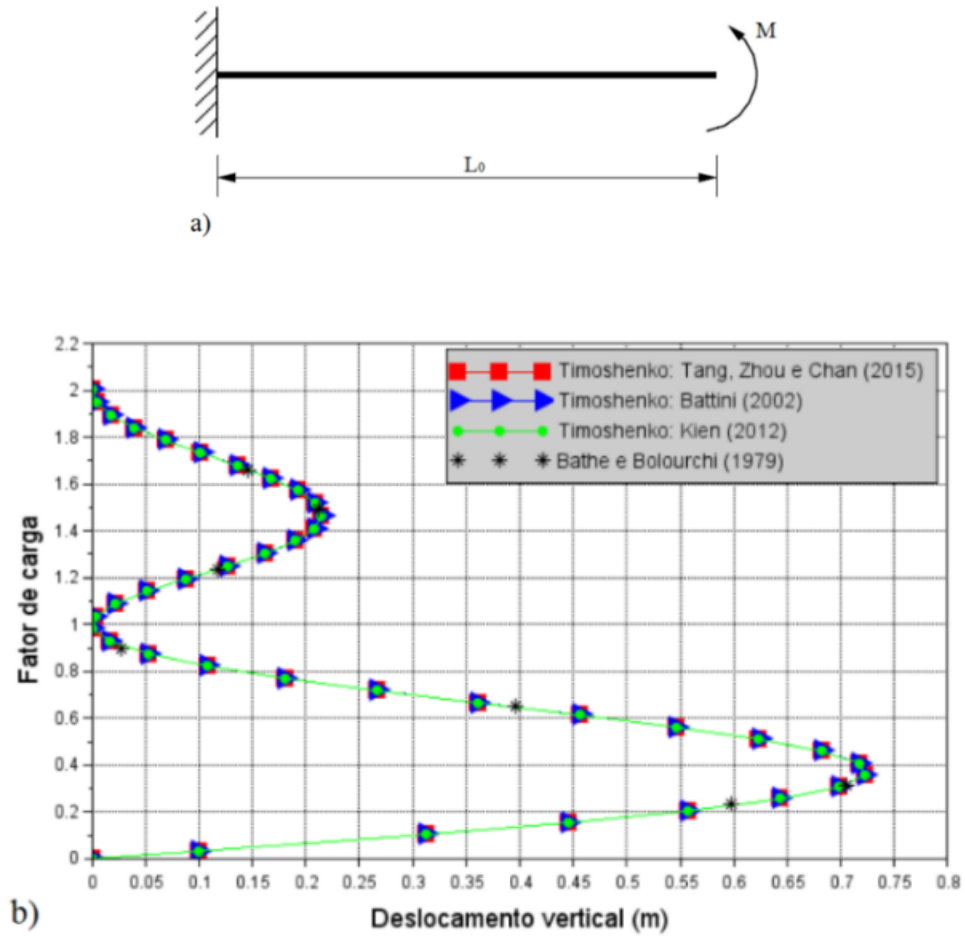
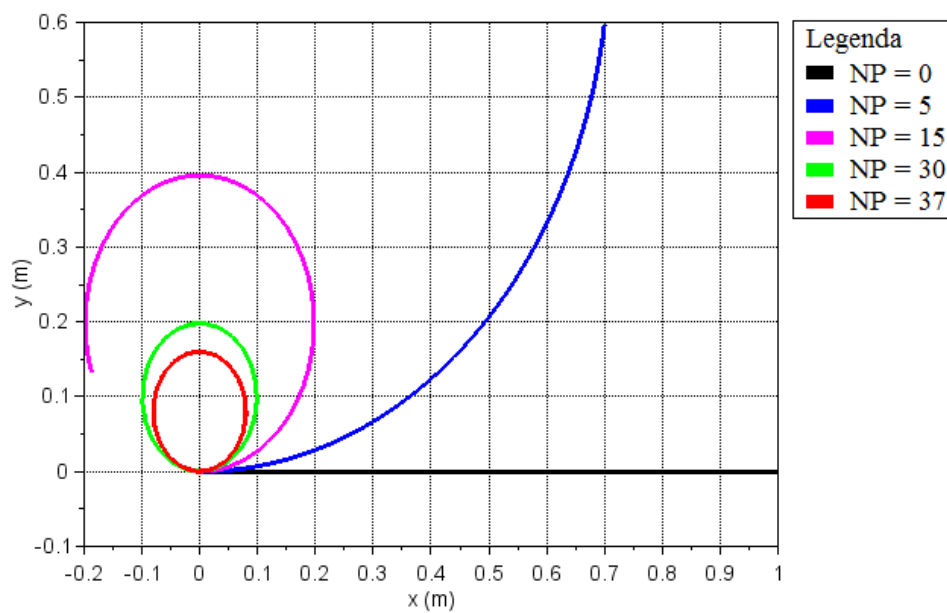


