

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

AMANDA LETÍCIA SOARES

**ESTUDO DE MODELOS NÃO LINEARES DE LIGAÇÃO
VIGA-COLUNA PARA PÓRTICOS PLANOS**

MARINGÁ

2021

AMANDA LETÍCIA SOARES

**ESTUDO DE MODELOS NÃO LINEARES DE LIGAÇÃO
VIGA-COLUNA PARA PÓRTICOS PLANOS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Aluna: Amanda Letícia Soares

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio Farani de Souza

MARINGÁ

2021

AMANDA LETÍCIA SOARES

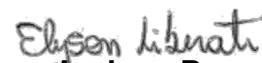
**ESTUDO DE MODELOS NÃO LINEARES DE LIGAÇÃO VIGA-COLUNA
PARA PÓRTICOS PLANOS**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 27/08/2021. Julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Orientador



Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo Liberati
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Leandro Vanalli
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Departamento de Construção Civil
Universidade Federal do Paraná

Dedico este trabalho à minha família, pai, mãe, irmão. Dedico também aos meus avós, falecidos este ano.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus pela sustentação divina em um momento tão caótico.

Em segundo lugar, agradeço ao Prof. Dr. Luiz Antônio Farani de Souza pela orientação e compreensão ao longo de todo trabalho, principalmente, no começo da minha jornada, me acolhendo em um momento tão difícil da minha vida.

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá – UEM, representada por seus docentes e técnicos universitários.

Agradecimentos especiais são direcionados a todos que fazem parte do PCV: professores, funcionários e colegas do mestrado.

Agradeço à minha família pelo suporte financeiro e dedicação em proporcionar um ambiente agradável para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu namorado pelo suporte psicológico e dedicação nos momentos mais difíceis e pela compreensão das minhas inúmeras ausências.

Agradeço a todos os amigos pelo carinho e suporte ao longo de todas as dificuldades.

*Ainda que um justo caia sete vezes, sete
vezes tornará a se erguer...*

Provérbios 24:16

RESUMO

Nas últimas décadas, diversos estudos vêm sendo desenvolvidos de maneira a considerar nas formulações de modelos estruturais os efeitos não lineares inerentes às estruturas, proporcionando uma maior precisão nos cálculos estruturais. Baseado nisso, este trabalho tem como objetivo implementar um código computacional em ambiente Scilab para análise não linear geométrica estática de pórticos planos com ligações semirrígidas de comprimento nulo simuladas na condição linear e não linear. As estruturas são discretizadas com a formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos e teoria de Euler-Bernoulli. Além disso, a solução aproximada do sistema de equações não lineares do problema estrutural é obtida por meio dos métodos numéricos de Newton-Raphson, Potra-Pták e Mohit et al., num procedimento incremental e combinando-os à técnica de continuação de Comprimento de Arco Linear. Aplicações numéricas de problemas de pórticos consagrados na literatura são efetuadas com o código computacional desenvolvido, com o intuito de comprovar a eficiência da formulação proposta. Por fim, foi implementado um modelo não linear para ligações semirrígidas fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo. Dessa forma, o presente trabalho alcançou os objetivos propostos e foi possível verificar a boa concordância entre as respostas obtidas nesta dissertação e aquelas encontradas por outros pesquisadores. Os resultados mostraram que o modelo proposto baseado na mecânica do dano pode prever o comportamento não linear das ligações das estruturas de pórticos com grandes deslocamentos e fortemente não lineares. Algumas conclusões referentes à precisão dos resultados, comparação entre as formulações, eficiência computacional são apresentadas no final desta dissertação.

Palavras chaves: Análise Não Linear. Ligações Semirrígidas. Mecânica do Dano.

ABSTRACT

In recent decades, several studies have been developed in order to consider in the formulation of structural models the nonlinear effects inherent to structures, providing greater precision in structural calculations. Based on that, this work aims to implement a computational code in Scilab environment for static geometric nonlinear analysis of plane frames with null-length semi-rigid connections simulated in linear and nonlinear conditions. The structures are discretized with the corotational formulation of the Finite Element Method and Euler-Bernoulli theory. In addition, the approximate solution of the system of nonlinear equations of the structural problem is obtained through the numerical methods of Newton-Raphson, Potra-Pták and Mohit et al., in an incremental procedure and combining them with the continuation technique of Length Linear Arc. Numerical applications of frame problems established in the literature are carried out with the developed computational code, in order to prove the efficiency of the proposed formulation. Finally, a non-linear model for semi-rigid connections based on the theory of Continuous Damage Mechanics was implemented. Thus, the present work achieved the proposed objectives and it was possible to verify the good agreement between the answers obtained in this dissertation and those found by other researchers. The results showed that the proposed model could predict the nonlinear behavior of the connections of frames structures with large displacements and strongly nonlinear. Some conclusions regarding the precision of the results, comparison between the formulations and computational efficiency are presented at the end of this dissertation.

Keywords: Nonlinear Analysis. Semi-rigid connections. Mechanics of continuous damage.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Deformação rotacional de uma conexão.....	24
Figura 2.2 - Curvas momento-rotação de ligações.....	25
Figura 2.3 - Pontos limites de a) cargas e b) deslocamentos.....	29
Figura 3.1 - Configuração inicial e atual para um elemento de viga.....	30
Figura 3.2 - Configuração inicial e corrente para uma viga típica.....	32
Figura 3.3 - Modelo do elemento de ligação proposto	45
Figura 3.4 - Modelo referente a mola de rigidez axial proposto.....	45
Figura 3.5 - Modelo referente a mola de rigidez rotacional proposto	46
Figura 3.6 - Modelo referente a mola de rigidez translacional proposto	46
Figura 4.1- Evolução do dano em um material metálico	48
Figura 4.2 – Hipótese de deformação equivalente	50
Figura 4.3 – Gráfico momento versus rotação variando-se o valor de H	52
Figura 5.1 - Pórtico de Williams.....	55
Figura 5.2 - Trajetória de equilíbrio do pórtico de Williams com elemento de conexão	55
Figura 5.3 - Pórtico simples com elementos de conexão	56
Figura 5.4 - Trajetória de equilíbrio de pórtico simples com elementos de conexão	57
Figura 5.5 - Pórtico de dois andares com elementos de conexão.....	58
Figura 5.6 - Tipos de ligações viga-pilar adotados	59
Figura 5.7 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de dois andares com diferentes ligações	59
Figura 5.8 - Pórtico de Lee com elementos de conexão	60
Figura 5.9 - Trajetória de equilíbrio para diferentes métodos de solução.....	60
Figura 5.10 - a) Modelo estrutural da viga em balanço e b) curva momento versus rotação	63
Figura 5.11 - Viga em balanço - configuração indeformada ($NP = 0$) e as configurações deformadas ($NP = 5, 20, 40$ e 53).....	63
Figura 5.12 - Viga em balanço – trajetórias de equilíbrio	64
Figura 5.13 - Viga em balanço - a) Curva dano d versus rotação θ e b) Curva θ versus rigidez rotacional SR	65
Figura 5.14 - Pórtico com dois andares - esquema estrutural.....	66

Figura 5.15 - curvas momento versus rotação	66
Figura 5.16 - Pórtico com dois andares – trajetórias de equilíbrio.....	68
Figura 5.17 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação A.....	68
Figura 5.18 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação B.....	69
Figura 5.19 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação C.....	69
Figura 5.20 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação D.....	70
Figura 5.21 - Pórtico de Lee com conexão semirrígida viga-pilar.....	71
Figura 5.22 – Trajetórias de equilíbrio do Pórtico de Lee.....	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Resultados numéricos do pórtico de Lee.....	61
Tabela 5.2 -Parâmetros para o cálculo da variável dano	67

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição Símbolo
A	Área da seção transversal
β	Ângulo rotacional do pórtico
ϕ	Capacidade rotacional
σ	Componente axial
τ	Componente transversal
L_0	Comprimento inicial
L	Comprimento atual
k	Curvatura do elemento
ε	Deformação axial do elemento
γ	Deformação cisalhante
θ_i	Deformação rotacional
δV	Deformação cisalhante na seção transversal
v_i	Deformação translacional
u_i	Deslocamento axial local do elemento
u	Deslocamento em x
ΔU^0	Deslocamentos nodais incrementais tangencias
v	Deslocamento transversal
U	Energia de deformação
P_i	Esforços normais
Q_i	Esforços cisalhantes
$c^{(k)}$	Equação de restrição
k	Fator de correção de cisalhamento
ζ	Fator de tolerância inserido na equação
N	Força axial
V_1	Força de cisalhamento no nó 1
V_2	Força de cisalhamento no nó 2
Δl	Incremento do comprimento de arco
$\Delta \lambda^0$	Incremento inicial do parâmetro de carga
(k)	Iterações
d	Lei linear de dano

r_0	Limite de dano inicial
K_b	Matriz de rigidez constante decorrente da flexão da viga
K_s	Matriz de rigidez decorrente da deformação por cisalhamento
K_M	Matriz de rigidez do material
K_G	Matriz de rigidez geométrica
K_a	Matriz de rigidez não linear resultante da membrana de tensão
K_{tl}	Matriz de rigidez tangente
K_{el}	Matriz de rigidez tangente elementar
B	Matriz de transformação
H	Módulo de endurecimento do material
G	Módulo de elasticidade transversal
E	Módulo de Young
I	Momento de inércia da seção transversal
M_i	Momento fletor
\overline{M}_1	Momento referente a posição 1
\overline{M}_2	Momento referente a posição 2
M	Momento resistente
δ_{ul}	Movimento na direção axial nas coordenadas locais
kd	Número de iterações desejadas
I_d	Número de iterações desejadas para a convergência
n_{ptotal}	Número máximo de iterações em cada ciclo
$kmáx$	Número máximo de iterações no passo de carga
λ	Parâmetro de carga
(t)	Passo de força
r	Raio de giração
EA	Rigidez axial
$kmola$	Rigidez da mola
EI	Rigidez de flexão
S	Rigidez rotacional
S_A	Rigidez tangente axial
S_R	Rigidez tangente rotacional
S_T	Rigidez tangente translacional

$\delta\theta_{1l}$	Rotação nodal global para posição 1
$\delta\theta_{2l}$	Rotação nodal global para posição 2
θ_{1l}	Rotação nodal local para posição 1
θ_{2l}	Rotação nodal local para posição 2
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva do material
ε_{xy}	Tensor de deformação
δp	Variação do vetor de deslocamento global
p^T	Vetor de deslocamento global
δu_r	Vetor de deslocamentos nodais tangenciais
$g(u)$	Vetor de forças desequilibradas
F_{int}	Vetor de forças internas
Fel	Vetor de forças internas elementar
f_{inl}	Vetor de força interna local
F_R	Vetor de forças nodais externas assumido como referência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	17
1.2	JUSTIFICATIVA	18
1.3	OBJETIVOS	19
1.3.1	Objetivo geral.....	19
1.3.2	Objetivos específicos.....	19
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	20
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	21
2.1	FORMULAÇÃO CORROTACIONAL	21
2.2	ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	22
2.3	COMPORTAMENTO DE CONEXÕES SEMIRRÍGIDAS	23
2.4	MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS ACOPLADOS TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO	27
3	FORMULAÇÕES NUMÉRICAS	30
3.1	FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS	30
3.2	ELEMENTO DE VIGA DE BERNOULLI.....	34
3.3	FORMULAÇÃO DA ANÁLISE NÃO LINEAR	36
3.4	MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS	38
3.4.1	Ciclo de iterações – Método de Newton-Raphson	38
3.4.2	Ciclo de Iterações – Método de Potra-Pták.....	39
3.4.3	Algoritmo Mohit et al. (2020)	40
3.5	TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO	41
3.5.1	Comprimento de Arco Linear - Riks (1972)	42
3.5.2	CrITÉrios de Convergência Adotados	43
3.6	FORMULAÇÃO DAS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS	44

4	MODELO NÃO LINEAR DE LIGAÇÃO SEMIRRÍGIDA BASEADO NA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO	47
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	54
5.1	MODELO LINEAR DE LIGAÇÃO	54
5.1.1	Pórtico de Williams	54
5.1.2	Pórtico simples	56
5.1.3	Pórtico de dois pavimentos	57
5.1.4	Pórtico de Lee.....	60
5.2	MODELO NÃO-LINEAR DE LIGAÇÃO	62
5.2.1	Viga em balanço.....	62
5.2.2	Pórtico de dois pavimentos	65
5.2.3	Pórtico de Lee.....	70
6	CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Devido a uma demanda por estruturas funcionais e econômicas, cada vez mais leves, esbeltas e flexíveis, houve um grande crescimento de edifícios industriais e residências formadas pela ligação de diversos elementos estruturais formados por perfis de aço. Esses elementos possuem vantagens físicas e características mecânicas para o uso na construção de pórticos planos, tais como: boa relação entre resistência e peso estrutural; adaptabilidade às diversas formas arquitetônicas; grande variedade de perfis disponíveis no mercado; e ótimo controle no processo de fabricação, o que justifica o seu crescente emprego nas edificações (ROCHA, 2006).

Porém, de acordo com Rocha (2006), apesar do crescente avanço tecnológico, do grau de segurança obtido e do baixo custo de pesquisas computacionais que contribuem para a análise de estruturas cada vez mais esbeltas, surgem novas barreiras para a engenharia estrutural. Entre as adversidades, podem-se destacar as não linearidades geométricas e físicas.

Aquelas ocorrem quando as deformações são grandes o suficiente para influenciar mudanças geométricas. À medida que o elemento estrutural se torna mais esbelto, o efeito da não linearidade geométrica se torna cada vez mais importante e origina vários fenômenos, como por exemplo, a ocorrência de configurações snap-through e snap-back. Essas configurações de equilíbrio são instáveis e possuem pontos críticos ao longo do caminho não linear de equilíbrio (YANG; KUO, 1994).

As outras estão associadas ao comportamento não linear do material. Na análise estrutural muitos problemas estão caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais que compõe a estrutura, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais alteram as propriedades de rigidez do sistema (YANG; KUO, 1994).

Além disso, na prática de engenharia, as abordagens tradicionais para o dimensionamento das ligações viga-coluna ou viga-pilar dos pórticos são consideradas de duas formas - perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas. A conexão perfeitamente rígida é considerada com elevados níveis de rigidez, e a idealmente rotulada, com a rigidez muito pequena se comparada aos demais elementos. No entanto, a conexão real comporta-se de maneira intermediária, entre os dois extremos de rigidez, e afeta significativamente os deslocamentos e a distribuição de esforços internos das estruturas (LUI; CHEN, 1988).

Nesse contexto, para realizar a análise numérica das ligações dos pórticos com maior precisão é de fundamental importância o emprego de métodos e técnicas que permitam avaliar, além das mudanças geométricas, as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento inelástico dos materiais.

Neste trabalho a análise estrutural estática de pórticos planos é realizada por meio da formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos. A formulação corrotacional tem sua base num conceito da mecânica dos meios contínuos: separação dos movimentos de corpo rígido dos movimentos que estão associados à deformação. Para traçar a trajetória de equilíbrio de uma estrutura, é necessário recorrer a processos incrementais e iterativos, uma vez que as equações que comandam o comportamento da estrutura dependem da configuração deformada, o que faz com que as posições de equilíbrio da estrutura tenham que ser atualizadas constantemente durante a análise (YAW, 2009).

Nesta pesquisa, os métodos iterativos utilizados para resolver os problemas numéricos são: Newton-Raphson, Potra-Pták (1984) e Mohit et al. (2020). Para traçar a trajetória de equilíbrio completa do sistema estrutural em análise, com pontos limites de força e de deslocamento, é associada a esses métodos a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear que é um método do tipo previsor-corretor.

As ligações semirrígidas são implementadas com o elemento proposto por Del Savio (2004) cuja espessura é nula. Exemplos numéricos de pórticos encontrados na literatura são executados com o objetivo de avaliar a eficiência da formulação do modelo numérico-computacional proposto. As análises computacionais são realizadas por meio do software livre Scilab, versão 6.10 (SCILAB, 2020).

Por último, propõe-se um modelo não linear baseado na Mecânica do Dano contínuo para simular o comportamento de ligações semirrígidas entre membros estruturais. A formulação que descreve a evolução do dano na rigidez da ligação, bem como o algoritmo para determinar a influência da degradação do material e perda de rigidez da ligação, são apresentados.

1.2 JUSTIFICATIVA

Em estruturas de aço, geralmente as conexões entre os elementos estruturais são as seções mais críticas da estrutura, em que ocorrem várias solicitações internas, gerando prováveis focos de insegurança estrutural e o aparecimento das não linearidades geométricas e físicas. No entanto, na análise convencional, as conexões viga-coluna dessas estruturas são simplificadas por meio de ligações ideais - totalmente flexíveis ou rígidas.

Essa simplificação das ligações é uma forma idealizada que não reflete o comportamento real das conexões. Conexões reais têm sempre um certo grau de rigidez rotacional e resistência à flexão que geram um comportamento intermediário entre os dois extremos.

Portanto, torna-se necessário implementar o efeito da flexibilidade (ou semirrigidez) das ligações nas análises estruturais, juntamente com a hipótese de grandes deslocamentos e rotações (não linearidade geométrica), a fim de que se tenham estruturas com comportamento mecânico mais realístico.

Outrossim, as estruturas ao serem solicitadas por carregamentos estão sujeitas a não linearidade física, isto é, os materiais empregados nos elementos da estrutura podem apresentar comportamento elastoplástico. Dessa forma, tendo em vista uma análise segura e mais fidedigna ao seu comportamento, recomenda-se a consideração da perda de rigidez do material nas análises não lineares, justificando, assim, o emprego da Mecânica do Dano contínuo.

Ademais, com a intenção de traçar os caminhos de equilíbrio de forma eficiente e otimizada, justifica-se o estudo de diferentes métodos de solução acoplados a técnicas de continuação.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta pesquisa é apresentar um modelo numérico-computacional de elementos finitos com base na cinemática corrotacional, com a finalidade de avaliar o comportamento linear e não linear das conexões semirrígidas de pórticos planos.

1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos para o desenvolvimento deste trabalho são:

- I. Implementar as seguintes formulações: formulação corrotacional de elementos finitos para pórticos planos baseada na teoria de viga de Euler-Bernoulli desenvolvidos por Crisfield (1991) e Yaw (2009); elemento de ligação semirrígida com comprimento nulo proposto por Del Savio (2004) e implementar os métodos incrementais e iterativos de Newton-Raphson, Potra-Pták (1984) e Mohit et al. (2020) para a solução de sistemas de equações não lineares, associados à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear;

- II. Obter as trajetórias de equilíbrio com pontos limites de força e/ou deslocamento de pórticos encontrados na literatura e confrontar a eficiência dos métodos de solução por meio dos parâmetros número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução, número médio de iterações por passo de carga e tempo de processamento;
- III. Implementar o modelo não linear baseado na teoria da Mecânica do Dano contínuo para descrever o comportamento da ligação semirrígida.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo apresentou os objetivos e justificativas da pesquisa. O segundo capítulo é uma revisão bibliográfica abordando uma visão geral da análise estrutural não linear, introduzindo conceitos para o restante dos capítulos tais como as ligações semirrígidas e métodos de soluções incrementais e iterativos. O terceiro capítulo apresenta as formulações para resolver o sistema de equações não lineares, técnicas (o procedimento incremental-iterativo e o comprimento de arco) para traçar o caminho de equilíbrio e a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

No quarto capítulo, é apresentado a formulação do modelo não linear da ligação baseado na mecânica do dano contínuo. Já o Capítulo 5 é dividido em duas seções, sendo a primeira voltada a apresentação de exemplos com análise de ligações lineares e na segunda seção são apresentados os pórticos com ligações não lineares utilizando pórticos encontradas na literatura. Por fim, no Capítulo 6 é explanado a conclusão da pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

A formulação corrotacional é empregada nas estruturas submetidas a pequenas deformações e grandes deslocamentos de corpo rígido, o desmembramento dos movimentos foi a grande diferenciação da formulação, além de acarretar importantes simplificações nas formulações matemáticas (CRISFIELD, 1990).

A cinemática corrotacional se fundamenta na separação do movimento de um sólido em uma parte de corpo rígido e em outra deformacional. O deslocamento de corpo rígido é formado por movimentos de rotação e de translação, enquanto o movimento deformacional do elemento é caracterizado por três modos naturais de deformação, sendo estes relacionados aos esforços axial, de flexão pura e de flexão simples (YAW, 2009).

O conceito da formulação corrotacional surgiu nas décadas de 1950 e 1960 empregado por projetistas aeroespaciais (MENIN, 2006). Em outro cenário, no início dos anos 90, Cole (1990) e Crisfield (1990) em seus estudos definiram uma formulação corrotacional consistente para análise não linear geométrica pertinente aos elementos de pórtico plano e espacial. Os trabalhos de Crisfield (1990) e Nour-Omid e Rankin (1991) demonstraram que qualquer elemento que se baseia na teoria geométrica aproximada ou ainda na teoria de deslocamentos infinitesimais é eficiente em acomodar rotações finitas com uma formulação corrotacional generalizada.

No final da década de 90, surgem estudos abordando problemas de instabilidade para elementos de viga plana e tridimensional feitos por Pacoste e Eriksson (1997). Neste estudo a descrição lagrangeana total é confrontada com a corrotacional. No final dos anos 2000, Yaw (2009) apresenta uma formulação corrotacional para elementos de viga 2D semelhante à apresentada por Crisfield (1990), de maneira que a estrutura possa exibir deslocamentos e rotações arbitrariamente grandes ao nível global, contanto que as tensões locais nos elementos de viga sejam pequenas.

A partir do detalhamento destas formulações, diversos pesquisadores desenvolveram suas análises. Mais recentemente, destaca-se, Souza et al. (2020) que além de utilizar o método corrotacional dos elementos finitos para a discretização das estruturas, incorporou um modelo numérico-computacional para análise estática de pórticos planos com conexões semirrígidas.

2.2 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

De um modo geral, a análise linear simplifica demais o comportamento real de uma estrutura, especialmente em seu estado limite. Para alguns tipos específicos de estrutura, o grau de não linearidade é tão severo que a análise linear não pode ser usada como uma ferramenta confiável para entender o comportamento real da estrutura (CHAN; CHUI, 2000). À vista disso, vários pesquisadores têm estudado o assunto e desenvolvido formulações com o objetivo de examinar o comportamento não linear físico e geométrico das estruturas.