Figura 5.2 – Configurações deformadas da viga em balanço



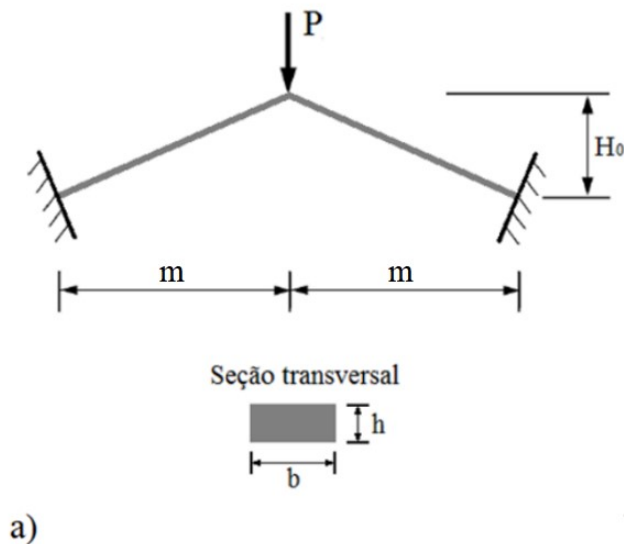
## 5.2 PÓRTICO DE WILLIAMS

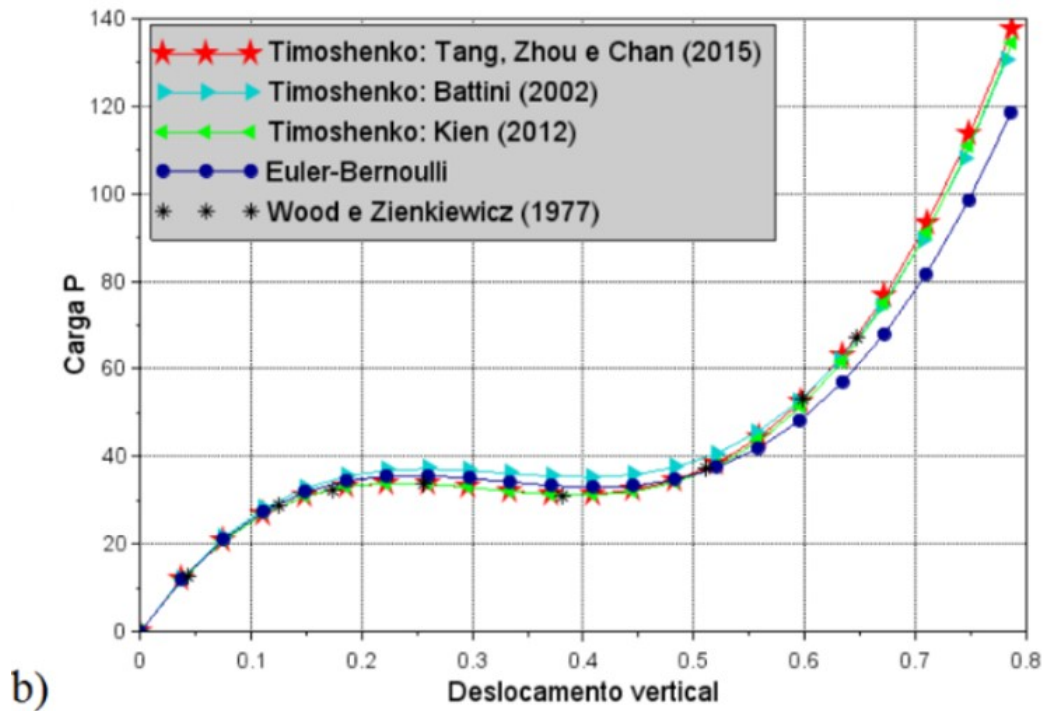
O Pórtico de Williams é uma estrutura plana simétrica formada por duas vigas inclinadas, rigidamente interligadas e que se unem formando a letra “V” invertida. As condições de contorno das duas barras são tais que impedem os deslocamentos transversais e rotacionais, definindo-o como um pórtico biengastado.

Considere o pórtico de Williams mostrado na Figura 5.3 (a), usado pelos pesquisadores Wood e Zienkiewicz (1977), Kien (2012) e Kien, Huong e Ha (2013) para testar o comportamento de elementos não lineares na análise de grandes deslocamentos de pórticos. Os dados adimensionais da estrutura são:  $m = 12,943$ ;  $H_0 = 0,386$ ;  $b = 0,753$ ;  $h = 0,243$ ;  $E = 10,3 \times 10^6$ ;  $G = E/2$ ; e  $\mu = 5/6$ . As trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical *versus* carga  $P$ ) com dois pontos limites de força são apresentadas na Figura 5.3 (b).