Neste contexto, surge a discussão da não linearidade geométrica, que está ligado ao surgimento dos efeitos de segunda ordem em uma estrutura. Conforme as diferentes posições de equilíbrio que uma estrutura pode assumir quando submetida aos carregamentos, surge a não linearidade geométrica. À medida que a estrutura é carregada, ela apresenta deslocamentos, de maneira que quando estes são consideravelmente grandes, ao ponto de produzir alterações significativas, a mesma adquire uma nova posição, a qual necessita novas equações de equilíbrio. Dessa forma, é crucial avaliar a estrutura em sua posição deslocada, uma vez que, a análise baseada na posição inicial não reflete a atual condição da estrutura (COLE, 1990).

Com o objetivo de cumprir estas considerações, Silveira (1995) implementou na metodologia de solução de equações não lineares, formulações geometricamente não lineares de elementos finitos de viga-coluna, propostas por Alves (1993), Yang e Kuo (1994). Posteriormente, Torkamani et al. (1997) e Pacoste e Eriksson (1997) validaram suas análises baseados nesta metodologia de solução.

Com a intenção de avaliar a eficiência computacional dessas formulações geometricamente não lineares, Galvão (2000) implementou através do método de elementos finitos diversas estruturas reticuladas planas encontradas na literatura, produzindo um trabalho de grande referência nacional.

Em contrapartida, a não linearidade física é provocada especialmente pela resposta mecânica dos materiais utilizados na estrutura. A medida que o material é solicitado com estados de tensões que ultrapassam o limite da sua proporcionalidade, as fibras do material começam a se plastificar, fazendo com que o material perca sua capacidade inicial de rigidez (ZHENG, 2019).

Em relação a não linearidade das estruturas metálicas, destacam-se dois efeitos importantes: a plastificação da seção metálica e a semirrígidez das conexões. A inelasticidade da seção metálica, ou plastificação, evidencia-se pelo aparecimento de deformações

permanentes à medida que o material constituinte entra em escoamento. Esse efeito se torna importante quando o membro estrutural deve resistir simultaneamente aos esforços solicitantes, e sua rigidez se altera à medida que esses esforços internos se modificam (MACHADO, 2005; ALVARENGA, 2005).

Baseado nos exemplos numéricos implementados, Rocha (2006) concluiu que esses efeitos não lineares (segunda ordem, inelasticidade do aço e flexibilidade da conexão) exercem grande influência no comportamento (flambagem e capacidade de carga) dos sistemas estruturados em aço.

2.3 COMPORTAMENTO DE CONEXÕES SEMIRRÍGIDAS

Inicialmente, as conexões tradicionais eram classificadas exclusivamente como rígidas ou articuladas. Contudo, como é evidente em observações experimentais, todas as conexões usadas na prática possuem rigidez que se situa entre os casos extremos de rigidez total e idealmente fixado.

Percebendo a influência das conexões no dimensionamento de pórticos, o Instituto Americano de Construção de Aço (AISC, 1978) introduziu disposições para permitir que os dimensionamentos considerem explicitamente o comportamento das conexões de estruturas de aço estrutural. Dessa forma, as conexões passaram a ser classificadas em três tipos, as flexíveis, as rígidas, e as semirrígidas.

As conexões flexíveis, não apresenta continuidade rotacional, implicando nenhuma transferência de momento fletor entre a viga e a coluna, estes elementos trabalham independentemente um do outro, não apresentando impedimento para a ocorrência de giro relativo entre as peças conectadas (LUI; CHEN, 1986)

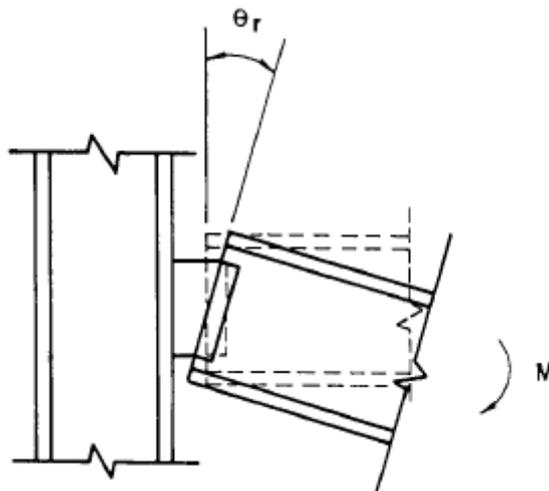
Por outro lado, as ligações rígidas apresentam total interação viga-coluna. A continuidade rotacional existente provoca a completa transferência de momento, e todos os deslocamentos relativos entre as peças conectadas são impedidos, isto é, não há alteração no ângulo relativo entre elas (LUI; CHEN, 1986).

Por fim, as ligações semirrígidas, apresenta resistência ao giro relativo, mas não possui rigidez suficiente para impedir todo o deslocamento entre as peças. Neste caso, a restrição à rotação situa-se geralmente entre 20 e 90% daquela teoricamente necessária para evitar qualquer rotação. Isso pressupõe que as conexões possam transferir cisalhamento e também tem a capacidade de transferir algum momento (LUI; CHEN, 1986).

Para uma conexão viga-pilar ou viga-coluna, o conjunto geral de forças que é transmitido inclui força axial, força de cisalhamento, momento fletor e torção. Para a maioria das conexões, as deformações axiais e de cisalhamento são geralmente pequenas em comparação com as deformações rotacionais e para um estudo no plano, o efeito da torção pode ser negligenciado. Conseqüentemente, para fins práticos, apenas os dados de deformação rotacional devem ser considerados (IHADDOUDÈNE; JASPART, 2015)

Dessa forma, o processo de análise estrutural de uma conexão pode ser representado por uma mola rotacional que conecta a linha média dos membros, considerando três propriedades básicas: momento resistente (M), rigidez rotacional (S) e capacidade rotacional (θ_r) conforme apresentado na Figura 2.1.

Figura 2.1 - Deformação rotacional de uma conexão



Fonte: Chen (1991)

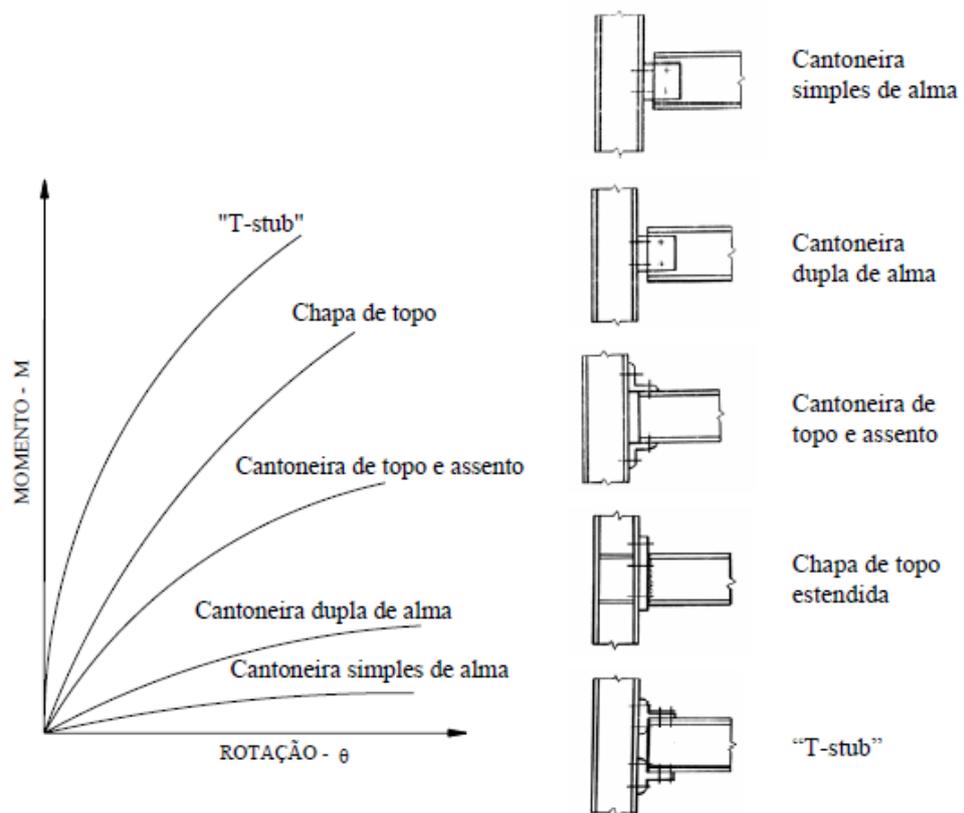
BAHAZ et al. (2018) em seu trabalho, salienta os benefícios de se projetar ligações do tipo semirrígidas, e ressalta a importância da compreensão e análise do comportamento do momento-rotação da ligação. Geralmente obtida por ensaios experimentais, o comportamento não linear de uma ligação pode ser representado por uma curva momento-rotação (DEL SAVIO, 2004). Algumas curvas típicas de momento-rotação são apresentadas na Figura 2.2.

De acordo com a solução de projeto adotada, as ligações semirrígidas apresentam diferentes graus de rigidez, sendo a flexibilidade das ligações uma das principais responsáveis pela não linearidade em estruturas de aço (TUSNINA, 2017). Além disso, os efeitos da flexibilidade da ligação influenciam tanto a distribuição de momentos e tensões quanto os

deslocamentos da estrutura resultando deformações excessivas (IHADDOUDÈNE; JASPART, 2015).

Essas adversidades influenciam para que a análise da região da ligação se torne mais complexa quando comparada com o restante da estrutura. Entretanto, devido a sua influência e o seu elevado custo, torna-se necessário uma análise meticulosa sobre o comportamento das ligações semirrígidas (TUSNINA, 2017).

Figura 2.2 - Curvas momento-rotação de ligações



Fonte: Avakian (2007)

Nos últimos anos, vários pesquisadores têm desenvolvido formulações de maneira a considerar os efeitos geometricamente não lineares de pórticos com ligações semirrígidas. Dentre estes trabalhos destaca-se a pesquisa realizada por Galvão (2004), cujo o foco foi a análise não linear estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semirrígidas. Inicialmente, foram estudados vários exemplos de sistemas estruturais estáticos com caminhos de equilíbrio não lineares com a finalidade de validar os programas implementados. Por meio destes resultados foram estudados alguns fenômenos de instabilidade estática e dinâmica, bem

como possíveis mecanismos de colapso e a influência de parâmetros físicos e geométricos no comportamento estrutural.

Além da análise não linear de pórticos planos com ligações semirrígidas, Pinheiro (2005) apresentou métodos de solução para modelar o comportamento não linear das conexões. Empregando formulações incorporadas à metodologia de solução numérica implementada inicialmente por Silveira (1995) e expandida por Rocha (2000) e Galvão (2000), cujo propósito principal do trabalho é a análise de sistemas estruturais metálicos esbeltos, obtendo resultados satisfatórios com os valores abordados na literatura.

Em relação aos modelos de elementos de ligação, Del Savio (2004) propôs, basicamente, um modelo de dimensão desprezível acoplado nas extremidades das vigas-pilares ou vigas-colunas. Considerando de maneira independente as rigidezes, o uso deste elemento tornou possível modelar de maneira mais precisa o comportamento da estrutura, sem a necessidade de qualquer tipo de discretização do carregamento.

Além disso, com o objetivo validar as formulações implementadas relativa à análise linear e não linear de sistemas estruturais semirrígidos, através de uma formulação corrotacional, Del Savio (2004), desenvolveu um sistema chamado FTOOL/SRC, que possibilita a geração de análises paramétricas que balizem o uso adequado de ligações semirrígidas, de forma simples e compacta graças a uma interface gráfica eficiente.

Santos et al. (2012), por sua vez, implementou um elemento finito híbrido não linear que introduziu os efeitos de segunda ordem, da inelasticidade do aço e da semirrigidez da conexão entre os membros metálicos. Esse elemento híbrido é estruturado através de um elemento padrão de viga-coluna com pares de molas em série em suas extremidades. Uma das molas avalia o comportamento da plastificação do aço, seguindo o método da rótula plástica; a outra mola tem o papel de determinar a flexibilidade da conexão entre os membros. Além do modelo linear para modelar o comportamento da ligação semirrígida, neste trabalho para representar a variação momento-rotação de uma conexão, utilizou-se, o modelo exponencial cuja expressão matemática é dada por Pinheiro (2003) e Lui e Chen (1988).

Bahaz et al. (2018) apresentaram um modelo tridimensional de elementos finitos utilizando o *software* ABAQUS com o objetivo de identificar o efeito de diferentes parâmetros no comportamento de conexões semirrígidas. O modelo foi calibrado e validado com resultados experimentais retirados da literatura. Neste modelo, estão inclusas as variáveis referentes ao contato e deslizamento entre diferentes elementos, pré-tensão do parafuso e não linearidade geométrica e do material.

Dentre as pesquisas mais recentes, pode-se destacar Alvarenga (2020), ao propor uma nova formulação numérica que inclui o comportamento da conexão semirrígida em um elemento finito para estruturas planas. Apenas uma mola é colocada no final do elemento para possibilitar o estudo da plasticidade dentro do membro. Os benefícios do comportamento de conexão semirrígida são avaliados e várias respostas foram obtidas, considerando a rigidez de conexão e o comportamento inelástico. A formulação proposta neste trabalho, permitiu determinar o modelo adequado, para um dado carregamento. Além disso, a análise definiu precisamente a máxima capacidade da estrutura.

Souza et al. (2020) também simula a semirrigidez de pórticos planos. A partir da consideração de uma conexão de comprimento nulo, que estima a rigidez axial, tangencial e rotacional. As análises não lineares dos pórticos são realizadas com o programa gratuito Scilab 6.10. Além disso, as simulações comprovam que a flexibilidade da conexão tem forte influência no comportamento não linear e na estabilidade dos sistemas estruturais.

2.4 MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS ACOPLADOS TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO

No processo iterativo, um incremento de deflexão devido à força desequilibradora será adicionado às coordenadas nodais da estrutura para correção da geometria estrutural em resposta à força e o valor da deflexão total. Com base nessas informações, a condição de equilíbrio é verificada novamente e uma força desequilibrada adicional é calculada. O procedimento iterativo continua até que a força desequilibrada seja muito pequena de forma que o equilíbrio seja alcançado. Considera-se a solução do problema estrutural quando algum critério de convergência for satisfeito, sendo esses baseados, em geral, em relação de forças e em relação dos deslocamentos (CHAN; CHUI, 2000).

O método de Newton-Raphson é considerado um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na engenharia estrutural. Desenvolvido com a finalidade de estimar as raízes de uma função, por meio de uma aproximação inicial, neste método é resolvido um sistema linear a cada iteração, cuja matriz de rigidez é a matriz Jacobiana avaliada no iterado corrente.

Contudo, as vezes é necessário recorrer a métodos de ordem de convergência superior à do método de Newton, especialmente quando se pretende usar aproximações iniciais para as quais o método de Newton apresenta imprecisão. Para refinar essa ordem e eficiência, em 1984, Potra e Pták apresentaram um método de terceira ordem que compreende em duas avaliações

da função e uma avaliação da primeira derivada em duas etapas. O método Potra-Pták consiste em um método do tipo Newton de duas etapas de terceira ordem com o método Jacobiano mantido constante.

Souza (2017) efetuou simulações computacionais de problemas de treliças espaciais com não linearidade geométrica, em ambiente Matlab, demonstrando o melhor desempenho numérico do algoritmo proposto com o método de Potra-Pták, em comparação com as análises feitas com o esquema iterativo de Newton-Raphson Padrão.

Recentemente, Souza et al. (2020) adotou o método Potra-Pták para resolver o conjunto de equações não lineares do sistema estrutural de pórticos planos. O método de procedimento incremental, conta com ordem de convergência cúbica, e com a técnica de continuação de comprimento de arco. Os resultados realçam que o procedimento Potra-Pták pode diminuir o número de iterações e o tempo de computação em comparação com os esquemas iterativos de Newton-Raphson padrão e modificados.

Mohit et al. (2020) estudou novos grupos de técnicas iterativas para resolver equações usadas para análises geometricamente não lineares de treliça espacial. A iteração dos métodos sugeridos reside em um algoritmo de três etapas. Além disso, os resultados da análise de convergência mostram que as técnicas propostas possuem convergência de quarta ordem. Estes métodos são estendidos e aplicados a vários exemplos numéricos para a apresentação da eficiência dos métodos sugeridos comparativamente ao método de Newton-Raphson. Os resultados comprovam que novos métodos iterativos de ordem superior influenciam na velocidade de convergência e está diretamente relacionado na diminuição do número de iterações e o tempo computacional, conseqüentemente convergindo mais rapidamente do que o método de Newton-Raphson.

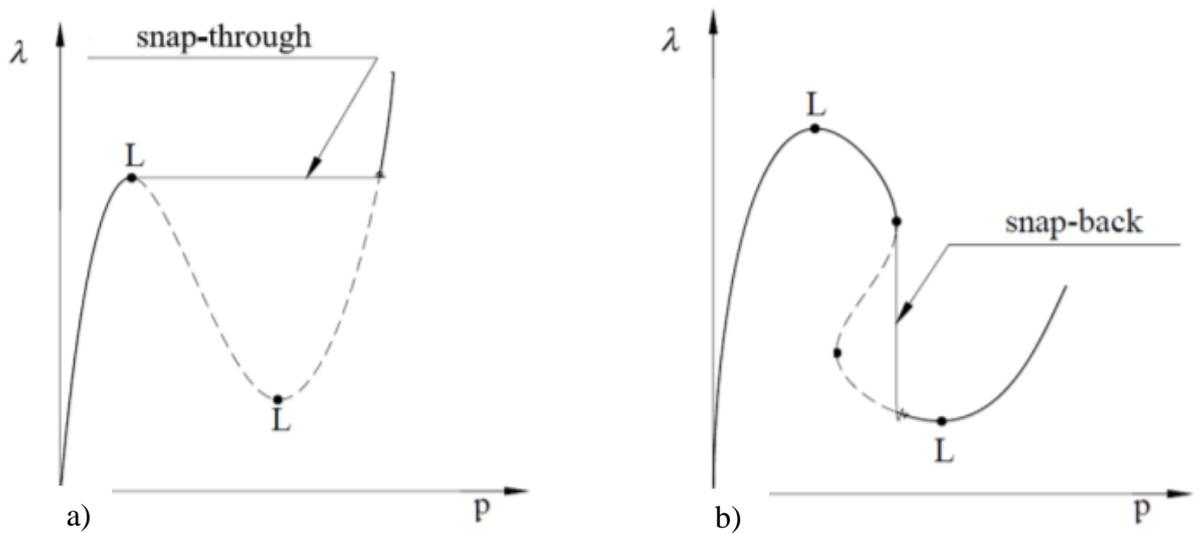
Uma dificuldade intrínseca aos métodos de soluções é a solução próxima a pontos limites na trajetória de equilíbrio. Somente os métodos são insuficientes para exceder os pontos limites de carga que possa surgir ao longo da trajetória de equilíbrio. Isso, ocorre devido ao fato desses métodos possuírem como estratégia a manutenção do parâmetro de carga constante durante o ciclo de iterações, e apresentarem um mau condicionamento da matriz de rigidez tangente que se torna singular nesses pontos (CHAN; CHUI, 2000).

Segundo Maximiano (2012), há dois tipos de pontos críticos, Figura 2.3, os pontos limites, divididos em pontos limites com os fenômenos de *snap-through* (salto dinâmico sob controle de carga) e os pontos limites com os fenômenos de *snap-back* (salto dinâmico sob

controle de deslocamento), e de bifurcação, que são pontos que derivam duas ou mais trajetórias de equilíbrio.

Esses fenômenos, com comportamento não linear, ocorrem quando as cargas aplicadas excedem as cargas correspondentes ao ponto limite em um determinado incremento, dessa forma, a estrutura não é capaz de plotar toda a sua trajetória de equilíbrio. Como consequência, a convergência não é alcançada pelo método nos pontos próximos aos pontos limites (SOUZA, 2015).

Figura 2.3 - Pontos limites de a) cargas e b) deslocamentos



Fonte: Sousa (2012)

Portanto, é necessário associar uma estratégia de iteração eficiente ao método de solução, de modo a passar além dos pontos limites e traçar toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e extrapolando os pontos singulares, ou críticos, que possam existir (MAXIMIANO, 2012).

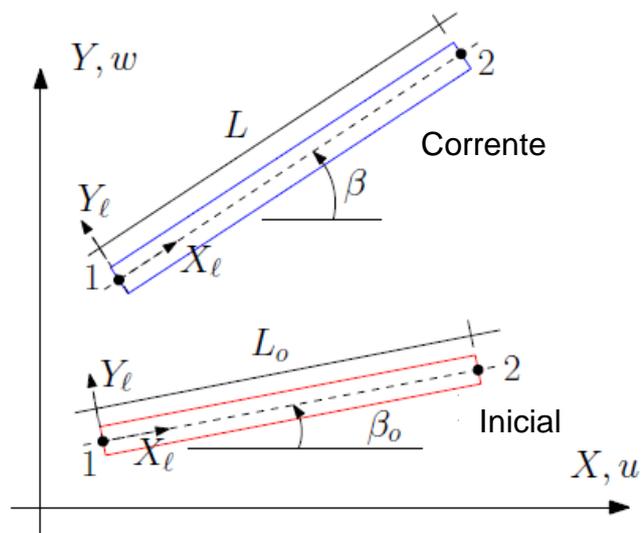
As técnicas mais comuns são: Comprimento de Arco, Controle de deslocamento, Controle Generalizado de Deslocamento, Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais.

3 FORMULAÇÕES NUMÉRICAS

3.1 FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS

Uma formulação corrotacional tem por finalidade separar os movimentos rígidos do corpo das deformações do elemento local. Para isso, deve-se definir um sistema de eixos cartesianos e ortogonais, que acompanhe o movimento do corpo, anexando um quadro de referência de elemento local (ou sistema de coordenadas), que gira e converte com o elemento de viga (BATHE, 1983). Como ilustra a Figura 3.1 observa-se um elemento de viga típico em suas configurações iniciais e atuais.

Figura 3.1 - Configuração inicial e atual para um elemento de viga



Fonte: Yaw (2009)

Para o elemento de viga em sua configuração inicial, as coordenadas nodais globais são definidas como (X_1, Y_1) para o nó 1 e (X_2, Y_2) para o nó 2. Dessa forma, o comprimento original da viga pode ser calculado conforme a Equação (3. 1).