Observa-se boa concordância entre as curvas obtidas com as formulações de Kien (2012) e Tang, Zhou e Chan (2015) e os pontos de equilíbrio obtidos por Wood e Zienkiewicz (1977). No entanto, houve diferença na curva obtida com o modelo de Battini (2002) nas regiões próximas aos pontos limites de força. Além disso, ao final da análise (após o segundo ponto limite de força), a trajetória obtida com a formulação clássica de Euler-Bernoulli diverge das demais, o que reforça a importância da consideração do cisalhamento na análise. Nas simulações, os parâmetros adotados para o método de solução são:  ${}^0\Delta l = 0,065$ ;  $k_d = 4$ ;  $k_{m\acute{a}x} = 150$ ;  $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-8}$ ; e  $\Delta P = 1,0$ .

**Figura 5.3 – Pórtico de Williams: a) modelo estrutural; e b) trajetórias de equilíbrio**



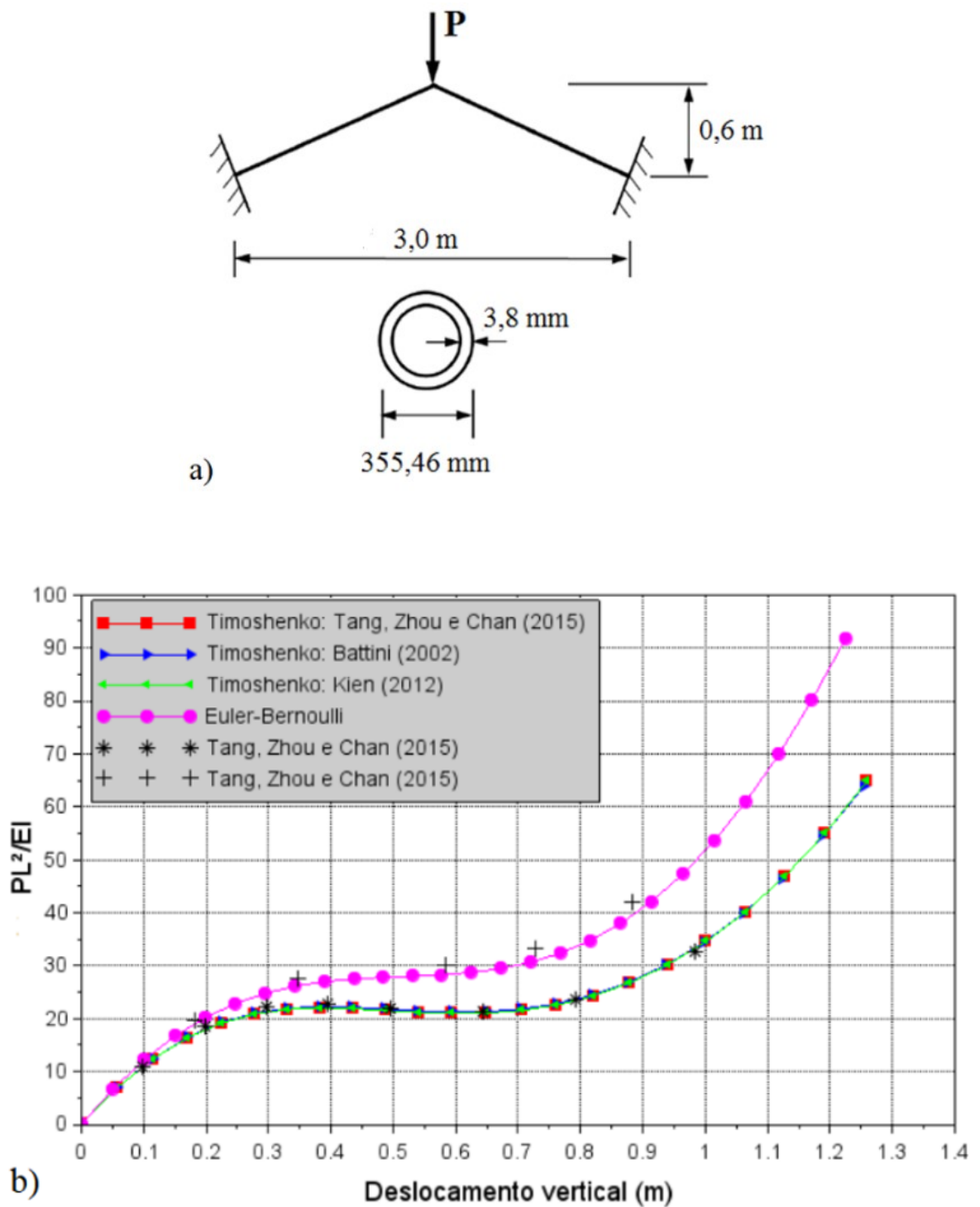


### 5.3 PÓRTICO PROPOSTO POR TANG, ZHOU E CHAN (2015)

Seja o pórtico proposto por Tang, Zhou e Chan (2015) cujas barras curtas e de seção circular vazada são adotadas para enfatizar o efeito da deformação de cisalhamento. As propriedades do material são: módulo de elasticidade longitudinal  $E = 2,0 \times 10^8$  KPa; e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ ; e o módulo de cisalhamento  $G = E/(2+2\nu)$ .

O modelo da estrutura é mostrado na Figura 5.4 (a) e os resultados são apresentados na Figura 5.4 (b). O coeficiente de correção de cisalhamento é  $\mu = 0,54$ . Foram utilizados 20 elementos de viga-coluna na discretização do pórtico. Nota-se razoável concordância entre as curvas obtidas com os modelos de Timoshenko e os pontos de equilíbrio obtidos por Tang, Zhou e Chan (2015). Contudo, ocorreu uma pequena diferença nos resultados com o modelo de Euler-Bernoulli implementado. Os parâmetros adotados para o método de solução são:  ${}^0\Delta l = 0,2$ ;  $k_d = 4$ ;  $k_{m\acute{a}x} = 150$ ;  $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-8}$ ; e  $\Delta P = 1,0$  kN.

Figura 5.4 – Pórtico de Tang, Zhou e Chan (2015): a) modelo estrutural; e b) trajetórias de equilíbrio.



## 5.4 PÓRTICO DE LEE

Uma estrutura assimétrica submetida a uma carga concentrada mostrada na Figura 5.5 (a), conhecida na literatura como Pórtico de Lee, é investigada. Esse pórtico é frequentemente utilizado por pesquisadores com o objetivo de validar estratégias de solução não linear, pois a sua trajetória de equilíbrio é marcada por curvas acentuadas e pontos limites de carga e deslocamento. O problema foi analisado por Kien (2012) e Kien, Huong e Ha (2013).

Os dados da estrutura são:  $A = 6,0 \text{ cm}^2$ ;  $I = 2,0 \text{ cm}^4$ ;  $E = 720 \text{ tf/cm}^2$ ;  $G = E/2$ ; e  $\mu = 5/6$ . Uma malha com 22 elementos finitos de viga-coluna de igual comprimento é empregada na análise.