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (3. 1)$$

Para o elemento de viga em sua configuração atual, as coordenadas nodais globais são $(X_1 + u_1, Y_1 + w_1)$ para o nó 1 e $(X_2 + u_2, Y_2 + w_2)$ para o nó 2, onde, u_1 é o deslocamento

nodal do nó 1 na direção X e w_1 é o deslocamento nodal global do nó 1 na direção Y , vale a mesma relação para o nó 2.

Sendo assim, o comprimento atual, após essas considerações, definido pela Equação (3. 2). Bem como, o deslocamento axial local do elemento de viga calculado conforme a Equação (3. 3).

$$L = \sqrt{((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))^2 + ((Y_2 + w_2) - (Y_1 + w_1))^2} \quad (3. 2)$$

$$u_l = L - L_0 \quad (3. 3)$$

No entanto, se a diferença entre L e L_0 for pequena, será muito condicionada para uso em uma configuração numérica. Portanto, Crisfield (1997), defende a multiplicação de u_l por $(L + L_0) / (L + L_0)$, conforme explicito na Equação (3. 4)

$$u_l = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0} \quad (3. 4)$$

As coordenadas globais permanecem fixas em toda a formulação corrotacional. No entanto, um quadro de coordenadas corrotativa local é anexado a cada elemento da viga, dessa forma, conforme o elemento de viga se deforma, as coordenadas corrotativas acompanham o movimento. O ângulo atual do pórtico em rotação em relação à coordenada global do sistema é indicado como β , sendo $\cos \beta$ e $\sen \beta$ representados pelas Equação (3. 5) e Equação (3. 6), respectivamente.

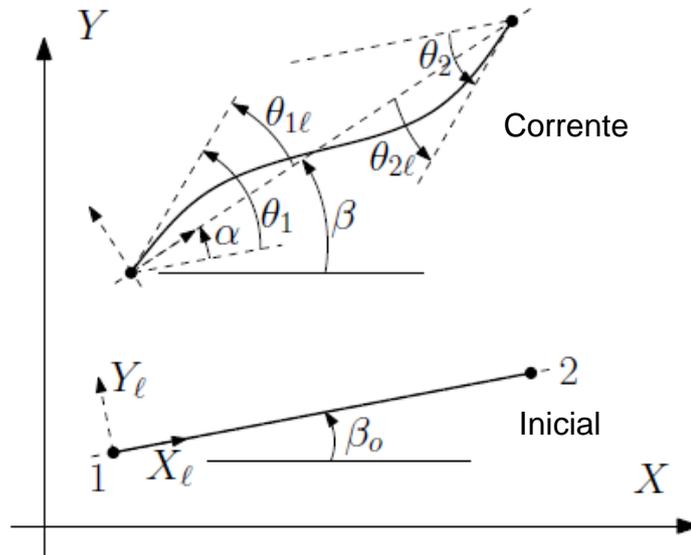
$$\cos \beta = \frac{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)}{L} \quad (3. 5)$$

$$\sen \beta = \frac{(Y_2 + w_2) - (Y_1 + w_1)}{L} \quad (3. 6)$$

Conseqüentemente, a partir dessas expressões, a configuração inicial e a configuração atual (isto é, a coordenadas correntes nodais) são estabelecidas. Os ângulos 1 e 2 são as rotações nodais globais calculadas a partir das equações matriciais globais, ilustrado na Figura 3.2. Se

os ângulos inicial e final da barra, são conhecidos, então as rotações nodais locais podem ser expressas através das Equações (3. 7) e (3. 8).

Figura 3.2 - Configuração inicial e corrente para uma viga típica



Fonte: Yaw (2012)

$$\theta_{1l} = \arctan \left(\frac{\cos \beta \operatorname{sen} \beta_1 - \operatorname{sen} \beta \cos \beta_1}{\cos \beta \cos \beta_1 + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta_1} \right) \quad (3. 7)$$

$$\theta_{2l} = \arctan \left(\frac{\cos \beta \operatorname{sen} \beta_2 - \operatorname{sen} \beta \cos \beta_2}{\cos \beta \cos \beta_2 + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta_2} \right) \quad (3. 8)$$

Onde $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$ e $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$. A partir dessa elucidação, é possível, através de manipulações matemáticas, fornecer uma relação entre variáveis locais e variáveis globais, conforme a Equação (3. 9).

$$\delta p_l = \begin{Bmatrix} \delta_{ul} \\ \delta \theta_{1l} \\ \delta \theta_{2l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^T \\ A^T \end{bmatrix} \delta p = \mathbf{B} \delta p \quad (3. 9)$$

Sendo, δ_{ul} o movimento na direção axial nas coordenadas locais e $\delta \theta_{1l}$ e $\delta \theta_{2l}$ são as rotações nodais globais. δp é a variação do vetor de deslocamento global $\mathbf{p}^T = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2]$.

Por fim, a forma final da matriz para B pode ser encontrada através da Equação (3. 10). Onde, por simplificações, C é a representação do $\cos \beta$ e S representa o $\sin \beta$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3. 10)$$

Dessa forma, o vetor de forças internas elementar (**Fel**) é determinado pela Equação (3. 11).

$$\mathbf{Fel} = \mathbf{B}^T [N \overline{M}_1 \overline{M}_2]^T \quad (3. 11)$$

Por fim, a matriz de rigidez tangente elementar \mathbf{K}_{el} é determinada em função da parcela da matriz de rigidez dependente do material \mathbf{K}_M e da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_G , expressa pela Equação (3. 12), Equação (3. 13) e Equação (3. 14), respectivamente.

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (3. 12)$$

Sendo:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3. 13)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\overline{M}_1 + \overline{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (3. 14)$$

Os vetores \mathbf{z} e \mathbf{r} são, presentes na matriz de rigidez geométrica, podem ser expressos pela Equação (3. 15) e Equação (3. 16).

$$\mathbf{z} = [\sin(\beta) \quad -\cos(\beta) \quad 0 \quad -\sin(\beta) \quad \cos(\beta) \quad 0]^T \quad (3. 15)$$

$$\mathbf{r} = [-\cos(\beta) \quad -\sin(\beta) \quad 0 \quad \cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad 0]^T \quad (3. 16)$$

Desde que os deslocamentos transversais locais sejam nulos, as forças transversais locais de cisalhamento são calculadas com base em estáticas simples, visto que os momentos são conhecidos no sistema local. Supondo que nenhuma força seja aplicada entre os nós de uma viga e somando momentos em torno do nó 2, a força de cisalhamento no nó 1 pode ser obtida através da Equação (3. 17). Para o nó 2, faz-se $V_2 = -V_1$.

$$V_1 = \frac{\overline{M}_1 + \overline{M}_2}{L} \quad (3. 17)$$

3.2 ELEMENTO DE VIGA DE BERNOULLI

A teoria de Euler-Bernoulli é considerada a teoria clássica de elementos de viga, pois são desconsiderados os efeitos devidos às deformações cisalhantes na seção transversal da barra ao realizar o cálculo da rigidez da estrutura. Isto é, considera-se que a seção transversal continuará sendo plana e perpendicular ao eixo neutro da viga (CUNHA, 2015)

A integração dos esforços internos, considerando rigidez axial (EA) e rigidez de flexão (EI) constantes ao longo do eixo x , produz componentes mais elementares do vetor de forças internas, os quais são dados pelas Equação (3. 18), Equação (3. 19) e Equação (3. 20).

$$N = \frac{EA u_l}{L_0} \quad (3. 18)$$

$$M_i = \frac{EI}{L_0} (4\overline{\theta}_i + 2\overline{\theta}_j) \quad (3. 19)$$

$$M_j = \frac{EI}{L_0} (4\overline{\theta}_j + 2\overline{\theta}_i) \quad (3. 20)$$

Sendo, A é a área da seção transversal, I o momento de inércia da seção transversal e E é o módulo de Young.

Para definir a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema corrotacional é fundamental que seja efetuada a derivação das forças internas locais, em relação aos

deslocamentos locais. Deste modo, sabendo que a componente axial do tensor de tensão é dada pela Equação (3. 21).

$$\sigma = E\varepsilon = E \left[\frac{\bar{u}}{l} + \left(\frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_i + y \left(\frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_j \right] \quad (3. 21)$$

Logo, as componentes da matriz de rigidez local do elemento, podem ser dadas da Equação (3. 22) até a Equação (3. 27).

$$k_{l1,1} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l^2} \int_V E dV \quad (3. 22)$$

$$k_{l2,2} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_i} = \int_V y^2 \left[\frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right]^2 dV \quad (3. 23)$$

$$k_{l3,3} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_j} = \int_V y^2 \left[\frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right]^2 dV \quad (3. 24)$$

$$k_{l1,2} = k_{l2,1} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l} \int_V Ey \left[\frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] dV \quad (3. 25)$$

$$k_{l1,3} = k_{l3,1} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l} \int_V Ey \left[\frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] dV \quad (3. 26)$$

$$k_{l2,3} = k_{l3,2} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{1}{l} \int_V Ey^2 \left[\frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] \left[\frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] dV \quad (3. 27)$$

Considerando as imposições anteriores, isto é, mantendo a rigidez axial e a rigidez de flexão constantes ao longo do eixo x, e realizando a integração sobre o volume do elemento, para cada termo dessa matriz, encontra-se a matriz representada na Equação (3. 28).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L_0} & \frac{2EI}{L_0} \\ 0 & \frac{2EI}{L_0} & \frac{4EI}{L_0} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Uma outra maneira de representar a matriz é reescrevendo em função do raio de giração, $r = \sqrt{I/A}$. Desse modo, a matriz passa a ser determinada pela Equação (3.29).

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.3 FORMULAÇÃO DA ANÁLISE NÃO LINEAR

No contexto do método dos elementos finitos, os elementos estruturais esbeltos necessitam de um sistema de equações algébricas não linear para analisar a sua estabilidade. Esse sistema de equações que governa o equilíbrio estático de uma estrutura com comportamento não linear pode ser obtido de acordo com a Equação (3.30).

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{F}_R \quad (3.30)$$

Onde \mathbf{F}_R é um vetor de forças nodais externas assumido como referência, λ é um parâmetro de carga responsável pelo o escalonamento de \mathbf{F}_R e \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas em função dos deslocamentos, \mathbf{u} , nos pontos nodais da estrutura.

Para resolver o sistema apresentado pela Equação (3.30), utiliza-se uma abordagem incremental-iterativa, onde duas fases podem ser identificadas. A primeira delas, nomeada fase predita, envolve a solução dos deslocamentos incrementais, por meio das equações de equilíbrio da estrutura, conforme um determinado acréscimo de carregamento (Silva, 2009).

A segunda fase, conhecida por fase corretiva, tem por finalidade a correção das forças internas incrementais alcançadas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo. De modo consequente, as forças internas são então confrontadas com o carregamento externo, de forma a mensurar o desequilíbrio existente entre as forças internas e

externas, e esse ciclo é repetida até que, devido um critério de convergência, a estrutura alcance o equilíbrio (Silva, 2009).

Para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente, deve-se montar a matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} , a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura. Como consequência, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais, $\delta\mathbf{u}_r$, através da Equação (3. 31) (MAXIMIANO, 2012).

$$\delta\mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_R \quad (3. 31)$$

Para o cálculo dos deslocamentos nodais incrementais tangencias, $\Delta\mathbf{U}^0$, é necessário definir o incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, este pode ser feito, inclusive, através uma seleção automática. Com a definição de $\Delta\lambda^0$, realiza-se o escalonamento de $\delta\mathbf{u}_r$, como observado na Equação (3. 32).

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{u}_r \quad (3. 32)$$

Posteriormente, os parâmetros totais de força (λ) e deslocamento (\mathbf{u}) são atualizados, respectivamente, pela Equação (3. 33) e Equação (3. 34). Em que λ^{k-1} e \mathbf{u}^{k-1} caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3. 33)$$

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} + \Delta\lambda^0 \quad (3. 34)$$

Porém a solução descrita pela Equação (3. 33) e Equação (3. 34) ocasionalmente satisfazem a condição de equilíbrio do sistema, desse modo, há necessidade de incluir iterações subsequentes para que se possa restaurar o equilíbrio do sistema estrutural (MAXIMIANO, 2012).

3.4 MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS

3.4.1 Ciclo de iterações – Método de Newton-Raphson

Para iniciar o desenvolvimento do método de Newton-Raphson, a força desequilibrada $\mathbf{g}(\mathbf{u})$, retorna na análise para o cálculo de um incremento de deflexão corretiva, conforme observado na Equação (3. 35). Os superíndices (k) e $(k - 1)$ referem-se às iterações corrente e anterior, respectivamente.

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_{int}^{(k)} \quad (3. 35)$$

Na Equação (3. 35), \mathbf{K} é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural (matriz jacobiana) e $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o subincremento de deslocamentos, \mathbf{F}_R é o vetor de referência que caracteriza a direção da carga externa, λ o parâmetro de carga, \mathbf{F}_{int} o vetor de forças internas, que é função dos deslocamentos \mathbf{u} nos pontos nodais da estrutura.

Em seguida, os parâmetros totais de força (λ) e deslocamento (\mathbf{u}) são atualizados, respectivamente, pela Equação (3. 36) e Equação (3. 37).

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} + \delta \lambda^k \quad (3. 36)$$

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (3. 37)$$

Os vários algoritmos existentes, que utilizam abordagem incremental-iterativa, apresentam como passo essencial a avaliação dessas forças residuais, principalmente das forças internas da estrutura. Determinado $\delta \lambda^k$, obtêm-se a correção dos deslocamentos. Os deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas parcelas, conforme observado pela Equação (3. 38).

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (3. 38)$$

$\delta \lambda$ é o parâmetro de força a ser corrigido ao longo do ciclo iterativo e $\delta \mathbf{u}_g$ e $\delta \mathbf{u}_r$ são obtidos, respectivamente, pela Equação (3. 39) e Equação (3. 41).

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.40)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_R \quad (3.41)$$

Com a obtenção da solução iterativa, $\delta \lambda^k$ e $\delta \mathbf{u}^{(k)}$, realiza-se a atualização das variáveis incrementais do problema através da Equação (3.42) e Equação (3.43).

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)} \quad (3.42)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (3.43)$$

Os parâmetros incrementais de força e deslocamentos nodais totais no passo de força $t + \Delta t$ e iteração k são avaliados, respectivamente, pela Equação (3.44) e Equação (3.45).

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k)} = {}^t\lambda + \Delta \lambda^{(k)} \quad (3.44)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{u}^{(k)} = {}^t\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (3.45)$$

Este processo ocorre até que seja satisfeito um ou mais critérios de convergência.

3.4.2 Ciclo de Iterações – Método de Potra-Pták

O método de Potra-Pták (1984) para análise estrutural não linear consiste em um método de dois passos fundamentado no método de Newton-Raphson, que consiste de duas avaliações da função e de apenas cálculos de derivadas de primeira ordem. Este esquema iterativo pode ser observado através da seguinte Equação (3.46).

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)}) \quad (3.46)$$

Assumindo que a inversa da matriz $\mathbf{K}^{(k-1)}$ existe, o vetor $\mathbf{y}^{(k-1)}$ é calculado pela Equação (3.47).

$$\mathbf{y}^{(k-1)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + [\mathbf{K}^{-1 (k-1)}][\delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)}] \quad (3.47)$$

Isolando $\delta\mathbf{u}^{(k)}$ na Equação (3.46), chega-se a seguinte Equação (3.48).

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_1^{(k)} + \delta\mathbf{u}_2^{(k)} \quad (3.48)$$

Onde, as parcelas dos deslocamentos residuais são descritas na Equação (3.49) e Equação (3.50).

$$\delta\mathbf{u}_1^{(k)} = [\mathbf{K}^{-1 (k-1)}][\delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)}] = \delta\lambda_1^{(k)} \delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \delta\mathbf{u}_g^{(k)} \quad (3.49)$$

$$\delta\mathbf{u}_2^{(k)} = [\mathbf{K}^{-1 (k-1)}][\delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)})] = \delta\lambda_2^{(k)} \delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \delta\mathbf{y}_g^{(k)} \quad (3.50)$$

3.4.3 Algoritmo Mohit et al. (2020)

Baseado no algoritmo de Mohit et al. (2020), um método iterativo de três etapas foi apresentado por Rezaiee-Pajand e Naserian (2015), e cada uma destas etapas é descrito conforme a Equação (3.51), Equação (3.52) e Equação (3.53).

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.51)$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{\sum_{i=1}^p w_i f'(x_n + \tau_i(y_n - x_n))} \quad (3.52)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\sum_{i=1}^p w_i f'(x_n + \tau_i(z_n - x_n))} \quad (3.53)$$

De acordo com Rezaiee-Pajand e Naserian (2015), τ_i pode estar entre $[0, 1]$, e w_i verifica-se conforme a Equação (3.54).

$$\sum_{i=1}^p w_i = 1 \quad (3.54)$$

Nesta equação, os vetores de carga externa e interna são mostrados por W e F , respectivamente. O deslocamento do primeiro incremento (preditor) é calculado pela seguinte Equação (3.55).

$$\Delta \mathbf{x}^n = (\mathbf{K}^{n-1})^{-1} \Delta \mathbf{W}^n \quad (3.55)$$

Consequentemente, \mathbf{K}^{n-1} é a matriz de rigidez tangente do sistema em seu $n - 1$ -ésimo passo, e $\Delta \mathbf{W}^n$ é a carga incremental no n -ésimo passo. O deslocamento de cada etapa de iteração é calculado conforme a Equação (3.56). Fornecido as tangentes, \mathbf{K}_{xi}^{n-1} , \mathbf{K}_{yi}^{n-1} e \mathbf{K}_{zi}^{n-1} , do sistema de matrizes de rigidez em $n-1$ -ésimo incremento e i -ésimo iteração.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{y}_i^n = (\mathbf{K}_{xi}^{n-1})^{-1} \Delta \mathbf{w}_{xi}^n \\ \Delta \mathbf{z}_i^n = (\mathbf{K}_{yi}^{n-1})^{-1} \Delta \mathbf{w}_{yi}^n \\ \Delta \mathbf{x}_i^n = (\mathbf{K}_{zi}^{n-1})^{-1} \Delta \mathbf{w}_{zi}^n \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.56)$$

Já as cargas desbalanceadas, $\Delta \mathbf{w}_{xi}^n$, $\Delta \mathbf{w}_{yi}^n$ e $\Delta \mathbf{w}_{zi}^n$ são calculadas com base nas seguintes Equações (3.57).

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{w}_{xi}^n = \Delta \mathbf{W}^n - \mathbf{F}_{xi} \\ \Delta \mathbf{w}_{yi}^n = \Delta \mathbf{w}_{xi}^n - \mathbf{F}_{yi} \\ \Delta \mathbf{w}_{zi}^n = \Delta \mathbf{w}_{yi}^n - \mathbf{F}_{zi} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.57)$$

Em que, \mathbf{F}_{xi} , \mathbf{F}_{yi} e \mathbf{F}_{zi} são vetores de carga interna global. É imprescindível mencionar que o subscrito i e n expressam o número de iteração e incremento, respectivamente. Além disso, os subscritos x , y e z expressam as etapas das iterações.

3.5 TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO

Com a finalidade de corrigir o desequilíbrio existente entre as forças internas e externas, e consequentemente plotar a trajetória de equilíbrio, aplica-se algum dos métodos iterativos abordados nesta dissertação. Portanto, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória

de equilíbrio e a passagem por todos os pontos limites, faz-se necessário a implementação de uma técnica geral de continuação. O formato desta equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

3.5.1 Comprimento de Arco Linear - Riks (1972)

No método Arco Linear proposto por Riks (1972), o caminho de iteração é sempre mantido ortogonal à tangente inicial em cada etapa. A expressão para o incremento de carga inicial (solução prevista) é dada pela Equação (3. 58).

$$\Delta\lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\| {}^t \delta \mathbf{d}_r \|} \quad (3. 58)$$

Onde Δl representa o incremento do comprimento do arco e ${}^t \delta \mathbf{d}_r$ é a parte de $\delta \mathbf{d}_r^{(k)}$ relacionada ao vetor \mathbf{F}_R na etapa de tempo anterior. Conforme proposto por Crisfield (1991), o aumento Δl pode ser usado como parâmetro de controle na etapa de tempo atual de acordo com a Equação (3. 59).

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0.5} \quad (3. 59)$$

Sendo I_d o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, especificado pelo usuário do programa, $I_{p,a}$ é o número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse. $\Delta l_{p,a}$ representa os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior.

No processo iterativo subsequente, a equação de restrição $c^{(k)}$ usada para calcular $\delta\lambda^{(k)}$ é obtida fazendo com que a solução incremental iterativa ($\delta \mathbf{d}^k, \delta\lambda \mathbf{F}_r$) seja ortogonal à solução incremental predita ($\Delta \mathbf{d}^0, \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r$). Como demonstrado na Equação (3. 60).

$$c^{(k)} = (\delta \mathbf{d}^{(k)})^T \Delta \mathbf{d}^0 + \delta\lambda^{(k)} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (3. 60)$$

Substituindo o deslocamento residual ($\delta \mathbf{d}^{(k)}$) na Equação (3. 60) produz a Equação (3. 61) para a determinação da correção do parâmetro de carga ($k > 1$).

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\Delta\mathbf{d}^0)^T \delta\mathbf{d}_g^k}{((\Delta\mathbf{d}^0)^T \delta\mathbf{d}_r^k + \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)} \quad (3.61)$$

Negligenciando o segundo termo no denominador da Equação (3.61), a saber, $\Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0$, resulta o parâmetro $\delta\lambda^k$, Equação (3.62).

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\Delta\mathbf{d}^0)^T \delta\mathbf{u}_g^k}{((\Delta\mathbf{d}^0)^T \delta\mathbf{d}_r^k)} \quad (3.62)$$

O sinal do incremento de carga inicial $\Delta\lambda^0$ pode ser positivo ou negativo. A escolha correta do sinal é tão importante na definição das sequências de soluções que permitem o avanço na resposta de deslocamento de carga. O procedimento utilizado consiste na análise do produto interno entre as coordenadas nodais incrementais obtidas na etapa de carregamento anterior (${}^t\Delta\mathbf{d}$) e o sub-incremento de coordenadas nodais iniciais ($\delta\mathbf{d}_r^k$), então se, ${}^t\Delta\mathbf{d}^T \delta\mathbf{d}_r^{(0)} > 0$, o preditor $\Delta\mathbf{d}^0$ terá a mesma direção de ($\delta\mathbf{d}_r^k$). Caso contrário, o preditor terá direção oposta.