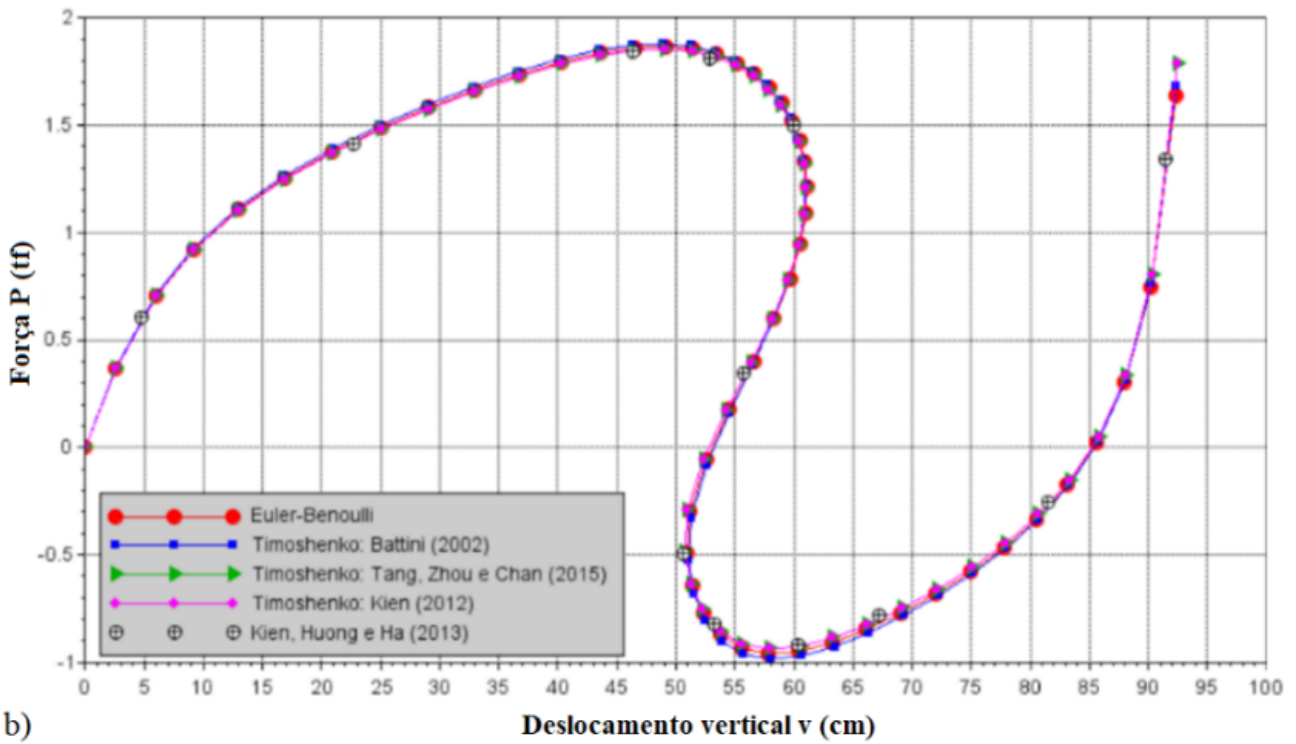
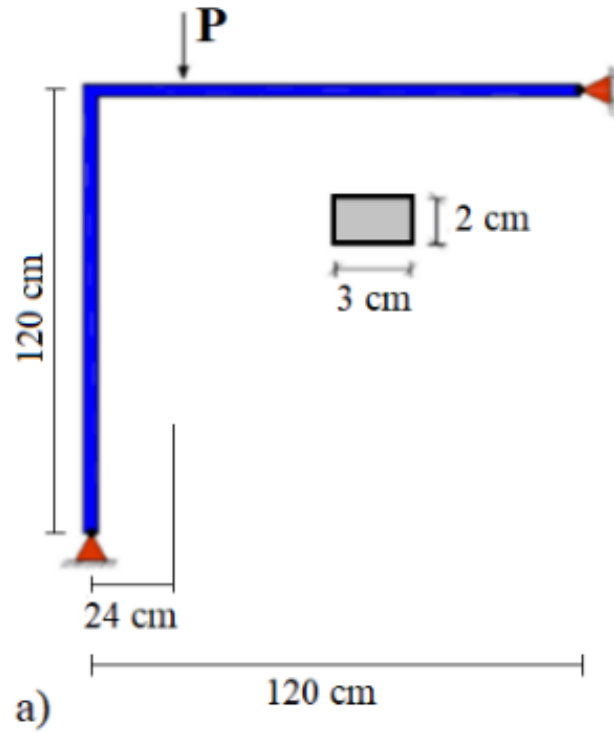
O pórtico mostra um comportamento altamente não linear com pontos limites de força e de deslocamento, conforme as trajetórias de equilíbrio na Figura 5.5 (b). Os parâmetros do método de solução considerados nas análises são:  ${}^0\Delta l = 10,0$ ;  $k_d = 5$ ;  $k_{\text{máx}} = 150$ ;  $\text{tol}_1 = \text{tol}_2 = 1,0 \times 10^{-7}$ ; e  $\Delta P = 2,0 \text{ tf}$ .

Os modelos de Kien (2012) e Tang, Zhou e Chan (2015) tiveram razoável concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Kien, Huong e Ha (2013). Como no pórtico do segundo exemplo, existe uma diferença entre a curva obtida com o modelo de Battini (2002) e as outras curvas nas regiões próximas aos pontos limites.

Este exemplo numérico mostra a importância do método de solução implementado, já que a análise envolvendo controle de deslocamento ou de força (sem o escalonamento) não seria capaz de reproduzir os fenômenos de *snap-through* e *snap-back* mostrados na Figura 5.5 (b).



Figura 5.5 - Pórtico de Lee: a) modelo estrutural e b) trajetórias de equilíbrio.



Pode-se observar a boa concordância entre as trajetórias de equilíbrio obtidas com todos os modelos implementados de viga-coluna e os resultados numéricos obtidos por outros autores, para a viga em balanço e para o pórtico do terceiro exemplo, validando, assim, o código computacional desenvolvido no programa Scilab. No entanto, há discrepâncias nas trajetórias de equilíbrio dos pórticos do segundo e do quarto exemplos com relação à resposta predita pela formulação de Battini (2002) em comparação com as demais. Tais diferenças são verificadas, em especial, nas regiões próximas a pontos limites.

No contexto do Método dos Elementos Finitos, um elemento de viga de Timoshenko não linear pode ser formulado interpolando linearmente os deslocamentos axiais e transversais e a rotação. Técnicas, como a integração de ordem reduzida, são necessárias para eliminar o fenômeno de travamento por cisalhamento. Na formulação proposta por Battini (2002) é utilizada a interpolação linear. Diferentemente, a formulação proposta por Tang, Zhou e Chan (2015) utiliza a interpolação cúbica para o deslocamento transversal, e Kien (2012) usa uma expressão de arco abatido (uma forma degenerada da deformação de Green) para a deformação local.

A teoria de viga de Timoshenko, de acordo com Oñate (2013), é aplicável a barras com índices de esbeltez menores, nas quais a relação de esbeltez ( $L_0/h$ ) é menor que 10, sendo  $L_0$  o comprimento inicial da barra e  $h$  a altura da seção transversal. Nesse sentido, à medida que altura  $h$  da seção aumenta o efeito do cisalhamento torna-se mais relevante.