3.5.2 Critérios de Convergência Adotados

O processo iterativo finaliza resultando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise quando pelo menos um dos dois, ou ambos os critérios de convergência apresentados abaixo forem atendidos:

- a) O primeiro critério, Equação (3.63), é baseado nas relações de forças e é calculado no final da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior.

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.63)$$

Sendo $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|$ igual à norma Euclidiana do vetor das forças externas de referência constante, que é calculada usando o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior; $\|\mathbf{F}_r\|$ é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo; e ζ é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada;

- b) O segundo critério, Equação (3. 64), de convergência obedece à relação de deslocamentos e é sempre verificado no final da iteração corrente.

$$\zeta_1 = \frac{\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|}{\|\Delta\mathbf{u}^{(k)}\|} \leq \zeta \quad (3. 64)$$

Sendo, $\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|$ é o subincremento do vetor de deslocamento e $\|\Delta\mathbf{u}^{(k)}\|$ é o vetor incremento de deslocamento, que são obtidos após a correção do processo iterativo; e ζ é o fator de tolerância inserido no início da iteração.

3.6 FORMULAÇÃO DAS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Nesta seção será apresentado um elemento de ligação proposto por Del Savio (2004) para a consideração de uma ligação semirrígida. Este elemento deverá ser acoplado nos pontos de encontro entre as vigas e os pilares ou entre as vigas e as colunas, ou seja, onde se localiza as ligações semirrígidas.

A principal razão para a concepção deste elemento de ligação deve-se ao fato de que o elemento híbrido normalmente implementado, proposto por Chan e Chui (2000), apresenta imprecisão diante da representação dos momentos fletores, quando submetido a cargas distribuídas.

Além disso, outro estímulo para a implementação deste elemento é o interesse de se ter um elemento independente para que se possam considerar os efeitos das rizezas (axial, translacional e rotacional), uma vez que, estas considerações não são levadas em conta no elemento híbrido de Chan e Chui (2000), onde se tem apenas a rigidez a rotação como variável e esta está acoplada ao elemento.

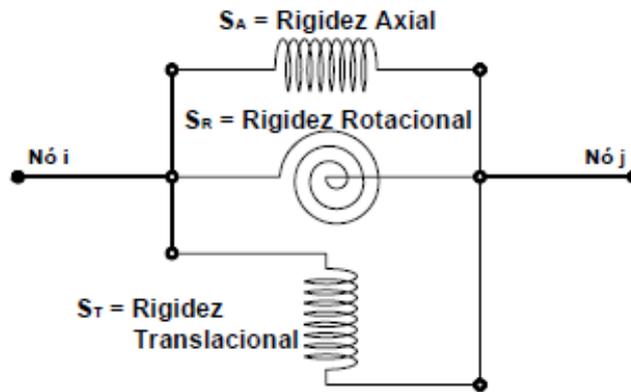
Finalmente, à formulação da matriz de rigidez deste elemento de ligação pode ser compreendido basicamente em uma matriz de rigidez que tenha as rizezas axiais, translacionais e rotacionais em seu corpo. Por simplicidade de cálculo, o elemento de mola da ligação possui, por hipótese, tamanho desprezível. Desse modo, a relação da rigidez do elemento é obtida através da Equação (3. 65).

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_A & 0 & 0 & -S_A & 0 & 0 \\ 0 & S_T & 0 & 0 & -S_T & 0 \\ 0 & 0 & S_R & 0 & 0 & -S_R \\ -S_A & 0 & 0 & S_A & 0 & 0 \\ 0 & -S_T & 0 & 0 & S_T & 0 \\ 0 & 0 & -S_R & 0 & 0 & S_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Sendo, S_A , S_T e S_R são as rigidezes tangentes axial, translacional e rotacional da mola, respectivamente, u_i , v_i , θ_i , u_j , v_j e θ_j são as deformações axiais, translacionais e rotacionais, respectivamente, das duas extremidades do elemento de ligação. Os esforços normais, cisalhantes e o momento fletor, são dados, respectivamente por P_i , Q_i , M_i , P_j , Q_j , M_j .

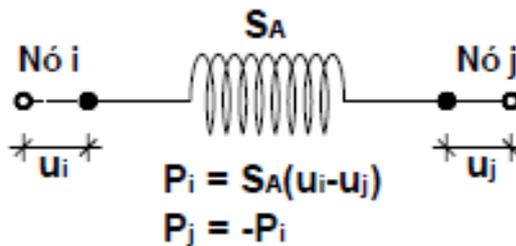
Na Figura 3.3 é demonstrado o modelo do elemento de ligação idealizado para simular uma ligação semirrígida. E na Figura 3.4, Figura 3.5 e Figura 3.6 é ilustrado, respectivamente, a deformação axial, a rotação e translação de cada mola que compõe o modelo proposto (Figura 3.3), bem como os esforços em cada mola.

Figura 3.3 - Modelo do elemento de ligação proposto



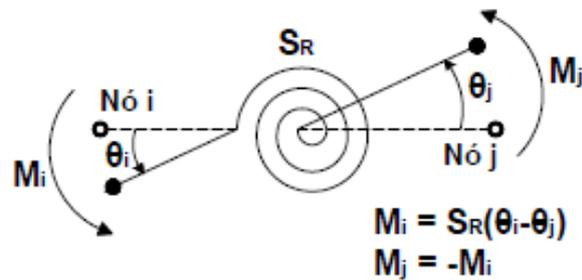
Fonte: Del Savio (2004)

Figura 3.4 - Modelo referente a mola de rigidez axial proposto



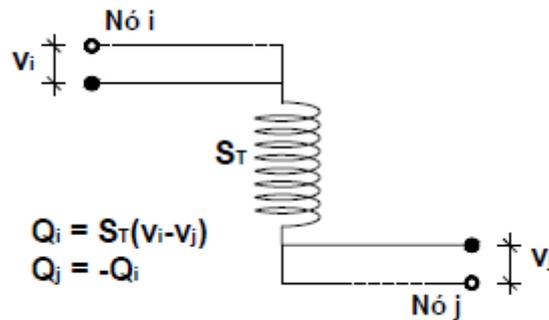
Fonte: Del Savio (2004)

Figura 3.5 - Modelo referente a mola de rigidez rotacional proposto



Fonte: Del Savio (2004)

Figura 3.6 - Modelo referente a mola de rigidez translacional proposto



Fonte: Del Savio (2004)

A partir da consideração das molas de ligação adicionadas às extremidades da viga-pilar ou viga-coluna, a matriz de rigidez convencional do elemento deverá ser modificada de maneira a levar em consideração o efeito das ligações semirrígidas na formulação.

Este elemento de ligação proposto apresenta um comportamento preciso para qualquer tipo de carregamento, possibilitando determinar mais rigorosamente o comportamento da estrutura, sem a necessidade de qualquer tipo de discretização do carregamento.

Além do mais, este elemento de ligação é possível realizar análises não linear física das ligações, dada a curva momento rotação que descreve o comportamento da ligação. E também simular análises elastoplásticas da estrutura, acrescentando elementos de ligação nos locais onde se esperam que apareçam as rótulas plásticas.

4 MODELO NÃO LINEAR DE LIGAÇÃO SEMIRRÍGIDA BASEADO NA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

4.1 MECÂNICA DO DANO

Nos últimos anos foram formulados inúmeros modelos constitutivos amplamente aceitos para representar os efeitos das alterações micro-estruturais no desempenho mecânico dos materiais, dos quais se destaca o modelo de Dano Contínuo de Lemaitre (1985).

Segundo Lemaitre (1985), o processo de danificação dos materiais é gradual e baseado nos princípios gerais da termodinâmica, isto é, por intermédio de um número finito de variáveis internas, os materiais se deterioram e rompem através de um processo irreversível.

Fundamentado no conceito da tensão efetiva, o modelo de dano isotrópico considera as componentes de tensão atuando sobre uma mesma área resistente. Logo, quando solicitado, pode haver a existência da variação desta área, ou seja, no momento em que há o crescimento da variável dano, a área resistente do material diminui. Em suma, a mecânica do dano contínuo estuda o comportamento da capacidade de carga de sólidos sem fissuras principais e a sua resposta e evolução quando tensionado (FERREIRA, 2020).

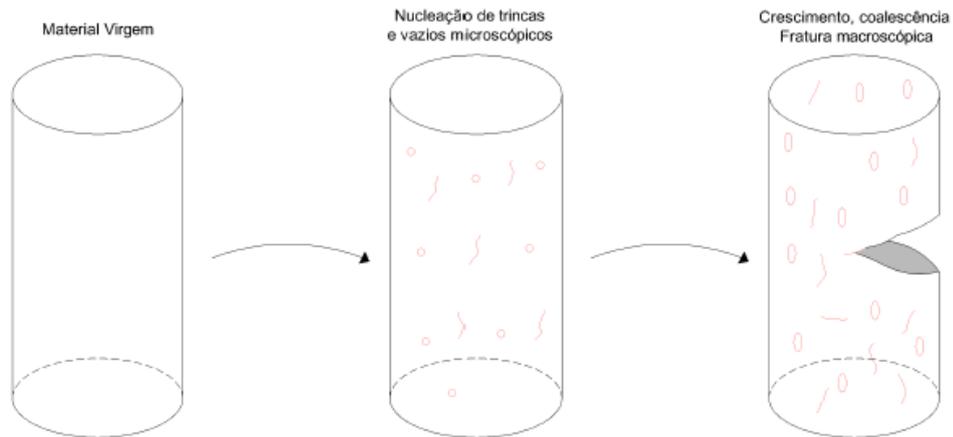
Ao ser submetido a uma determinada força, o material é danificado devido à presença de concentração de microtensões ao redor das falhas ou em suas interfaces, ocasionando a interrupção das ligações que o compõem, danificando-o. A evolução desta ação contribui diretamente para a resposta não-linear do material, sendo perceptível macroscopicamente através da redução de rigidez e resistência do material (RODRIGUES, 2011).

Dessa forma, o dano está proporcionalmente relacionado à existência e ao crescimento de trincas e vazios microscópicos, que são irregularidades em um meio considerado como contínuo. A Figura (4.1) demonstra uma ilustração esquemática da sequência da evolução do dano em um material metálico representada em 3 etapas: i) material virgem ou contínuo; ii) aparecimento de trincas e vazios microscópicos; e iii) crescimento dos vazios, ocasionando a fratura macroscópica do material (FERREIRA, 2020).

Os modelos constitutivos de dano têm sido aplicados na análise da perda de rigidez de estruturas, com o intuito de prever a degradação do material. Sua relevância consiste na simulação da degradação mecânica de materiais que depois de cursado o regime elástico, ocorre a variação tensional a cada incremento de deformação, reproduzindo o comportamento não-

linear do material. Para isso, é fundamental que as variáveis que regem o comportamento não-linear desses materiais sejam conhecidas.

Figura 4.1- Evolução do dano em um material metálico



Fonte: Ferreira (2020)

O modelo de dano isotrópico considera que, independentemente do direcionamento, as falhas possuem o mesmo comportamento mecânico governado por uma variável escalar, d , denominada variável de dano (RODRIGUES, 2011). Logo, em uma seção transversal de um elemento danificado, a variável de dano pode ser definida através do quociente entre a área degradada (A_D) e a área total da seção transversal (A), conforme a Equação (4.1).

$$d = \frac{A_D}{A} \quad (4.1)$$

Observa-se que a variável de dano está contida no intervalo $0 \leq d \leq 1$, sendo que a variável de dano é nula, $d = 0$, quando $A_D = 0$, o que corresponde a um estado íntegro e contínuo do material. Por outro lado, quando $d = 1$, necessariamente, $A_D = A$, correspondendo ao estado de degradação completa.

Sendo assim, a área da seção que efetivamente resiste às forças aplicadas (Equação (4.2)), pode ser expressa como:

$$A_D = A - \bar{A} \quad (4.2)$$

Sendo \bar{A} a área efetiva, para um elemento unidimensional com carregamento axial F , podem-se definir duas variáveis de tensão: a tensão aparente, σ , que diz respeito à área total da seção transversal, e a tensão efetiva, $\bar{\sigma}$, que representa a área que efetivamente resiste aos esforços solicitantes (área íntegra). As duas tensões podem ser escritas, respectivamente, pela Equação (4.3) e Equação (4.4).

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.3)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}} \quad (4.4)$$

Substituindo a Equação (4.2) na Equação (4.1), encontra-se a Equação (4.5):

$$d = \frac{A - \bar{A}}{A} = 1 - \frac{\bar{A}}{A} \quad (4.5)$$

Reorganizando, a tensão aparente pode ser expressa em função da variável de dano e da tensão efetiva, como observado na Equação (4.6).

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{A}}{A} = 1 - d \quad (4.6)$$

E, finalmente, multiplicando ambos os membros por $\bar{\sigma}$, tem-se a seguinte lei constitutiva (Equação (4.7)):

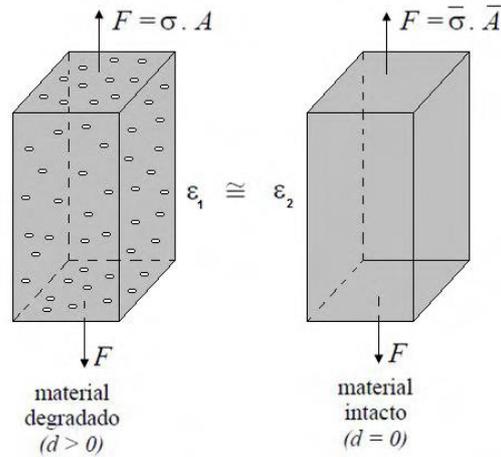
$$\sigma = (1 - d) \cdot \bar{\sigma} \quad (4.7)$$

Considerando a Equação (4.7), observa-se que, para o material em estado íntegro, localmente a tensão efetiva é igual à tensão aparente, e que, para o material completamente danificado, localmente a tensão efetiva tende ao infinito.

Sendo assim, fundamentado no conceito de tensão efetiva e na hipótese de equivalência de deformação proposto por Lemaitre e Chaboche (1978), a deformação relacionada a um estado danificado submetido à tensão, σ , é proporcional à deformação associada ao estado não

danificado submetido à tensão efetiva, $\bar{\sigma}$. Como ilustrado na Figura 4.2, e formulado através da Equação (4.8) e Equação (4.9):

Figura 4.2 – Hipótese de deformação equivalente



Fonte: Rodrigues (2011)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_D} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (4.9)$$

sendo E o módulo de elasticidade intacto e E_D o módulo de elasticidade danificado. Substituindo a Equação (4.7) na Equação (4.8), e posteriormente igualando a Equação (4.8) à Equação (4.9), encontra-se a relação entre o módulo de elasticidade (módulo de Young) e o módulo de elasticidade degradado (Equação (4.10)):

$$E_D = (1 - d)E \quad (4.10)$$

Reorganizando as equações acima, pode-se escrever a relação constitutiva total através da Equação (4.11), Equação (4.12) e Equação (4.13):

$$\sigma = E_D \cdot \varepsilon \quad (4.11)$$

$$\sigma = (1 - d)E \cdot \varepsilon \quad (4.12)$$

$$\bar{\sigma} = E \cdot \varepsilon \quad (4.13)$$

4.2 FORMULAÇÃO E ALGORITMO

Com base na teoria do modelo de dano de Lemaitre e Chaboche (1985), propõe-se um modelo constitutivo para descrever o comportamento não linear das ligações semirrígidas. A função momento-rotação pode ser escrita como sendo:

$$\bar{M} = S_{R0} \theta \quad (4.14)$$

no qual \bar{M} é o momento efetivo, S_{R0} é a rigidez rotacional inicial e θ é a deformação rotacional da conexão. Pode-se definir o limite de dano inicial r_0 pela seguinte equação:

$$r_0 = \frac{M_0}{\sqrt{S_{R0}}} \quad (4.15)$$

em que M_0 é o momento de proporcionalidade. A norma do momento efetivo \bar{M} pode ser calculada por:

$$\tau(\bar{M}) = \sqrt{\frac{\bar{M}^2}{S_{R0}}} = \sqrt{\frac{S_{R0}^2 \theta^2}{S_{R0}}} = \sqrt{S_{R0}} \theta \quad (4.16)$$

A função de dano $f(\bar{M})$, no espaço dos momentos efetivos, é dada por:

$$f(\bar{M}) = \tau(\bar{M}) - r_0 \leq 0 \quad (4.17)$$

As relações de Kuhn-Tucker definem as condições de carga e descarga na ligação, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{d} &\geq 0 \\ f(\bar{M}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\dot{d}f(\bar{M}) = 0$$

na qual \dot{d} é a taxa de variação da variável de dano d . Sendo assim, se $f < 0$ tem-se que $\dot{d} = 0$ (não há evolução do dano). O limite de dano r fica dado pelo máximo valor da variável τ durante o processo de carregamento:

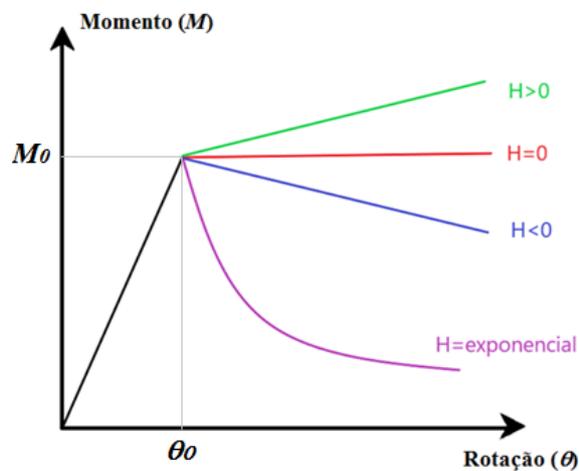
$$r = \text{máx}(r_0, \tau) \quad (4.19)$$

Para um módulo de dano H constante, tem-se a lei linear de dano em função desse parâmetro e do limite de dano (r):

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \quad (4.20)$$

Modificando o valor que descreve o módulo H , pode-se obter as relações entre o momento e a rotação conforme Figura 4.3: para $H = 0$, tem-se o regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico); para $H > 0$, encruamento linear positivo (endurecimento); para $H < 0$, encruamento linear negativo (abrandamento); e para $H =$ função exponencial, abrandamento exponencial.

Figura 4.3 – Gráfico momento versus rotação variando-se o valor de H



A relação entre a rigidez rotacional danificada (S_R) e a rigidez rotacional íntegra (S_{R0}) é dada por:

$$S_R = (1 - d)S_{R0} \quad (4.21)$$

Nota-se que para $d = 0$ a ligação está íntegra e para $d = 1$, a ligação está totalmente degradada. Portanto, o valor do dano $d \in [0, 1]$.

Para o caso de um procedimento incremental, o momento na iteração $k + 1$ pode ser obtido a partir da rotação e das variáveis de estado da iteração anterior. No Quadro 1.1 é apresentado o algoritmo do modelo constitutivo de dano isotrópico, totalmente explícito.

Quadro 1.1- Algoritmo proposto para o modelo não linear de ligação semirrígida

<p><i>Entrada:</i> $d^{(j-1)}, H, r^{(j-1)}, r_0, S_{R0}, S_R^{(j-1)}, \theta^{(j-1)}$ <i>Saída:</i> $r^{(j)}, d^{(j)}, S_R^{(j)}$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\tau(\bar{M}) \leftarrow \sqrt{S_{R0}} \theta$ 2. $f(\bar{M}) \leftarrow \tau(\bar{M}) - r_0$ 3. <i>Se</i> $f \leq 0$ 4. $S_R^{(j)} \leftarrow S_R^{(j-1)}$ 5. <i>Senão</i> 6. $r^{(j)} \leftarrow \tau(\bar{M})$ 7. $d^{(j)} \leftarrow \frac{r^{(j)} - r_0}{r^{(j)}(1+H)}$ 	<ol style="list-style-type: none"> 8. <i>Se</i> $d^{(j)} < 0$ 9. $d^{(j)} \leftarrow 0$ 10. <i>Fim-se</i> 11. <i>Se</i> $d^{(j)} > 1$ 12. $d^{(j)} \leftarrow 1$ 13. <i>Fim-se</i> 14. $S_R^{(j)} \leftarrow (1 - d^{(j)})S_{R0}$ 15. <i>Fim-se</i>
--	--

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Na primeira seção deste capítulo, análises numéricas de estruturas de pórticos planos com não linearidade geométrica e diferentes tipos de conexão (idealmente fixada, semirrígida e perfeitamente rígida) são realizadas através de um modelo linear das conexões.

Os exemplos numéricos da primeira seção são pórticos planos já conhecidos na literatura de mecânica computacional, entre eles: pórtico de Williams, pórtico plano de um e de dois pavimentos e, por último, o pórtico de Lee, conhecido pelo seu comportamento geométrico altamente não linear. Além disso, são verificadas a influência do tempo de processamento utilizando os métodos de solução demonstrados nos capítulos anteriores.

Na segunda seção, são realizadas análises não lineares geométricas de uma viga engastada, um pórtico plano de dois pavimentos e o pórtico de Lee, todos com ligações semirrígidas não lineares. Para determinar a não linearidade das ligações é aplicado um modelo baseado na Mecânica do Dano.

Para tal fim, todas as estruturas são discretizadas através da formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos considerando a teoria clássica de Euler-Bernoulli para a flexão de viga. Os métodos numéricos foram implementados na linguagem de programação *Scilab* 6.10 e todas as ligações são baseadas na teoria de Del Savio (2004) e possuem comprimento nulo na sua formulação.

5.1 MODELO LINEAR DE LIGAÇÃO

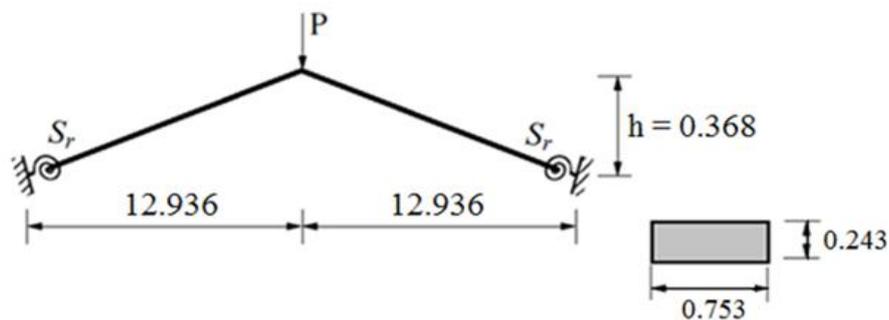
5.1.1 Pórtico de Williams

O pórtico de Williams, também conhecido como Pórtico *Toogle*, é usualmente utilizado para validar formulações geometricamente não lineares, sendo formado pela união de duas barras inclinadas compondo um pórtico abatido, cujos nós das extremidades são restritos quanto aos movimentos verticais, horizontais e rotações, ou seja, são nós engastados.

Pretendendo, então, validar o elemento de conexão proposto por Del Savio (2004), e pesquisar a influência da flexibilidade do suporte no comportamento do pórtico, foram inseridos nas extremidades de cada barra, três condições de apoio, sendo eles: rígido ($Sc = 10^{15} \text{ lb in} = 1,130 \times 10^{14} \text{ Nm}$); semirrígido ($Sc = 1,8 \times 10^3 \text{ lb in} = 2,034 \times 10^2 \text{ Nm}$); e rotulado ($Sc = 0$). Para validar o elemento de conexão implementado, são comparadas as trajetórias obtidas neste trabalho com as obtidas por Tin-Loi e Misa (1996).

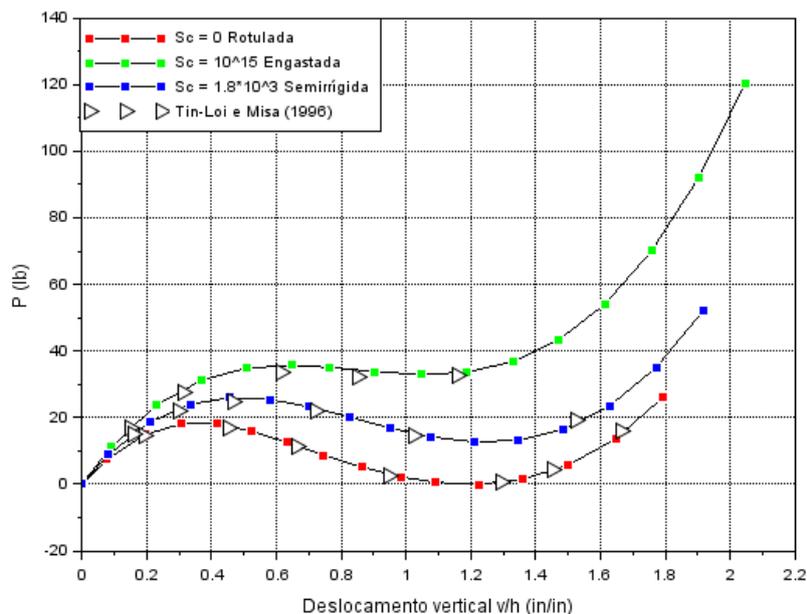
Neste exemplo, a estrutura foi discretizada em 8 elementos de dimensões equivalentes e 2 elementos de mola. Foram implementadas as seguintes propriedades mecânicas aos elementos: rigidez flexional, $EI = 1,885 \times 10^3 \text{ lb}$ ($8,385 \times 10^3 \text{ kN}$); rigidez axial, $EA = 9,274 \times 10^3 \text{ lb}$ ($26,615 \text{ Nm}^2$); e o carregamento aplicado $P = 1,6 \text{ lb}$ ($7,1168 \text{ N}$) e a tolerância imposta foi 10^{-5} . As demais dimensões do comprimento do pórtico, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Pórtico de Williams



Fonte: Souza et al. (2020)

Figura 5.2 - Trajetória de equilíbrio do pórtico de Williams com elemento de conexão



O nó monitorado na estrutura, ou seja, o nó que apresenta os caminhos de equilíbrio é o nó de aplicação da carga (Figura 5.1). Foi implementado o método de solução de Newton-Raphson com a técnica de continuação arco linear, possuindo os seguintes parâmetros:

comprimento de arco inicial, $\Delta l = 0,06$; número máximo de iterações em cada ciclo, $n_{ptotal} = 15$; número de iterações desejadas, $kd = 5,0$; número máximo de iterações no passo de carga, $kmáx = 150$.

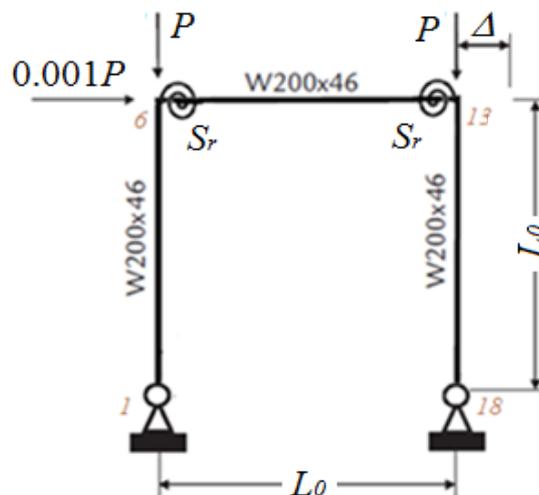
A Figura 5.2 ilustra a trajetória de equilíbrio para as três condições de suporte, e demonstra a influência do efeito da semirrigidez nas condições de contorno, obtendo trajetórias de equilíbrio diferentes para os três tipos de conexão.

Além disso, comparam-se os valores do primeiro ponto limite de carga deste trabalho com aqueles de Tin-Loi e Misa (1996), validando a boa concordância do elemento semirrígido proposto por Del Savio (2004) e implementado nesta dissertação com aqueles da literatura.

5.1.2 Pórtico simples

O pórtico simples ilustrado na Figura 5.3 possui conexão semirrígida (viga-coluna) e comprimento $L_0 = 3,524$ m. Os elementos são constituídos pelo perfil $W 200 \times 46$, cuja seção transversal possui as seguintes propriedades geométricas: área, $A = 5,89 \cdot 10^{-3} m^2$, momento de inércia, $I = 4,55 \cdot 10^{-5} m^4$ e módulo de elasticidade, $E = 200,0 GPa$. A estrutura foi discretizada em 18 elementos de viga (seis elementos para cada coluna e seis elementos para a viga) e dois elementos de conexão entre a viga e as colunas. Esse pórtico é carregado com cargas verticais P no topo da coluna e por uma carga horizontal igual a $0,001 P$, que tem o propósito de desestabilizar o sistema.

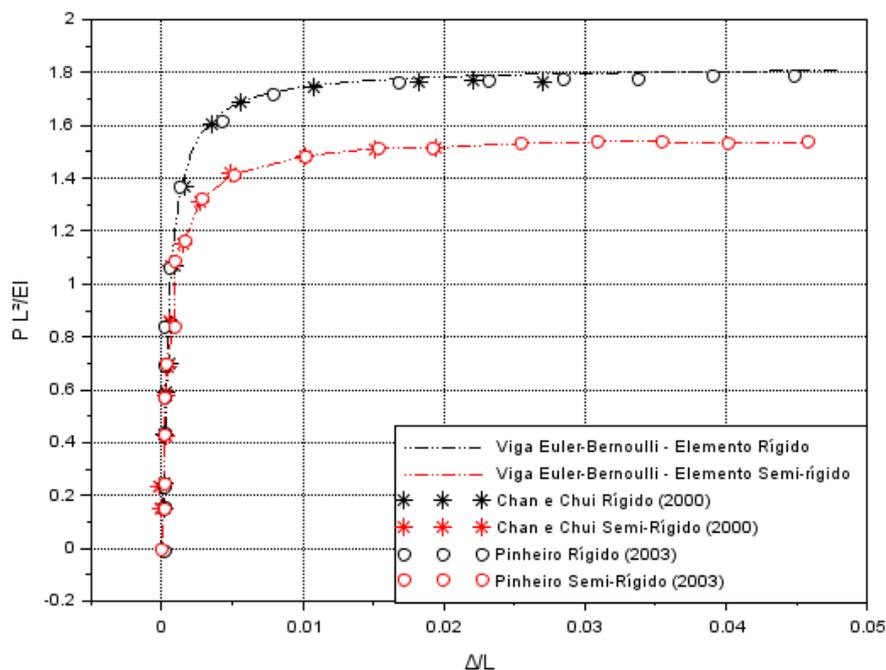
Figura 5.3 - Pórtico simples com elementos de conexão



Fonte: Souza et al. (2020)

Utilizando o método de solução de Newton-Raphson, foram considerados os seguintes parâmetros: comprimento de arco inicial, $\Delta l = 0,06$; número máximo de iterações em cada ciclo, $n_{ptotal} = 25$; número de iterações desejadas, $kd = 5,0$; número máximo de iterações no passo de carga, $kmáx = 150$; incremento de força, $P = 10 \text{ kN}$ e tolerância $tol = 1,0 \times 10^{-5}$. As semirrígidezes utilizadas para descrever o comportamento das conexões foram: $Sr = 10 \frac{EI}{L}$ para as ligações semirrígidas e $Sr = 1 \times 10^{15}$ para as ligações rígidas.

Figura 5.4 - Trajetória de equilíbrio de pórtico simples com elementos de conexão



Pinheiro (2003) e Chan e Chui (2000) realizaram em suas análises não lineares, em regime elástico, a implementação dos dois tipos de ligação, ligação rígida e semirrígida, viga-coluna. Com a intenção de validar as implementações desse exemplo, as trajetórias de equilíbrio do presente trabalho são comparadas com as trajetórias obtidas por Pinheiro (2003) e Chan e Chui (2000), obtendo boa concordância. Além disso, observa-se a influência da semirrígidez no traçado das trajetórias de equilíbrio.

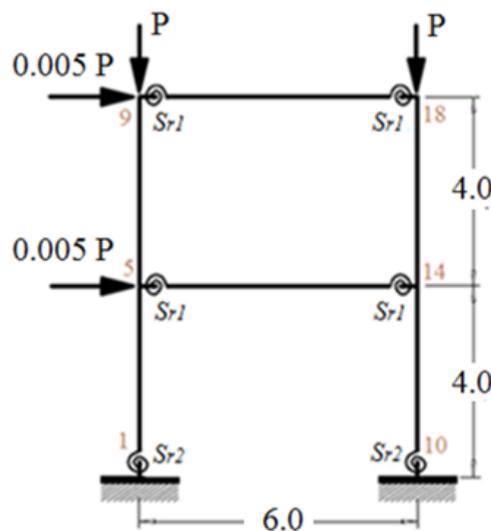
5.1.3 Pórtico de dois pavimentos

O pórtico representado na Figura 5.5 está submetido ao carregamento de três cargas verticais P aplicados nos nós 5, 9 e 18 e duas cargas horizontais iguais a $0,005 P$, que tem o propósito de desestabilizar o sistema, aplicadas nos nós 5 e 9. A estrutura foi discretizada em

28 elementos de viga (quatro elementos para cada coluna e cinco elementos para cada viga) acrescidos de quatro elementos de conexão entre a viga e as colunas.

Os elementos de viga são constituídos pelo perfil $W 360 \times 72$, cuja seção transversal possui as seguintes propriedades geométricas: área, $A = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ e momento de inércia, $I = 2,01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$. Os elementos da coluna são constituídos pelo perfil $W 310 \times 143$, cuja seção transversal possui as seguintes propriedades geométricas: área, $A = 0,0182 \text{ m}^2$ e momento de inércia, $I = 3,48 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$. O módulo de elasticidade de toda estrutura é $E = 210,0 \text{ GPa}$.

Figura 5.5 - Pórtico de dois andares com elementos de conexão



Fonte: Souza et al. (2020)

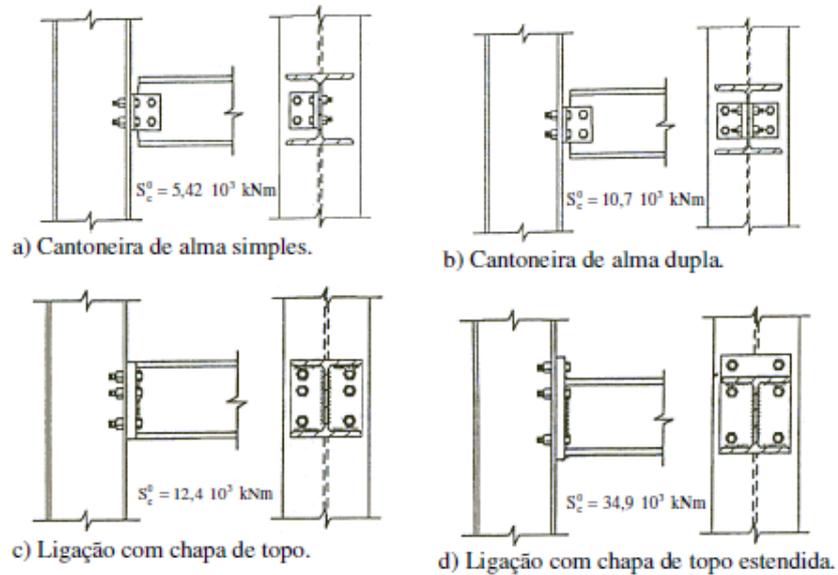
As análises foram realizadas considerando as ligações entre vigas e colunas: idealmente rotulados ($S_{r2} = 0$); perfeitamente rígido ($S_{r1} = 10^{15}$); e semirrígido de acordo com os tipos de conexões ilustradas na Figura 5.6.

Os caminhos de equilíbrio (deslocamento horizontal no nó 9 versus carga P) são apresentados na Figura 5.7. Utilizando o método de solução de Newton-Raphson, foram considerados os seguintes parâmetros: comprimento de arco inicial, $\Delta l = 0,05$; número máximo de iterações em cada ciclo, $n_{ptotal} = 25$; número de iterações desejadas, $kd = 3,0$; número máximo de iterações no passo de carga, $kmáx = 150$; incremento de força $P = 1 \text{ N}$; e tolerância $tol = 1,0 \times 10^{-6}$.

Como pode ser observado, conforme os valores da rigidez rotacional da conexão aumentam, o valor da carga de colapso da estrutura aumenta. Além disso, pode-se observar a

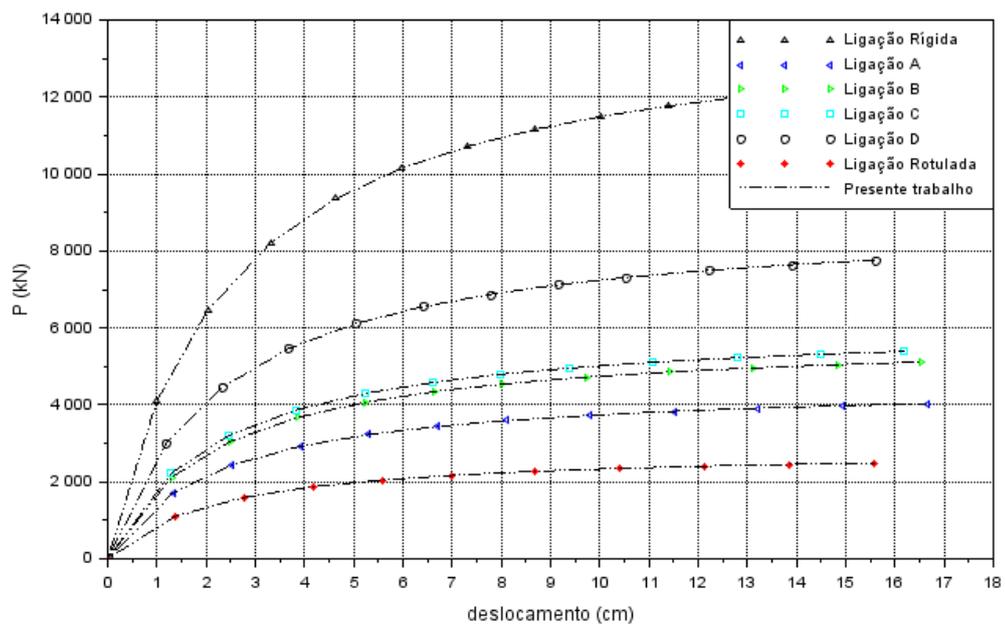
boa concordância das conexões plotadas neste trabalho e as plotadas em Souza et al. (2020), ilustrada na Figura 5.7.

Figura 5.6 - Tipos de ligações viga-pilar adotados



Fonte: LUI; CHEN (1988).

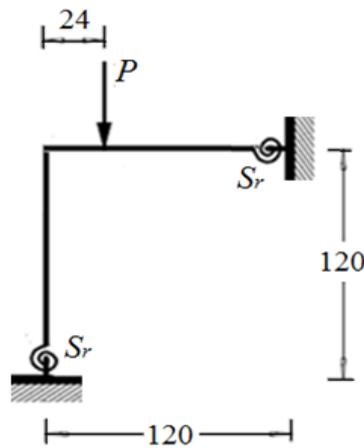
Figura 5.7 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de dois andares com diferentes ligações



5.1.4 Pórtico de Lee

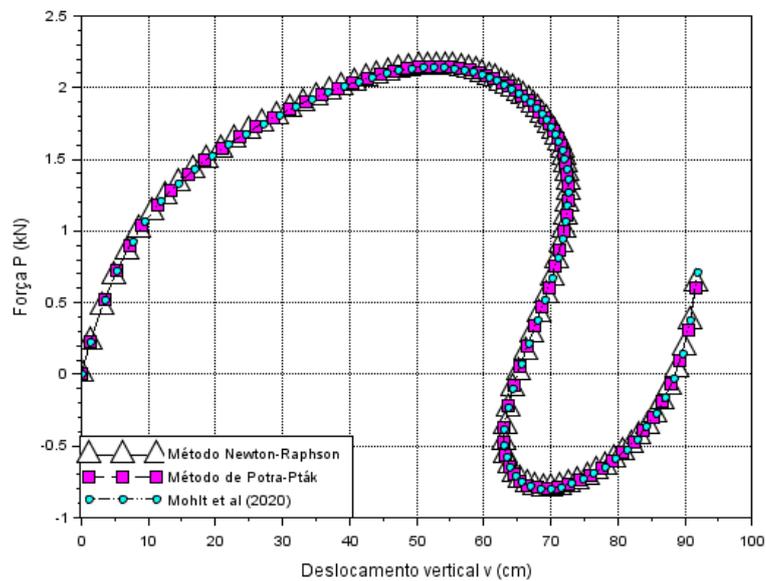
Na Figura 5.8 é ilustrada o pórtico de Lee, um exemplo clássico cujo o comportamento é frequentemente descrito como fortemente não linear. As barras possuem módulo de elasticidade de $720,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$, seção transversal com área $6,0 \text{ cm}^2$ e momento de inércia de $2,0 \text{ cm}^4$. As dimensões do pórtico, assim como o local de aplicação da carga estão representados na figura em cm . A estrutura foi discretizada com 20 elementos de viga e dois elementos de conexão.

Figura 5.8 - Pórtico de Lee com elementos de conexão



Fonte: Souza et al. (2020)

Figura 5.9 - Trajetória de equilíbrio para diferentes métodos de solução



Os parâmetros considerados nas simulações foram: comprimento de arco inicial, $\Delta l = 5,0$; número máximo de iterações em cada ciclo, $n_{ptotal} = 100$; número de iterações desejadas, $kd = 5,0$; número máximo de iterações no passo de carga, $kmáx = 150$; incremento de força $P = 1 \text{ kN}$ e tolerância $tol = 1,0 \times 10^{-6}$. Os caminhos de equilíbrio são determinados considerando as conexões semirrígidas ($Sr = EI/L$).

Na Figura 5.9 são exibidas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical no ponto de aplicação da força P) obtidas com os métodos de Newton-Raphson, Potra-Pták e pelo método Mohit et al. (2020). A partir disso, observa-se a precisão dos três métodos ao ultrapassar os vários pontos limites de força (*snap-throughs*) e de deslocamento (*snap-backs*).

Na Tabela 5.1 são apresentados os resultados numéricos das simulações efetuadas, quanto aos números totais de incrementos de força (Np), iterações acumuladas (kt) até a convergência do método de solução e o tempo de processamento t (em segundos).

Tabela 5.1 - Resultados numéricos do pórtico de Lee

Método de Solução	kt	Np	kt/Np	t (s)
Newton-Raphson	296	98	3,0204	9,3144
Potra-Pták	183	83	2,2048	8,6944
Mohit et al. (2020)	174	82	2,1219	7,8522

Na iteração do método Mohit et al. (2020) e Potra-Pták é utilizada a mesma matriz de rigidez para a resolução dos sistemas de equações lineares; assim, estes sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária. Dessa forma, pode-se obter uma melhor eficiência numérica do código computacional apresentado por meio de algoritmos que armazenam os coeficientes não nulos presentes na matriz e efetuam operações entre matrizes e vetores com estes coeficientes, evitando, dessa maneira, os cálculos redundantes envolvendo elementos nulos.

Isso implica na diminuição da quantidade de vezes em que os sistemas de equações lineares (gerados da discretização por elementos finitos) são solucionados no processo incremental e, ainda, diminuem-se as atualizações da matriz de rigidez K e do vetor de força interna F_{int} durante o ciclo iterativo, justificando, dessa forma, os valores observados na Tabela 5.1.

5.2 MODELO NÃO LINEAR DE LIGAÇÃO

A fim de visualizar a implementação do algoritmo apresentado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, serão abordados nesta seção três exemplos clássicos de problemas encontrados na literatura, sendo uma viga em balanço, um pórtico com dois pavimentos e um pórtico de Lee.

Em virtude dos resultados fornecidos pelo presente trabalho, através da validação numérica do modelo linear da ligação, a estratégia de solução não-linear utilizada foi baseada no método de solução de Potra-Pták (1984), também conhecido como método de dois passos com convergência cúbica, e com Comprimento de Arco Linear.

Além da interferência da semirrigidez na resposta global, isto é, nos deslocamentos da estrutura, as estruturas sob análises serão simuladas por intermédio do modelo não linear de ligação baseado na Mecânica do Dano.

Para isso, a variável dano é calculada em função de três parâmetros: rigidez rotacional inicial, deformação rotacional e módulo de dano. Através desses parâmetros é possível plotar a trajetória de equilíbrio do modelo não-linear e observar a redução progressiva da rigidez rotacional.