A estrutura do segundo exemplo consiste de um pórtico abatido, em que o índice de esbeltez das barras é aproximadamente igual a 53,284 ( $\cong 12,948/0,243$ ). Apesar das barras serem esbeltas, há pequenas diferenças nas curvas preditas com as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, verificadas principalmente no fim da análise (após o segundo ponto limite de força, em que a tangente é horizontal).

As barras do pórtico estudado por Tang, Zhou e Chan (2015) têm índice de esbeltez cerca de 4,546 ( $\cong 1,616/0,35546$ ), e o efeito da deformação de cisalhamento na resposta do mesmo fica evidente quando se têm grandes deslocamentos. Nota-se que, para os incrementos iniciais de carga (quando as deformações na estrutura são pequenas), as repostas preditas pelos modelos de viga-coluna de Euler-Bernoulli e de Timoshenko ficam próximas.

No pórtico de Lee, em que a coluna e a viga têm índice de esbeltez igual a 60 ( $L_0/h = 120/2$ ), as trajetórias obtidas dessa estrutura com os modelos de viga Euler-Bernoulli e de Timoshenko implementados ficaram bastante próximas em grande parte. Pequenas diferenças são observadas, contudo, nas regiões no entorno dos pontos limites de força.

No que diz respeito à formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos, a separação do movimento do elemento de viga-coluna em movimentos de corpo rígido e deformacional permite a decomposição da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{el}$  em duas parcelas (ver a Equação (3.17)) - a material e a geométrica. Isso possibilita, de maneira simples, a inclusão dos efeitos da não linearidade geométrica na análise. Os exemplos numéricos demonstram a habilidade do elemento de viga-coluna com as teorias de viga de Timoshenko propostas por Kien (2012) e Tang, Zhou e Chan (2015) em lidar com estruturas na presença de grandes deslocamentos e de grandes rotações, caracterizadas pela forte não linearidade geométrica e pela presença de pontos limites de força e/ou de deslocamento.

O método iterativo proposto por Souza et al. (2018), o qual adapta o método de Potra-Pták, com convergência cúbica, ao problema estrutural num procedimento incremental e iterativo, mostra-se eficiente na resolução de problemas não lineares. No decorrer das simulações não ocorreram problemas de convergência ou instabilidades numéricas. O maior esforço computacional necessário para cada iteração desse método é compensado com um menor número de iterações acumuladas necessárias até a convergência para a solução dadas as tolerâncias, se comparado ao procedimento clássico de Newton-Raphson que tem ordem de convergência quadrática, sob determinadas condições.

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, avaliou-se a eficiência de três modelos de viga-coluna fundamentados na teoria de viga de Timoshenko, no contexto da formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos, por meio da análise estática de problemas com comportamento não linear geométrico. Os resultados numéricos mostraram a boa resposta das formulações desenvolvidas por Kien (2012) e por Tang, Zhou e Chan (2015) quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio com pontos limites das estruturas estudadas. Nas análises estruturais em que se considera o efeito da deformação por cisalhamento, é importante utilizar um modelo de viga-coluna cuja formulação evite o fenômeno de travamento por cisalhamento.

Este estudo mostrou que a consideração da deformação de cisalhamento pode ocasionar deformações maiores na estrutura para níveis menores de carga, quando há grandes deslocamentos, como ficou evidente na trajetória do pórtico do terceiro exemplo. Além disso, verificou-se que o comportamento das estruturas por meio de suas trajetórias de equilíbrio apresentou discrepâncias quando se compara as teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, notadamente nas regiões próximas a pontos limites. Portanto, a deformação de cisalhamento deve ser cuidadosamente considerada em análises globais de segunda ordem, com o objetivo de se obter maior precisão e segurança em um projeto envolvendo estruturas altamente deformáveis, como é o caso das estruturas de aço.

Como sugestões de trabalhos futuros, pode-se expandir as análises aqui apresentadas para outras estruturas além de pórticos planos, por meio de algumas alterações do código computacional. Estruturas como pórticos e treliças espaciais podem ser analisadas sem a necessidade de um aumento expressivo do código, de modo a aproveitar a base sólida da implementação já realizada.

Além disso, o código desenvolvido pode ser estendido para outras áreas da análise não linear, como estruturas sob efeitos da não linearidade física, análise dinâmica não linear e problemas de restrições de contato.

Análises de ligações semirrígidas podem ser implementadas, o que possibilitaria modelar mais precisamente o comportamento de estruturas variando a rigidez de suas ligações.

Do ponto de vista matemático, sugere-se a implementação de outros métodos numéricos e de outras técnicas de continuação, a fim de se comparar a eficiência e a relação custo-benefício entre eles para a resolução de sistemas não lineares.

Com o objetivo de tornar a usabilidade do programa mais amigável e aumentar a interatividade com o usuário, pode-se desenvolver interfaces para as etapas de pré e pós-processamento dos dados que permitam a visualização gráfica da trajetória de equilíbrio e da deformada da estrutura. Isso auxiliaria na entrada de dados e na interpretação dos resultados das análises estruturais.

## REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: A base da tecnologia CAE / Análise não linear**. 1. ed. São Paulo: Érica, 2012.
- ARCHITIZER. **Shanghai World Financial Center**, c2021. Página inicial. Disponível em: <<https://architizer.com/projects/shanghai-world-financial-center/>>. Acesso em: 09 de jun. de 2021.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 1. ed. Watertown: Klaus-Jürgen Bathe, 2006.
- BATHE, K. J.; BOLOURCHI, S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 14, n. 7, p. 961-986, 1979.
- BATTINI, J. M. **Co-rotational beam elements in instability problems**. 2002. 180 f. Tese de Doutorado - Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Suécia, 2002.
- BELO, I. M. **Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para análise hiperelástica**. 2009. 185f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.
- BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.
- BORST, R. D. et al. **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. 2. ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 2012.
- CHAN, S. L. Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 12, p. 2657-2669, 1988.
- CHAN, K.T.; LAI, K.F.; STEPHEN, N.G.; YOUNG, K. A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory, **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, p. 3488-3497, 2011.
- CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese de Doutorado (Texto complementar para concurso de professor titular) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2003.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, Vol 1, John Wiley & Sons, 1991.
- CUNHA, A. A. **Análise não linear de pórticos planos utilizando a formulação corrotacional e elementos de viga unificados Bernoulli-Timoshenko**. 2015. 146f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

- DA SILVA, T. C. Estudo analítico das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para condições de contorno variadas. **Revista de Engenharia Civil IMED**, Passo Fundo, v. 6, n. 1, p. 57-70, 2019.
- DONG, S. B.; ALPDOGAN, C.; TACIROGLU, E. Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, p. 1651-1665, 2010.
- EDEM, I. B. The exact two-node Timoshenko beam finite element using analytical bending and shear rotation interdependent shape functions. **International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics**, v. 7, n. 6, p. 425-431, 2006.
- FAGHIDIAN, A. Unified Formulations of the Shear coefficients in Timoshenko Beam Theory. **Journal of Engineering Mechanics, ASCE**, v. 143, issue 9, 2017.
- FELIPPA, C. A. **Nonlinear Finite Element Methods**. Course Note ASEN 5017. 2012.
- FELIPPA, C. A. Nonlinear finite element methods. **Aerospace Engineering Sciences Department of the University of Colorado. Boulder**, 2001.
- FREUND, J.; KARAKOÇ, A. Warping displacement of Timoshenko beam model. **International Journal of Solids and Structures**, v. 92, p. 9-16, 2016.
- GALVÃO, A. S. **Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos**. 2000. 239f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2000.
- GALVÃO, A. S.; SILVEIRA, R. A. M.; GONÇALVES, P. B. Resposta transiente não-linear de pórticos e arcos com ligações semi-rígidas. **XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering–CILAMCE 2005**. 2005.
- GAN, B. S.; HUONG, T. T.; KIEN, N. D. Post-buckling behaviour of axially FGM planar beams and frames. **Procedia engineering**, v. 171, p. 147-158, 2017.
- GRECO, M.; VENTURIN, W. S. Stability analysis of three-dimensional trusses. **Latin American Journal of Solids and Structures**, p. 325-344, 2006.
- IU, C. K.; BRADFORD, M. Higher-order non-linear analysis of steel structures: Part I: elastic second-order formulation. **Advanced Steel Construction**, v. 8, n. 2, p. 168-182, 2012.
- JAFARI, V.; VAHDANI, S. H.; RAHIMIAN, M. Derivation of the consistent flexibility matrix for geometrically nonlinear Timoshenko frame finite element. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 12, p. 1077-1085, 2010.
- KIEN, N. D. Effects of shear deformation on large deflection behavior of elastic frames. **Vietnam Journal of Mechanics**, v. 26, n. 3, p. 167-181, 2004.
- KIEN, N. D. A Timoshenko beam element for large displacement analysis of planar beams and frames. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 12, n. 06, p. 1250048, 2012.

KIEN, N. D.; HUONG, T. T.; LE T. H. A co-rotational beam element for geometrically nonlinear analysis of plane frames. **Vietnam Journal of Mechanics**, v. 35, n. 1, p. 51-65, 2013.

KIMURA, A. **Informática aplicada a estruturas de concreto armado**. São Paulo: Oficina de Textos, 2018.