5.2.1 Viga em balanço

Considerando a viga em balanço, representada na Figura 5.10-a, submetida a uma força concentrada P na extremidade livre, a mesma apresenta várias condições indeformadas. Na Figura 5.11 são apresentadas a configuração indeformada ($NP = 0$) e as configurações deformadas ($NP = 5, 20, 40$ e 53) da viga. Com comprimento inicial $L_0 = 3,2 \text{ m}$ a malha de elementos finitos foi discretizada em quatro elementos de viga e um elemento de ligação, sendo este implementado para representar o comportamento semirrígido do apoio.

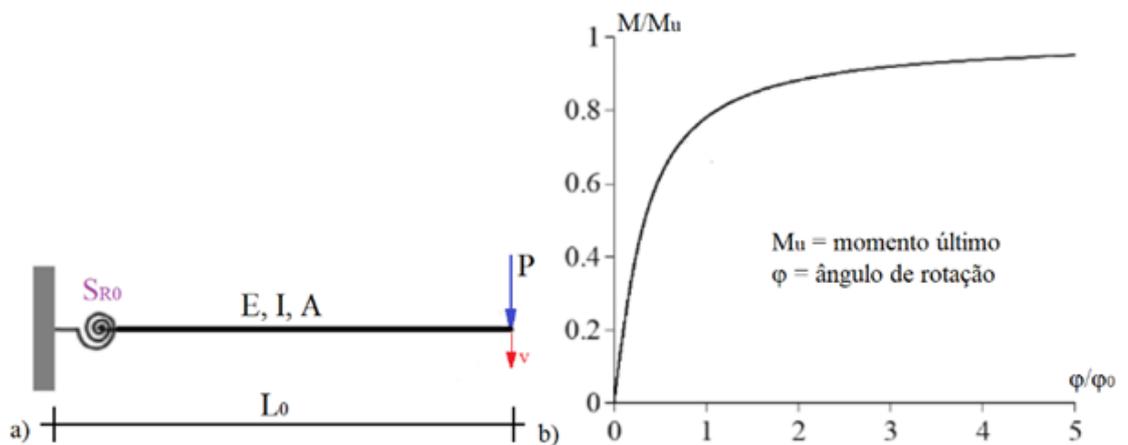
Consideram-se para o elemento de viga as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E = 205 \text{ GPa}$, área $A = 0,01 \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 0,0001/12 \text{ m}^4$. Para as implementações são utilizados os seguintes parâmetros do método de solução de Potra-Pták: $\Delta l = 0,1$; $kd = 5$; $kmáx = 150$; $tol = 1,0 \times 10^{-6}$; e $\Delta P = 1,0 \text{ N}$.

Como pode ser observada na Figura 5.12, comparando as curvas obtidas com o programa desenvolvido com os pontos de equilíbrio obtidos por Van Hai et al. (2019), demonstram boa concordância, quando simulada a não linearidade geométrica (NGL) com

apoio rígido ($S_{r0} = 1,0 \times 10^{15}$) e modelo de ligação linear e quando implementada com apoio semirrígido ($S_{r0} = EI/L0$) e modelo não linear de dano. Além disso, é implementada a condição Linear (hipótese de deformações infinitesimais) com apoio semirrígido ($S_{r0} = EI/L0$). Na análise com o modelo de ligação de dano foi considerado o regime elastodegradável com endurecimento positivo com parâmetros $M_0 = 3,2 \cdot 10^5$ N.m e $H = 0,45$.

A curva momento versus rotação utilizada por esses autores aparece na Figura 5.10-b, e a partir dessas informações são realizadas as análises.

Figura 5.10 - a) Modelo estrutural da viga em balanço e b) curva momento versus rotação



Fonte: Van Hai et al. (2019)

Figura 5.11 - Viga em balanço - configuração indeformada (NP = 0) e as configurações deformadas (NP = 5, 20, 40 e 53)

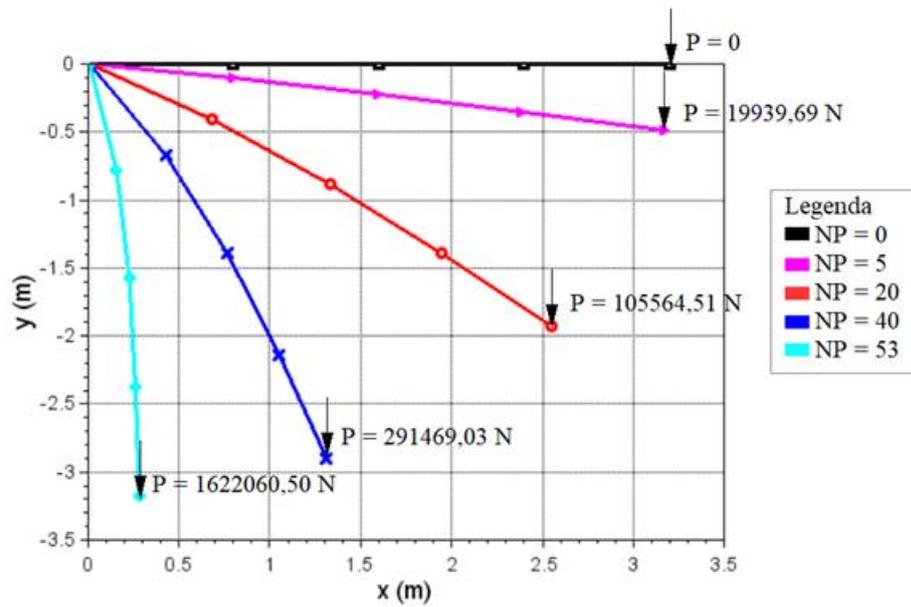
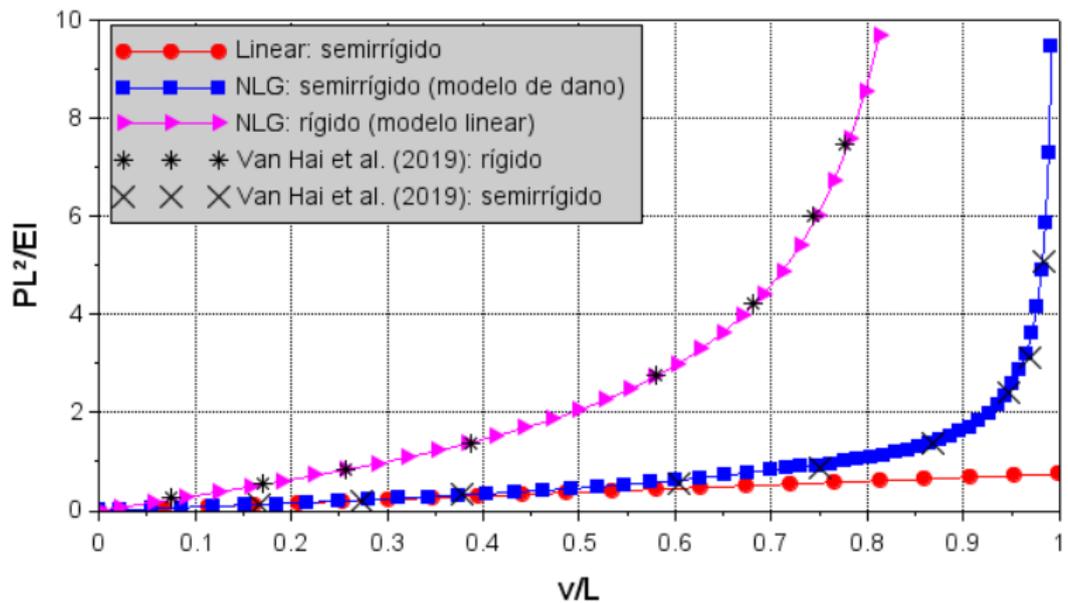


Figura 5.12 - Viga em balanço – trajetórias de equilíbrio



A partir do exposto, pode-se observar a influência do tipo de ligação (totalmente rígida ou semirrígida) nas trajetórias de equilíbrio da viga em balanço na Figura 5.12, alterando completamente o comportamento mecânico da mesma. No caso das simulações com a conexão semirrígida, para os primeiros estágios de carregamento as trajetórias ficam próximas para ambas as análises, linear e não linear geométrica. Porém, quando as deformações aumentam na viga, evidencia-se o efeito de segunda ordem na viga, necessitando, dessa forma, da

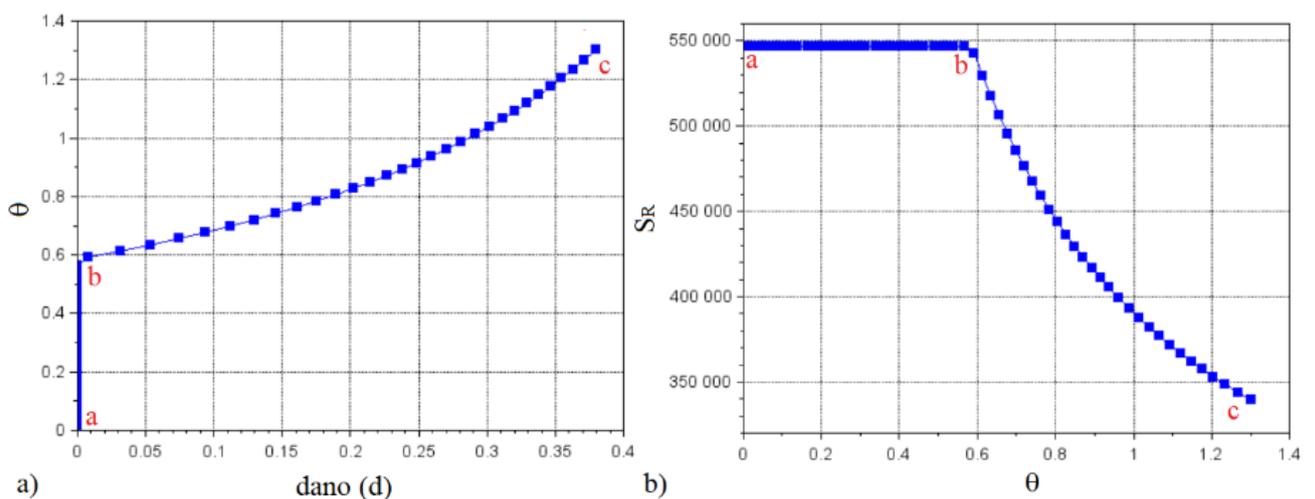
implementação de uma formulação que leva em consideração a não linearidade geométrica da estrutura.

Na Figura 5.13-a é demonstrada a curva dano (d) versus rotação θ e na Figura 5.13-b, a curva rotação θ versus rigidez rotacional (S_r).

Na Figura 5.13-a, a trajetória “a-b” permanece constante, linear e sem danificação, isto é, não houve uma rotação suficiente para danificar a ligação, que só ocorre próximo de $\theta = 0,6$. Se a função de dano $f(\bar{M}) > 0$ ocorre a variação da variável do limite de dano r , a qual assume o valor da norma do momento efetivo τ , Equação (4.6). Como τ depende da rotação θ , o dano, Equação (4.7), passa a variar com o valor da rotação, como pode ser observado na Figura 5.10-b.

Já sobre a Figura 5.13-b, observa-se no segmento “a-b” na curva a rigidez rotacional S_r é igual a rigidez rotacional inicial S_{r0} , ou seja, não há evolução do dano ($\dot{d} = 0$). Nesse caso, a conexão está íntegra ($d = 0$). A partir do ponto “b”, a ligação entra no regime elastodegradável possuindo $d \neq 0$ e $d > 0$ e a rigidez rotacional S_r diminui em relação a S_{r0} , sendo o fator da redução da rigidez igual a $(1 - d)$. No ponto “c”, em que a análise é interrompida, $d = 0,379$, $S_r = 339,355 \text{ kN m}$ e $\theta = 1,301 \text{ rad}$.

Figura 5.13 - Viga em balanço - a) Curva dano d versus rotação θ e b) Curva θ versus rigidez rotacional S_R .

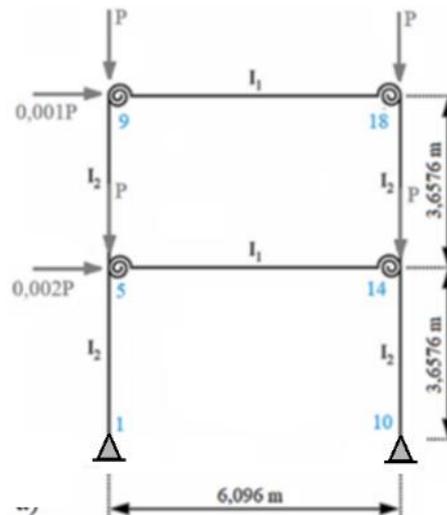


5.2.2 Pórtico de dois pavimentos

Considere um pórtico com dois pavimentos com apoios rotulados analisado por Pinheiro e Silveira (2005), Chen e Lui (1988) e Reis e Coda (2014) conforme é apresentado na Figura 5.14.

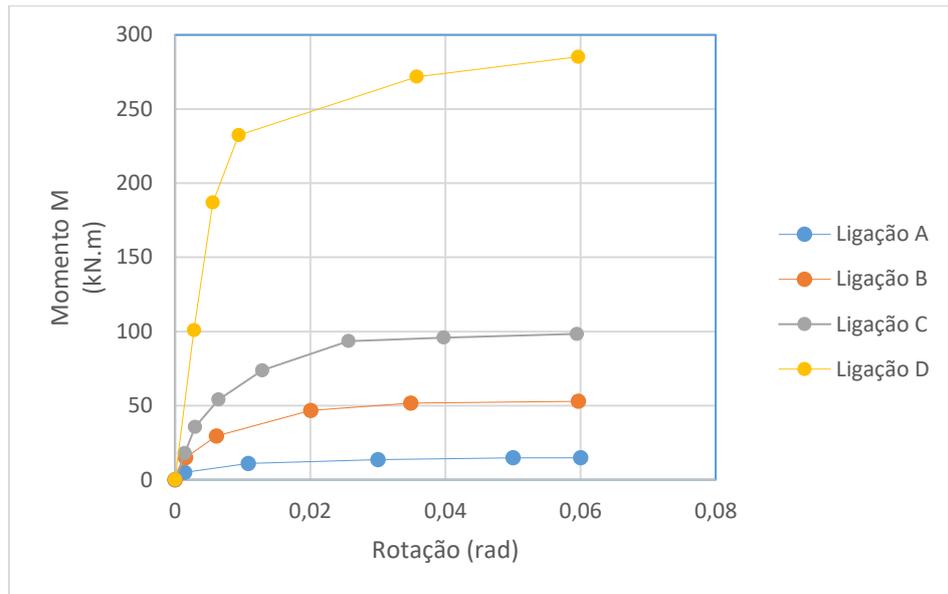
A malha de elementos finitos utilizada consiste de 28 elementos de viga-coluna e quatro elementos de ligação (inseridos na interseção entre as colunas e as vigas). As vigas possuem seção transversal com momento de inércia $I_1 = 2,01 \times 10^4 \text{ cm}^4$ e área $A_1 = 91 \text{ cm}^2$. Já as colunas possuem momento de inércia de $I_2 = 3,48 \times 10^4 \text{ cm}^4$ e área com $A_2 = 182 \text{ cm}^2$. As forças concentradas são aplicadas nos nós indicados do pórtico. O módulo de elasticidade longitudinal é $E = 2,05 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$. As curvas rotação *versus* momento, que descrevem o comportamento das ligações semirrígidas, são apresentadas na Figura 5.16. Para as simulações são utilizados os seguintes parâmetros para o método de solução de Potra-Pták: $\Delta l = 0,9$; $kd = 5$; $kmáx = 150$; $tol = 1,0 \times 10^{-7}$; e $\Delta P = 1,0 \text{ kN}$. O modelo prediz a resposta não linear das conexões semirrígidas a partir da curva momento-rotação ($M - \theta$) da ligação conforme a Figura 5.15.

Figura 5.14 - Pórtico com dois andares - esquema estrutural



Fonte: Pinheiro e Silveira (2005)

Figura 5.15 - curvas momento versus rotação



Fonte: Adaptado de Pinheiro e Silveira (2003)

Na análise não linear geométrica são considerados cinco tipos de ligação viga-colunas: rígida, ligação A, ligação B, ligação C e ligação D. Na Tabela 5.2 são apresentados os parâmetros necessários para traçar as trajetórias das conexões com modelo não linear. Na Figura 5.16 são plotadas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal no nó 9 *versus* força P) e podem ser constatadas as diferenças nas trajetórias quando se considera na análise diferentes tipos de ligação. Na mesma figura, nota-se que à medida que aumenta a rigidez S_r das ligações entre as vigas e as colunas, a estrutura torna-se menos flexível (diminuem as deformações na mesma) e, conseqüentemente, a carga de colapso também aumenta. A partir dos resultados numéricos, pode-se observar uma boa concordância entre as trajetórias de equilíbrio obtidas aqui e aquelas encontradas Pinheiro e Silveira (2003).

Tabela 5.2 -Parâmetros para o cálculo da variável dano

Tipo de conexão	S_{RO} (kN m/rad)	M_0 (kN.m)	H
A	$6,0000 \times 10^5$	2,50	0,1
B	$11,0000 \times 10^5$	15,00	0,5
C	$1,2148 \times 10^4$	20,217	2,5
D	$3,8797 \times 10^4$	100,430	10

Considerando a análise com a ligação semirrígida do tipo A (Figura 5.17), B (Figura 5.18) e C (Figura 5.19), somente as ligações nos nós 9 e 14 danificam, no entanto, para a ligação

semirrígida do tipo D (Figura 5.19), nas ligações localizadas nos nós 5, 9 e 14 da malha de elementos finitos ocorre a danificação durante a análise, conforme a evolução do dano em função da rotação nas ligações; contudo, a ligação no nó 18 permanece íntegra ao longo de toda a simulação, não ocorrendo a perda de rigidez.

Figura 5.16 - Pórtico com dois andares – trajetórias de equilíbrio.

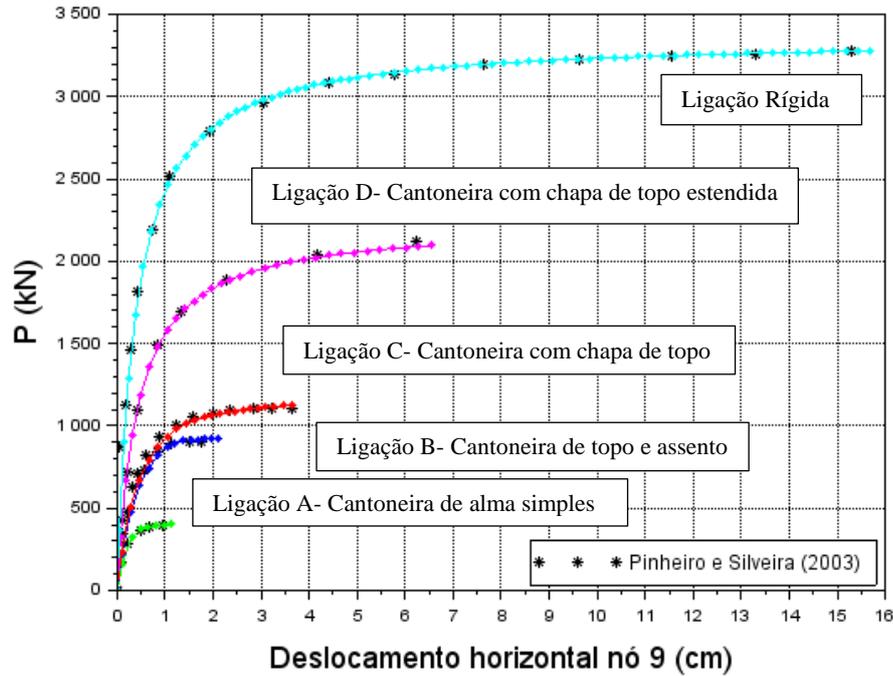


Figura 5.17 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação A

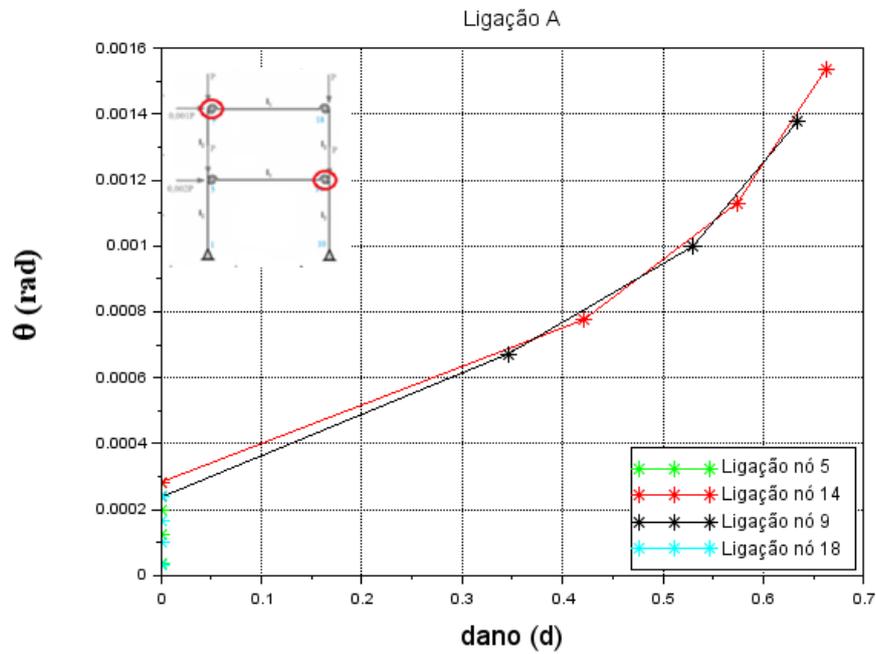


Figura 5.18 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação B

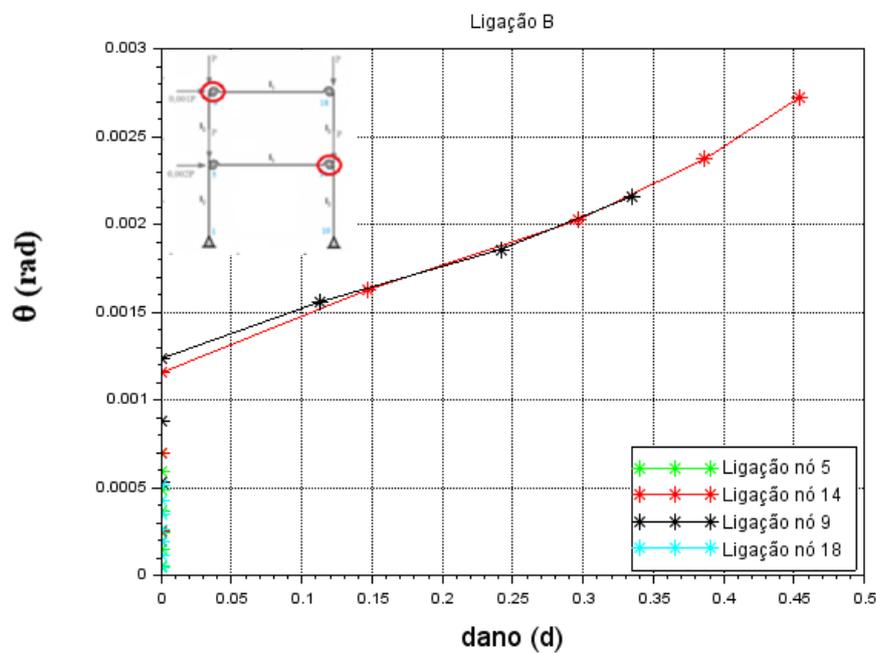


Figura 5.19 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação C

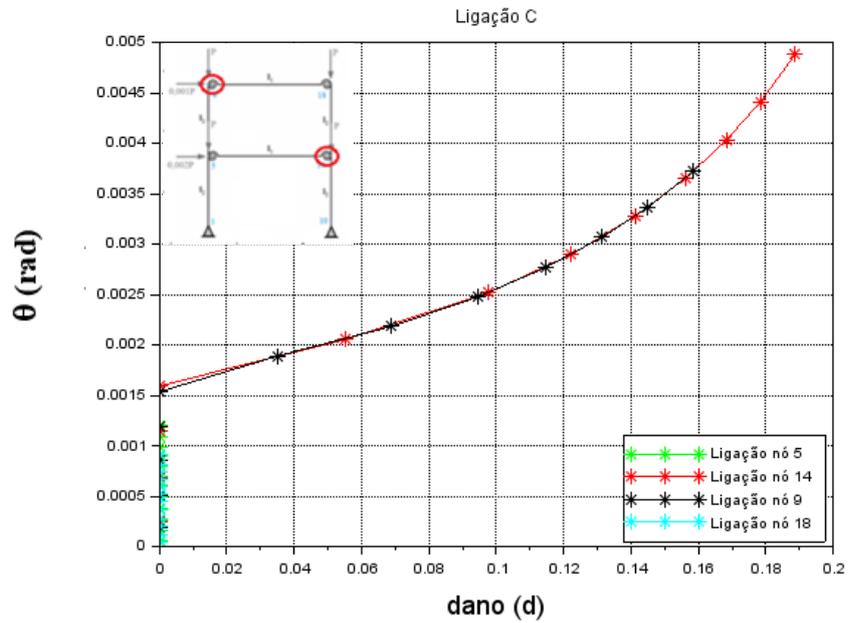
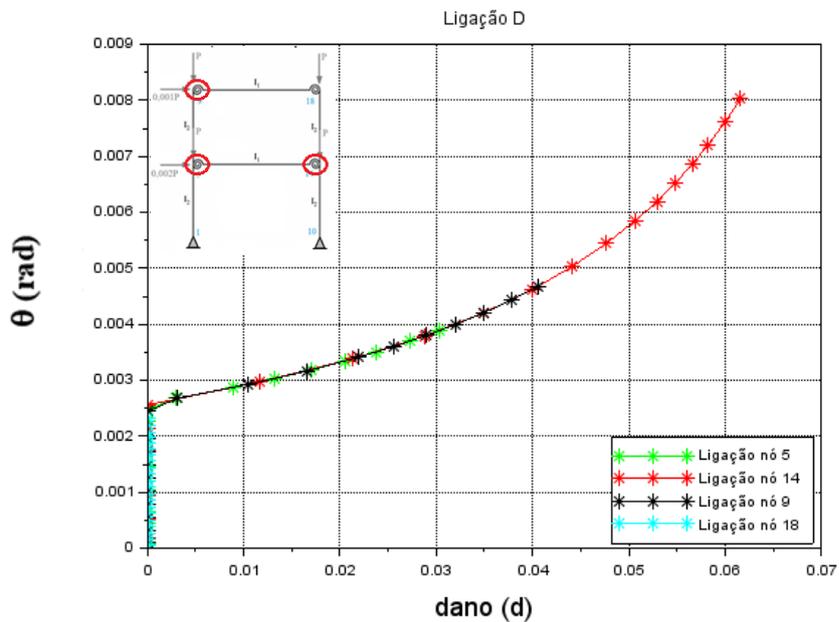


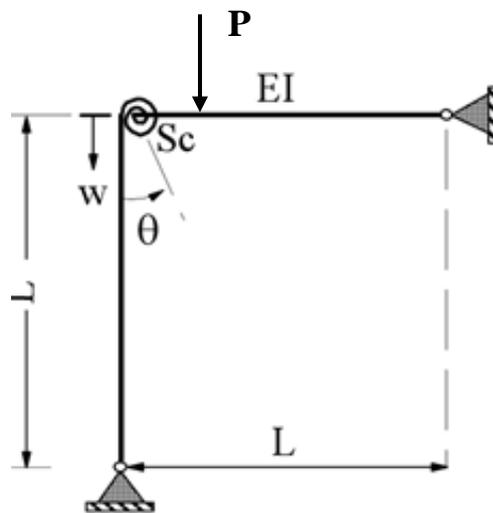
Figura 5.20 - Pórtico com dois andares – curvas dano versus rotação para a ligação D



5.2.3 Pórtico de Lee

Na Figura 5.21 é apresentada o pórtico de Lee, um exemplo clássico cujo o comportamento é frequentemente descrito como fortemente não linear. As barras têm módulo de elasticidade de $720,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$, seção transversal com área de $6,0 \text{ cm}^2$ e momento de inércia de $2,0 \text{ cm}^4$. As dimensões do pórtico, como o local de aplicação da carga estão representados na figura, sendo $L=120 \text{ cm}$ e a carga distanciada de 24 cm da conexão semirrígida. A estrutura foi discretizada em 21 elementos de viga e um elemento de conexão viga-pilar.

Figura 5.21 - Pórtico de Lee com conexão semirrígida viga-pilar



Fonte: Adaptado de Galvão (2004)

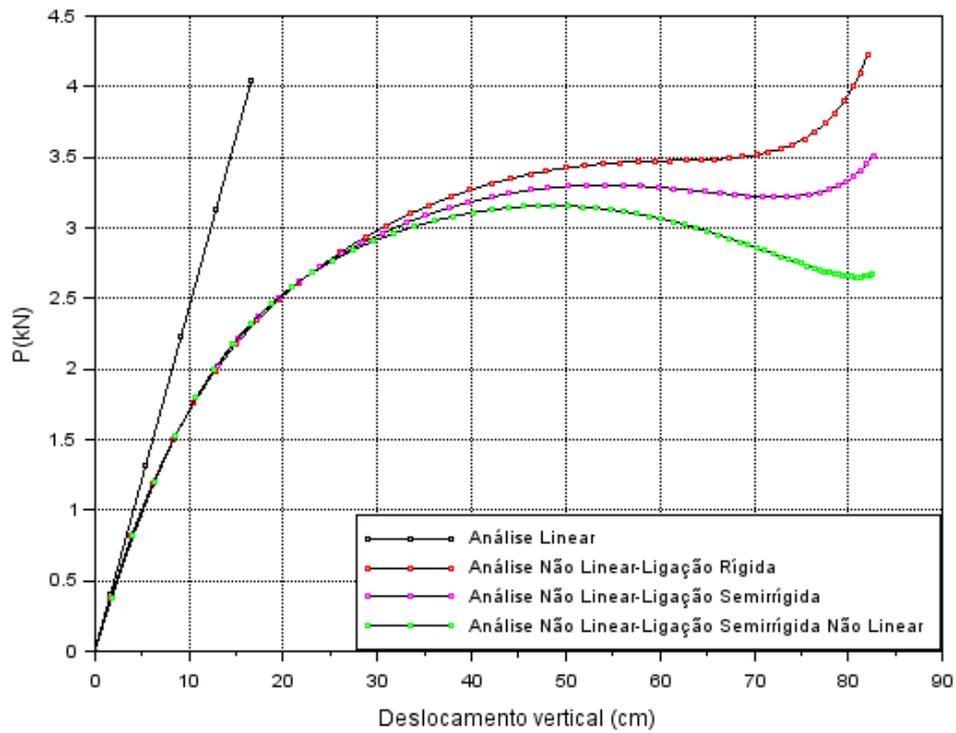
Primeiramente, são avaliados os resultados obtidos ao realizar uma análise linear geométrica. Em seguida, são obtidos os resultados através de soluções não-lineares geométricas para ligações rígidas e semirrígidas lineares.

Por fim, são realizadas as análises não-lineares geométrica com ligação semirrígida não-linear, como pode ser observado na Figura 5.22. Para representar o comportamento não linear da ligação semirrígida, assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento $H=0,00$ e $M_0=50 \text{ kN.cm}$. Ao considerar $H=0,00$, admite-se que a ligação semirrígida tem um regime elastodegradável perfeito.

Considerando a Figura 5.22, observa-se que a trajetória linear só é válida para pequenas deformações, e posteriormente faz-se necessário a análise não linear geométrica. Verifica-se, também, a discrepância e a influência da conexão semirrígida no traçado das trajetórias de equilíbrio.

Além do mais, fica explícito através da modificação da trajetória de equilíbrio da ligação semirrígida a eficiência do modelo de dano proposto no presente trabalho e retratado através da Equação (4.7), com $d > 0$, isto é, através da Figura 5.22 valida-se a implementação da não linearidade da ligação semirrígida.

Figura 5.22 – Trajetórias de equilíbrio do Pórtico de Lee



6 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados das análises realizadas nos exemplos simulados no capítulo 5, apresentando diferentes geometrias e condições de carregamento, foram comparados com as soluções numéricas disponíveis na literatura. Com a finalidade de validar as implementações do capítulo 3 e avaliar a eficiência computacional dessas formulações, algumas conclusões e comentários gerais se fazem necessário:

1. As formulações geométricas baseadas na formulação corrotacional de elementos finitos, fundamentado na teoria de viga de Euler-Bernoulli fornecidas por Crisfield (1991) e Yaw (2009), foram implementadas com sucesso na metodologia de solução de sistemas de equações não-lineares. O bom resultado da aplicabilidade das formulações pode ser observado através dos exemplos ilustrados dos pórticos na seção 5.1. Através da implementação do algoritmo de ligação apresentado por Del Savio (2004) foi possível modificar as condições de flexibilidade, isto é, manipular a constante elástica do sistema estrutural e obter as trajetórias de equilíbrio nas condições: flexíveis, semirrígidas e rígidas. As trajetórias de equilíbrio alcançadas no presente trabalho para as condições rotulada, rígida/engastada e na condição semirrígida possuem compatibilidade com aquelas apresentadas por Tin-Loi e Misa (1996) no Pórtico de Williams, por Chan e Chui (2000) e Pinheiro e Silveira (2003) no pórtico simples, e por Souza et al. (2020) no pórtico de dois pavimentos. Concluindo, dessa forma, a eficiência na implementação das formulações apresentadas no Capítulo 3;
2. A respeito do elemento de conexão com comprimento nulo proposto por Del Savio (2004), constata-se ser eficaz e de fácil implementação. O elemento é independente e inserido nos pontos de interseção entre os membros estruturais viga-pilar ou viga-coluna e possibilita a consideração dos efeitos das forças axiais e cisalhantes na deformação da ligação, além do momento fletor. Porém, os efeitos das rigidezes estão desacoplados. Manipulando os valores da constante elástica observou-se que o elemento de ligação pode ser aplicado para diferentes tipos de conexão;
3. A flexibilização das conexões estudadas na presente dissertação afetou a resposta e a trajetória de equilíbrio da estrutura, conforme observada nos exemplos de validação numérica. Portanto, conclui-se que as conexões semirrígidas reduzem a rigidez

estrutural e precisam ser consideradas para reproduzir de maneira mais fidedigna possível o real comportamento das conexões;

4. A respeito das trajetórias de equilíbrio do pórtico de dois pavimentos com diferentes tipos de ligações, pode-se inferir que, conforme os valores da rigidez rotacional aumentam, o valor da carga de colapso também aumenta. Dessa forma, constata-se a forte influência da rigidez da conexão no comportamento não linear na estabilidade dos sistemas estruturais. Conclui-se, dessa forma, que na análise global de uma estrutura, os diferentes tipos de ligações influenciam não apenas nos deslocamentos, mas também na distribuição e na magnitude dos esforços internos de toda a estrutura;
5. No exemplo do Pórtico de Lee, os resultados numéricos evidenciam o melhor desempenho, respectivamente, do método do algoritmo de Mohit et al. (2020), e do método Potra-Pták (1984), em comparação às análises feitas com os esquemas iterativos de Newton-Raphson, quanto ao tempo de processamento e números totais de passos de força e iterações acumuladas até a convergência para a solução. Validando, dessa forma, os métodos de solução de equações não lineares e a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear apresentada por Riks (1972), técnica responsável pelo alcance das trajetórias de equilíbrio com pontos limites de força e/ou deslocamento. Além disso, observou-se que a estratégia de solução não linear adquire maior importância à medida que a trajetória de equilíbrio torna-se mais fortemente não linear, principalmente para estruturas que apresentam caminhos de equilíbrio complexos com múltiplos pontos limites de forças e deslocamentos;
6. A respeito da metodologia implementada com o programa *Scilab*, observa-se uma convergência satisfatória entre os resultados aqui obtidos, o que permite afirmar que as formulações foram implementadas corretamente e as metodologias de solução adotadas são eficientes e podem ser usadas para avaliar a instabilidade das estruturas.

A partir das formulações e o algoritmo (sub-rotina) apresentados no capítulo 4, um modelo numérico-computacional não linear baseado na Mecânica do Dano Contínuo para simular o comportamento mecânico de ligações semirrígidas foi implementado. Levando em conta a seção 5.2 algumas considerações gerais podem ser feitas:

1. O comportamento real de uma ligação pode ser incorporado dentro da análise global da estrutura usando a curva rotação - momento ($M - \theta$). Logo, através da determinação das

- propriedades mecânicas da conexão em termos de sua rigidez rotacional, momento resistente e capacidade rotacional, partindo de suas propriedades geométricas e mecânicas é possível alcançar um modelo de ligação não linear;
2. Na viga em balanço foram realizadas as seguintes análises: linear com ligação rígida, não linear com ligação rígida linear e análise não linear com ligação semirrígida não linear. Conforme já observado, é notória a influência da natureza da ligação nas trajetórias de equilíbrio, modificando completamente o comportamento mecânico da mesma. Além disso, pode-se afirmar que, para as pequenas deformações, isto é, para os primeiros estágios de carregamento, não há distinção entre as análises não lineares e linear. No entanto, quando as deformações aumentam é imprescindível a consideração da análise não linear geométrica;
 3. A partir da curva momento-rotação ($M - \theta$) da ligação da viga em balanço, o modelo conseguiu prever a resposta não linear da conexão semirrígida. Para descrever o comportamento constitutivo foram necessários três parâmetros: a rigidez rotacional inicial, o módulo H e o momento de proporcionalidade do momento inicial. A partir dos resultados numéricos, verificou-se boa concordância entre as respostas obtidas aqui e aquelas encontradas por Van Hal et al (2019);
 4. Além das trajetórias de equilíbrio, o êxito do modelo não linear de ligação pode ser averiguado através dos gráficos dano *versus* rotação e teta *versus* rigidez rotacional. Nota-se que nas regiões dos segmentos entre a-b não ocorre danificação da ligação, sendo representado por um segmento linear. A partir do ponto b até c observa-se a incidência do modelo da não linearidade da ligação, agindo de maneira a aumentar a danificação em conformidade com o aumento da rotação e ao mesmo tempo diminuir a rigidez rotacional;
 5. A respeito do pórtico de dois pavimentos, e através da curva rotação *versus* momento, foi possível determinar a rigidez rotacional das ligações A até D, que são respectivamente as ligações: Cantoneira de alma simples, cantoneira de topo e assento, cantoneira com chapa de topo a cantoneira com chapa de topo estendida, além disso, foi implementada a ligação na condição rígida. Todas as trajetórias apresentadas na Figura 5.16 concordam com as apresentadas por Pinheiro e Silveira (2003), confirmando a validade do modelo não linear de ligação proposto no presente trabalho. Ainda, é possível observar as degradações de cada nó em cada tipo de ligação. As ligações A, B

e C apenas dois nós degradaram, a saber nó 9 e 14. Enquanto, na ligação D, foram três regiões danificadas, sendo elas os nós 5, 9 e 14.

6. Por último, o pórtico de Lee finalizou a sequência de exemplos a respeito do modelo não linear da ligação semirrígida com êxito. Uma vez que é notória a danificação da ligação a partir de um determinado ponto. Concluindo, dessa forma, a efetividade do algoritmo proposto e implementado no presente trabalho.
7. Por fim, pode-se pontuar que o modelo de ligação por ser de simples implementação computacional pode ser adaptado em pacotes de programas de projeto estrutural.

Visando a continuidade deste trabalho, como proposta para implementações futuras, sugerem-se:

1. A consideração da não linearidade física nos materiais que constituem as vigas e os pilares/colunas;
2. A adaptação da matriz de rigidez do elemento de ligação considerando os efeitos das rigidezes de maneira acoplada;
3. A implementação de uma interface gráfica de maneira a facilitar a manipulação do software.

REFERÊNCIAS

AISC/ASD. **Manual of steel construction—allowable stress design**. American Institute of Steel Construction (AISC), Chicago. 1978.

AVAKIAN, A C, **Estruturas aporticadas mistas aço-concreto: avaliação de metodologias de análise**, Rio de Janeiro, 2007.

ALVARENGA, A.R. e SILVEIRA, R.A.M. Considerations on Advanced Analysis of Steel Portal Frames. **XXVI Ibero-Latin American Congress of Computational Methods in Engineering (XXVI CILAMCE)**, Guarapari/ES/Brazil, 2005.

ALVARENGA, A.R, Plastic-zone advanced analysis-Formulation including semi-rigid connection, **Engineering Structures**, vol. 212, Article ID 110435, 2020.

ALVES, R.V. Formulação para Análise Não linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado. **3o Seminário de Doutorado**, COPPE/UFRJ. 1993.

BAHAZ, A.; AMARA, S.; JASPART, J.; DEMONCEAU, J. Analysis of the behaviour of semi rigid steel end plate connections. 2018.

BATHE, K.; DVORKIN, E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. **Computers & Structures**, 1983.

CHAN S.L.; CHUI P.P.T. - Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections. 2000.

CHEN W.F. e LUI, E.M., **Stability Design Of Steel Frames**, Boca Raton Ann Arbor Boston London. 1991.

COLE, G. **Consistent co-rotational formulation for geometrically nonlinear beam elements with special reference to large rotations**. Tese (Doutorado) — School of Civil Engineering –Kingston Polytechnic, UK, 1990.

CRISFIELD, M. A. **A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements**. Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, 1990.

CRISFIELD, M.A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**, John Wiley & Sons, Vol 2. 1997.

CUNHA, A. A. **Análise não linear de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional e elementos de viga unificados Bernoulli-Timoshenko**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil. 2015.

CUNHA, J. P. F. B. **Análise estática e dinâmica de pórticos planos com o uso da formulação corrotacional**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO. 2018.

DEL SAVIO, A. A. **Modelagem computacional de estruturas de aço com ligações semi-rígidas**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.

DEL SAVIO, A. A., ANDRADE, S. A. L., MARTHA, L. F., e SILVA VELLASCO, P. C. G. Um sistema não linear para análise de pórticos planos semirrígidos. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, vol. 2, no. 1, pp. 97–125, 2005.

FERREIRA, G. V. **Previsão de Vida em Fadiga Baseada na Mecânica do Dano Contínuo**. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 94p. 2020

FREITAS, A; **Modelagem da evolução do dano ortotrópico acoplado à elastoplasticidade em metais**. Dissertação –Florianópolis, SC, 2010.

GALVÃO, A. S. **Formulações Não lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP. 2000.

GALVÃO, A. S. **Instabilidade Estática E Dinâmica De Pórticos Planos Com Ligações Semi-Rígidas**. Tese de Doutorado. PUC-Rio. 2004.

GALVÃO, A. S.; SILVEIRA, R. A. M.; GONÇALVES, P. B. Resposta transiente não linear de pórticos e arcos com ligações semi-rígidas. In: **XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering–CILAMCE**. 2005.

IHADDOUDÈNE, A.; JASPART, J. P. Joint flexibility effects on the behavior of steel plane frames. 2015.

JASPART, J.; CORMAN, A.; DEMONCEAU, J. Ductility assessment of structural steel and composite joints. 2019.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L.; Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement. **Journal de Mécanique Appliquée**, 1978.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L.; **Mécanique Des Matériaux Solides, Dunod, Paris, Mechanics of solid materials**, Berlin: Springer Verlag, 1985.

LEMAITRE, J.; DESMORAT, R., **Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures**, Springer Science & Business Media, 2005.

LUI, E.M. e CHEN, W.F. Analysis and Behavior of Flexible-Jointed Frames, **Eng.Struct.** v. 8, p. 1007-118. 1986.

LUI, E.M. e CHEN, W.F. Behavior of Braced and Unbraced Semi-rigid Frames, **Int. J.Solids Structures**, v. 24(9), p. 893-913. 1988.

MACHADO, F.C.S. **Análise Inelástica de Segunda ordem de Sistemas Estruturais Metálicos**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP. 2005.

MATIAS, B. S. Modelos constitutivos para análise dinâmica não linear de pórticos planos de concreto armado. 2018.

MAXIMIANO, D. P. **Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. 2012.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas.** Tese (Doutorado), Universidade de Brasília, 2006.

MENIN, R. C. G.; TAYLOR, W. Resposta pós-crítica de pórticos planos discretizados com elementos de viga de euler-bernoulli utilizando uma formulação co-rotacional. **In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/Cilamce.** 2003.