KOITER, W. T. **Post-buckling analysis of a simple two-bar frame in recent progresses in applied mechanics**. Broberg, 1967.

KOITER, W. T. **A translation of the stability of elastic equilibrium**. Management Information Services, 1970.

KRENK, S. **Non-Linear Modeling and Analysis of Solids and Structures**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

LACERDA, E. G. M. de. **Análise não-linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. 92f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2014.

LEE, S. Nonlinear dynamic earthquake analysis of skyscrapers. **8th World Congress of Council on Tall Buildings and Urban Habitat**. Dubai, 2007.

LOURENÇO, P. B. Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear. **Relatório 99-DEC/E-1. Universidade do Minho, Portugal**. 1999.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas – Conceitos e Métodos Básicos**. 2ª Edição. Barueri: GEN LTC, 2017.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Rem: Revista Escola de Minas**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. A técnica do fluxo normal aplicada à análise não linear de arcos esbeltos. **Anais do 32º CILAMCE**, p. 1-19, 2011.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. 2006. 172f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

OÑATE, E. **Structural analysis with the finite element method: Linear statics: beams, plates and shells** v.1. Springer, 2013.

ONYIA, M. E.; ROWLAND-LATO, E. O. Determination of the critical buckling load of shear deformable unified beam. **International Journal of Engineering and Technology**, v. 10, n. 3, p. 647-657, 2018.

PEREIRA, A. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. 2002. 99f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2002.



POTRA, F. A.; PTÁK, V. **Nondiscrete induction and iterative processes**. Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 3. ed. Butterworth Heinemann, 1999.

ROCHA, G. **Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não-linear de estruturas**. 2000. 176f. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2000.

RODRIGUES, M. A. C.; BURGOS, R. B.; MARTHA, L. F. A Unified Approach to the Timosheni Geometric Stiffness Matrix Considering Higher-Order Terms in the Strain Tensor. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 16, n. 4, 2019.

ROORDA, J. **Instability of imperfect elastic structures**. 1965. Tese de Doutorado. University College London (University of London), Londres, 1965.

SAFFARI, H.; MANSOURI, I. Non-linear analysis of structures using two-point method. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 46, n. 6, p. 834-840, 2011.

SANTOS, M. N.; ROCHA, P. A. S.; SILVA, A. R. D. D.; SILVEIRA, R. A. D. M. Application of a nonlinear hybrid finite element in the structural steel modeling. **Rem: Revista Escola de Minas**, v.65, n.1, p.19-28, 2012.

SCILAB, versão 6.1.0. **ESI Group**, 2020.

SILVA, R. G. L.; LAVALL, A. C. C.; COSTA, R. S.; VIANA, H. F. Formulation for second-order inelastic analysis of steel frames including shear deformation effect. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 151, p. 216-227, 2018.

SILVA, S. S. da. **Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação corrotacional e plasticidade por camadas**. 2011. 164f. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

SILVA, W. T. M.; GUTIÉRREZ, M. P. D.; OLIVEIRA, G. C. Obtenção de um elemento de viga unificado com a utilização da formulação corrotacional e o Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares. **Ciência & Engenharia**, v. 25, n. 1, p. 113-123, 2016.

SOUSA, C. A. G. **Um estudo sobre métodos de continuação para análise de estruturas não lineares**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, 2013.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; ALIANO FILHO, A.; MACHADO, R. D. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. **TEMA (São Carlos)**, v. 19, n. 1, p. 161-179, 2018.

SOUZA, L. A. F.; VANALLI, L.; VANDERLEI R. D., TOLENTINO, L. D. Nonlinear numerical model of plane frames considering semi-rigid connection and different beam theories. **Revista Matéria (UFRJ)**, v. 26, n. 3, 2021.

TANG, Y. Q.; CHEN, W. F.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. Consistent co-rotational framework for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam-column elements under distributed member loads. **Advances in Structural Engineering**, p. 1847 - 1858, 2021.

TANG, Y. Q.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L.; DU, E. F. An innovative co-rotational pointwise equilibrating polynomial element based on Timoshenko beam theory for second-order analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 141, p. 15-27, 2019.

TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. **International journal of structural stability and dynamics**, v. 15, n. 05, 1450068, 2015.

VON PARASKI, N. **Análise Estática Nao Linear De Pórticos Planos Via Matlab**. 2012. 152f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2012.

WONG, F. T.; SULISTIO, A.; SYAMSOEYADI, H. Kriging-based Timoshenko beam elements with the discrete shear gap technique. **International Journal of Computational Methods**, v. 15, n. 07, p. 1850064, 2018.

WOOD, R. D.; ZIENKIEWICZ, O. C. Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. **Computers & Structures**, v. 7, n. 6, p. 725-735, 1977.

YAW, L. L. **2D Corotational Beam Formulation**. Walla Walla University, 2009.