MELO, C. D. R. **Estudo do colapso progressivo de pórticos planos de concreto armado via análise não linear.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

MOHIT, M.; SHARIFI, Y.; TAVAKOLI, A. Geometrically nonlinear analysis of space trusses using new iterative techniques. **Asian Journal of Civil Engineering**, 2020.

NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1991.

PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. **Beam elements in instability problems.** **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, 1997.

PINHEIRO, L. **Análises Não lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semirrígidos,** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP. 2003.

PINHEIRO, L.; SILVEIRA, R. A. M. Computational procedures for nonlinear analysis of frames with semi-rigid connections. **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 2, no. 4, pp. 339–367, 2005.

POTRA, F. A.; PTÁK, V. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. **Research Notes in Mathematics**, 103, 1984.

RANKIN, C. C.; BROGAN F. A. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. Em: **ASME J. Pressure Vessel Technology** 108, pp. 165–174. 1986.

RANKIN, C. C.; NOUR-OMID B. The use of projectors to improve finite element performance. Em: **Computers & Structures** 30, pp. 257–267. 1988.

REIS, M. C. J. **Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 2012.

REZAIEE-PAJAND, M., SARAFRAZI, S. R. & REZAIEE, H. Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures. **Computers and Structures**, 112-113: 295–310, 2012.

REZAIEE-PAJAND, M., NASERIAN, R. Using residual areas for geometrically nonlinear structural analysis. *Ocean Engineering*, 105, 327–335. 2015.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, v. 39, n. 4, p. 1060–1066, 1972.

ROCHA, G. **Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia, Universidade Federal de Ouro Preto. 2000.

ROCHA, P. A. S. **Análise inelástica de segunda ordem de estruturas metálicas com ligações semi-rígidas**, Ouro Preto, 2006.

RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, 2011.

SANTOS, M. N.; ROCHA, P. A. S.; SILVA, A. R. D. D.; SILVEIRA, R. A. D. M. Application of a nonlinear hybrid finite element in the structural steel modeling. **Rem: Revista Escola de Minas**, 2012.

SCILAB version 6.1.0. ESI Group, 2020.

SILVA, A. R. D. d. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. 2009.

SILVA, J. L., et al. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. In: **Proceedings of the XXXVII iberian latin-american congress on computational methods in engineering**, Brasília. 2016.

SILVA, R. G. L. **Análise inelástica avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semirrígidas**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia da UFMG. 2010.

SILVA, S. S. da. **Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação corrotacional e plasticidade por camadas**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil. 2011.

SILVEIRA, R.A.M. **Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil. 1995.

SIMO, J. C.; HUGHES T. J. R. **Computacional Inelasticity**. Springer- Verlag, New York, 2000.

SOUZA, L. A. F; VANALLI, L; LUZ, A. B. Numerical-Computational Model for Nonlinear Analysis of Frames with Semirigid Connection, **Mathematical Problems in Engineering** - vol. 2020, Article ID 3613892, 11 pages, 2020.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I., ALIANO FILHO. A.; MACHADO R. D. **Trusses nonlinear problems solution with numerical methods of cubic convergence order**. São Carlos, vol. 19, no. 1, pp. 161–179, 2018.

SOUZA, L. A. F. Método numérico para a solução não linear de pórtico plano com convergência de quarta ordem, **Congresso Técnico Científico de Engenharia e da Agronomia - CONTECC 2017**, Belém-Pa, 2017.

SOUZA, L. A. F. Modelagem por elementos finitos de pórticos considerando as não linearidades física e geométrica. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, Londrina, v. 38, n. 1, p. 77-90, 2017.

SOUZA, E. A. **Métodos Iterativos para Problemas Não Lineares**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2015.

TUSNINA, V. M. Semi-rigid steel beam-to-column connections. **Magazine of Civil Engineering**, 2017.

TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. **International journal of structural stability and dynamics**, 2015.

TIN-LOI, F. e MISA, J.S. Large Displacement Elastoplastic Analysis of Semirigid Steel Frames, **Int. J. Num. Methods Eng.** 1996.

TORKAMANI, M. A. M., SONMEZ, M; CAO, J. Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. **J. Struct. Engineering**, v. 12(9) p. 1225-1235. 1997.

VAN HAI, N., NGHIEM, D.N.T., CUONG, N.H., “Large displacement elastic static analysis of semi-rigid planar steel frames by corotational Euler-Bernoulli finite element”, **Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE**, v. 13, n. 2, pp. 24-32, 2019.

WILLIAMS, F.W. **An Approach to the Nonlinear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections**, Quart. J. Mech. Appl. Math, 1964.

YANG, Y. B. e KUO, S. R. Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures, **Prentice Hall**. 1994.

YANG, Y. B. e KUO, S. R. Tracing Postbuckling Paths of Structures Containing Multi-loops, **Int. J. Num. Meth. Eng**, v. 38, p. 4053-4075. 1995.

YANG, Y. B. e SHIEH, M. S. **Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, V. 28(12), p. 2110-2116. 1990.

YAW, L. L. 2D Corotational Beam Formulation. **Walla Walla University**, 2009.

YAW, L. L. Nonlinear Static - 1D Plasticity - Isotropic and Kinematic Hardening. **Walla Walla University**, 2017.

ZHENG, M., YIN Z, TENG H, LIU J, WANG Y. **Elastoplastic Behavior of Highly Ductile Materials**, Singapore. 2019.

APÊNDICE A

Este apêndice apresenta o código fonte em Scilab do algoritmo implementado no presente trabalho. Dividido em principal e suas respectivas funções, o código implementado é baseado na formulação corrotacional de elementos finitos para pórticos planos baseados na teoria de viga de Euler-Bernoulli desenvolvidos por Crisfield (1991) e Yaw (2009). O método de soluções incrementais e iterativos utilizado é o de Potra-Pták (1984) associados à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear de Riks (1972).

Um exemplo de como usar o código fonte está aplicado ao pórtico de dois pavimentos da Figura 5.14. Os dados de entrada do pórtico estão no arquivo krenk.sci. O elemento de ligação semirrígida com comprimento nulo proposto por Del Savio (2004) está implementado no Dmola.sci e o modelo não linear da ligação pode ser observado na função danomola.sci.

A.1-Programa principal

```

//PROGRAMA PÓRTICO - ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA
//Viga de Euler-Bernoulli
//Formulação corrotacional
//Método de solução: Potrá-Pták
//Método de continuação: Comprimento de arco linear
//Análise linear
//Análise não linear geométrica
//Ligação linear semirrígida Del Salvio (2004)
//Ligação não linear semirrígida
//_____
clear
clc

//SUBROTINAS
exec('krenk.sci',0);
exec('Dfint.sci',0);
exec('DK.sci',0);
exec('apontador.sci',0);
exec('ensamfg.sci',0);
exec('contfg.sci',0);
exec('contkg.sci',0);
exec('ensamkg.sci',0);
exec('Dmola.sci',0);
exec('danomola.sci',0)

//ENTRADA DE DADOS
nptotal=5;
TOL=10^-7;
delta=.9;
kd=5;
kmax=150;

//viga de Bernoulli: par(1)=1
par(1)=1;

```

```

[coord,inci,NTEL,NTNOS,NTGL,NNOSCC,dofno,E,E0,A,I,NOCC,Fr,itipo,nu,G,kmola,kapa]=krenk();

//Análise linear: analise=1;
//Análise não linear geométrica: analise=2;
analise=2;

//ligação linear: lig=1;
//ligação não linear: lig=2;
lig=2;

//propriedades dos materiais da ligação
kmola0=kmola;
for i=1:NTEL

    H(i)=10;//LIGAÇÃO D
    M0(i)=100.43*100;//LIGAÇÃO D
    r0(i)=M0(i)/sqrt(kmola0(i));
    r(i)=r0(i);
    dano(i)=0;
end

//PROCESSAMENTO
//INICIALIZAÇÃO
udesl=zeros(NTGL,1); //vetor de deslocamento
deltau=zeros(NTGL,1);
DELTAU=zeros(NTGL,1);
vu(1,1)=0;
vf(1,1)=0;
//vdano(1,1)=0;
//vteta(1,1)=0;
lambda=0;
deltal0=deltal;
coord0=coord;
aux=norm(Fr)
tic()
ktotal=0;
np=0;

while abs(udesl(3*9-2,1))<=6.5 //ligação D
    np=np+1
    k=0;

    //MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL K

[K]=DK(udesl,NOCC,NNOSCC,NTGL,NTEL,dofno,inci,coord0,E,A,I,itipo,par,G,kmola,kapa,analise,lig,kmola0);
[l,u]=lu(K);
y=l\Fr;
deltaur=u\y;
//deltaur=K\Fr;
Dlambda=deltal/norm(deltaur);
if DELTAU*deltaur<0 then
    Dlambda=-Dlambda;
end
DELTAU0=Dlambda*deltaur;
DELTAU=DELTAU0;

//VETOR DE FORÇAS INTERNAS Fint

```

```
[Fint,dano,kmola,teta]=Dfint(udesl+DELTAU,NOCC,NNOSCC,NTGL,NTEL,dofno,inci,coord0,E,A,I,itypo,par,G,kmola,kapa,analise,lig,r0,r,H,kmola0,dano);
g=(lambda+Dlambda)*Fr-Fint;
while k<kmax
    k=k+1;
```

//MATRIZ DE RIGIDEZ K

```
[K]=DK(udesl+DELTAU,NOCC,NNOSCC,NTGL,NTEL,dofno,inci,coord0,E,A,I,itypo,par,G,kmola,kapa,analise,lig,kmola0);
[l,u]=lu(K);
y=l\g;
deltaug=u\y;
y=l\Fr;
deltaur=u\y;
//deltaug=K\g;
//deltaur=K\Fr;
dlambda1=-(DELTAU*deltaug)/(DELTAU*deltaur);
deltau=deltaug+dlambda1*deltaur;
```

```
[Fint,dano,kmola]=Dfint(udesl+DELTAU+deltau,NOCC,NNOSCC,NTGL,NTEL,dofno,inci,coord0,E,A,I,itypo,par,G,kmola,kapa,analise,lig,r0,r,H,kmola0,dano);
g=(lambda+Dlambda)*Fr-Fint;
y=l\g;
deltaug=u\y;
//deltaug=K\g;
dlambda=-(DELTAU*deltaug)/(DELTAU*deltaur);
deltau2=deltaug+dlambda*deltaur;
DELTAUn1=DELTAU;
DELTAU=DELTAU+deltau+deltau2;
if DELTAU*DELTAUn1 < 0
    dlambda=-dlambda;
end
Dlambda=Dlambda+dlambda;
```

//VETOR DE FORÇAS INTERNAS Fint

```
[Fint,dano,kmola,teta]=Dfint(udesl+DELTAU,NOCC,NNOSCC,NTGL,NTEL,dofno,inci,coord0,E,A,I,itypo,par,G,kmola,kapa,analise,lig,r0,r,H,kmola0,dano);
g=(lambda+Dlambda)*Fr-Fint;
```

//CRITÉRIO DE PARADA

```
if norm(g)<TOL*aux || norm(deltau2)<TOL*norm(DELTAU)
    break
end
end
//deslocamento total
udesl=udesl+DELTAU;
//parâmetro de carga total
lambda=lambda+Dlambda;
deltal = delta0*(kd/k)^0.5;
vu(1+np,1)=udesl(3*9-2,1);
vf(1+np,1)=-lambda*Fr(3*9-1,1);
```

```
vdano(np,1)=dano(17);//vetor dano no elemento 17
vkmola(np,1)=kmola(17);//vetor de rigidez rotacional elemento 17
vteta(np,1)=teta(17);//vetor teta no elemento 17

vcont(np,1)=k;
```

```
    kttotal=kttotal+k;
end
t=toc();

//Saída de dados (pós-processamento)
disp('Número total de iterações:')
disp(kttotal)
disp('Número de passos de força:')
disp(np)
disp('Número de iterações por passo de força:')
disp(kttotal/np)
disp('Tempo de processamento:')
disp(t)

figure(1);
plot(vu,-vf,'k-','marker','*','markerFaceColor','k','markerEdgeColor','k','markersize',10); // plotar força versus
deslocamento
set(gca(),"auto_clear","off");
gca().grid=[1 1 1]; //Linhas de grade
xlabel('deslocamento horizontal nó 9(cm)','fontsize',4); //eixo x
ylabel('P (kN)','fontsize',4); //eixo y
legend('Ligação D',4,2);
```

A.2- Função Krenk

```

// Função krenk
function [coord, inci, NTEL, NTNOS, NTGL, NNOSCC, dofno, E, E0, A, I, NOCC, Fr, itipo, nu, G,
kmola, kapa]=krenk()
//Entrada de dados (pré-processamento)

//NTNOS -> NÚMERO TOTAL DE NÓS
//NTEL -> NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS
//NTGL -> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE
//NNOSCC -> NÚMERO DE GRAUS RESTRITOS (CONDIÇÕES DE CONTORNO)
NTNOS=32;
NTEL=32;
NTGL=NTNOS*3;
NNOSCC=4;

//coordenadas nodais
//coord(i,1)= coordenada x
//coord(i,2)= coordenada y
coord =100*[0 0 ;
0 0.9144 ;
0 1.8288 ;
0 2.7432 ;
0 3.6576 ;
0 4.572 ;
0 5.4864 ;
0 6.4008 ;
0 7.3152 ;
6.096 0 ;
6.096 0.9144 ;
6.096 1.8288 ;
6.096 2.7432 ;
6.096 3.6576 ;
6.096 4.572 ;
6.096 5.4864 ;
6.096 6.4008 ;
6.096 7.3152 ;
0.0001 3.6576 ;//ligação
1.016 3.6576 ;
2.032 3.6576 ;
3.048 3.6576 ;
4.064 3.6576 ;
5.08 3.6576 ;
6.0959 3.6576 ;//ligação
0.0001 7.3152 ;//ligação
1.016 7.3152 ;
2.032 7.3152 ;
3.048 7.3152 ;
4.064 7.3152 ;
5.08 7.3152 ;
6.0959 7.3152];//ligação

//incidência dos elementos
//inci(i,1) = elemento
//inci(i,2) = nó i
//inci(i,3) = nó j
inci=[1 1 2 ;
2 2 3 ;
3 3 4 ;
4 4 5 ;

```

```

5 5 6 ;
6 6 7 ;
7 7 8 ;
8 8 9 ;
9 10 11 ;
10 11 12 ;
11 12 13 ;
12 13 14 ;
13 14 15 ;
14 15 16 ;
15 16 17 ;
16 17 18 ;
17 5 19 ;
18 19 20 ;
19 20 21 ;
20 21 22 ;
21 22 23 ;
22 23 24 ;
23 24 25 ;
24 25 14 ;
25 9 26 ;
26 26 27 ;
27 27 28 ;
28 28 29 ;
29 29 30 ;
30 30 31 ;
31 31 32 ;
32 32 18 ];

```

//Tipo do elemento

//elemento barra -> itipo(nel,2)==1

//elemento viga -> itipo(nel,2)==2

//elemento de ligação -> itipo(nel,2)==3

//material 1 -> itipo(nel,3)==1

//material 2 -> itipo(nel,3)==2

for i=1:16 //pilar//coluna

itipo(i,1) = i;

itipo(i,2) = 2;

itipo(i,3) = 1;

end

for i=17:32 //viga

itipo(i,1) = i;

itipo(i,2) = 2;

itipo(i,3) = 2;

end

for i=17:17 //ligação

itipo(i,1) = i;

itipo(i,2) = 3;

itipo(i,3) = 2;

end

for i=24:25 //ligação

itipo(i,1) = i;

itipo(i,2) = 3;

itipo(i,3) = 2;

end

for i=32:32 //ligação

itipo(i,1) = i;

itipo(i,2) = 3;

itipo(i,3) = 2;

end

```

//graus de liberdade por nó
for i=1:NTEL
if (itipo(i,2)==2) || (itipo(i,2)==3)
dofno(i,1)=inci(i,2)*3-2; //NÓ I
dofno(i,2)=inci(i,2)*3-1;
dofno(i,3)=inci(i,2)*3;
dofno(i,4)=inci(i,3)*3-2; //NÓ J
dofno(i,5)=inci(i,3)*3-1;
dofno(i,6)=inci(i,3)*3;
end
end
//propriedades dos materiais de cada barra

for m=1:NTEL
if itipo(m,3)==1 //pilar//coluna
E0(m)=20500;
E(m)=E0(m);
A(m)=182;
I(m)=3.48*10^4;
nu(m)=0.2;
G(m)=E0(m)/2;
//kmola(m)=3.8797*10^6;//Curva D (kN.cm)
kapa(m)=1;
end

if itipo(m,3)==2 //viga
E0(m)=20500;
E(m)=E0(m);
A(m)=91;
I(m)=2.01*10^4;
nu(m)=0.2;
G(m)=E0(m)/2;
//kmola(m)=3.8797*10^6;//Curva D (kN.cm)
kapa(m)=1;
end
end

//Vetor de força de referência Fr
P=1;

Fr=zeros(NTGL,1);
Fr(3*5-1,1)=-P;
Fr(3*5-2,1)=0.002*P;
Fr(3*9-1,1)=-P;
Fr(3*9-2,1)=0.001*P;
Fr(3*14-1,1)=-P;
Fr(3*18-1,1)=-P;

//impõe as condições de contorno (graus de liberdade restritos)
NOCC=[1 2 10*3-2 10*3-1]

endfunction

```

A.3- Função Dfint

```

//Função DFint
function [Fint, dano, kmola, teta]=Dfint(udesl, NOCC, NNOSCC, NTGL, NTEL, dofno, inci, coord0, E,
A, I, itipo, par, G, kmola, kapa, analise, lig, r0, r, H, kmola0, dano)
//Determina o vetor global de forças internas
Fint=zeros(NTGL,1);
for m=1:NTEL
    for i=1:6
        u(i)=udesl(dofno(m,i),1); //u(3)=teta do nó 1 e u(6)=teta do nó 2
    end
    X1=coord0(inci(m,2),1);
    X2=coord0(inci(m,3),1);
    Y1=coord0(inci(m,2),2);
    Y2=coord0(inci(m,3),2);

    if analise==2 //Análise não linear geométrica
        L0(m)=sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2); //comprimento indeformado L0
        L(m)=sqrt((X2+u(4)-X1-u(1))^2+(Y2+u(5)-Y1-u(2))^2); //comprimento deformado L
        C=(X2+u(4)-X1-u(1))/L(m);
        S=(Y2+u(5)-Y1-u(2))/L(m);
    end
    if analise==1 //Análise linear
        L0(m)=sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2); //comprimento indeformado L0
        C=(X2-X1)/L0(m);
        S=(Y2-Y1)/L0(m);
    end

    if itipo(m,2) == 2 //elemento de viga
        dano(m)=0;
        teta(m)=0;
        if analise==2 //Análise não linear geométrica
            felem=zeros(6,1);
            beta0=atan((Y2-Y1)/(X2-X1));
            beta=atan((Y2+u(5)-Y1-u(2))/(X2+u(4)-X1-u(1)));
            beta1=u(3)+beta0;
            beta2=u(6)+beta0;
            teta1=atan((cos(beta)*sin(beta1)-sin(beta)*cos(beta1))/(cos(beta)*cos(beta1)+sin(beta)*sin(beta1)));
            teta2=atan((cos(beta)*sin(beta2)-sin(beta)*cos(beta2))/(cos(beta)*cos(beta2)+sin(beta)*sin(beta2)));
            //ul=(L(m)^2-L0(m)^2)/(L(m)+L0(m));
            ul=(L(m)-L0(m));

            if par(1)==1 //viga de Bernoulli
                N=E(m)*A(m)*ul/L0(m);
                M1=2*E(m)*I(m)/L0(m)*(2*teta1+teta2);
                M2=2*E(m)*I(m)/L0(m)*(teta1+2*teta2);
            end

            V1=(M1+M2)/L(m);
            V2=-V1;
            B=[-C -S 0 C S 0;
            -S/L(m) C/L(m) 1 S/L(m) -C/L(m) 0;
            -S/L(m) C/L(m) 0 S/L(m) -C/L(m) 1];
            felem=B*[N;M1;M2];
        end

        if analise==1 //Análise linear
            B=[-C -S 0 C S 0;
            -S/L0(m) C/L0(m) 1 S/L0(m) -C/L0(m) 0;
            -S/L0(m) C/L0(m) 0 S/L0(m) -C/L0(m) 1];
        end
    end
end

```

```

ri=sqrt(I(m)/A(m));
Cl=E(m)*A(m)/L0(m)*[1 0 0; 0 4*ri^2 2*ri^2; 0 2*ri^2 4*ri^2];
felem=(B*Cl*B)*u;
end
[Fint]=ensamfg(m,felem,dofno,itipo,Fint);
end

if itipo(m,2) == 3 //elemento de ligação
R=[C S 0 0 0 0;-S C 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 C S 0;0 0 0 -S C 0;0 0 0 0 0 1];
ulocal=R*u;
if lig==2 //modelo não linear de ligação
if m==17
teta(m)=ulocal(6); //u(3)=teta do nó 1 e u(6)=teta do nó 2
end
if m==24
teta(m)=ulocal(6); //u(3)=teta do nó 1 e u(6)=teta do nó 2
end
if m==25
teta(m)=ulocal(3); //u(3)=teta do nó 1 e u(6)=teta do nó 2
end
if m==32
teta(m)=ulocal(3); //u(3)=teta do nó 1 e u(6)=teta do nó 2
end
[dano,kmola]=danomola(r0,r,H,kmola0,kmola,m,teta,dano);
[Kelem_mola]=Dmola(kmola,m); // retorna a matriz de rigidez da ligação
else //modelo linear de ligação
teta(m)=0;
dano(m)=0;
[Kelem_mola]=Dmola(kmola0,m); // retorna a matriz de rigidez da ligação
end
felem_mola=R*(Kelem_mola*R*u); // retorna o vetor de força interna da ligação elementar
[Fint]=ensamfg(m,felem_mola,dofno,itipo,Fint); //posiciona o vetor de força interna da ligação no vetor
de força interna global
end
end
[Fint]=contfg(NOCC,NNOSCC,Fint);
endfunction

```

A.4- Função DK

```

//Função DK
function [K]=DK(udesl, NOCC, NNOSCC, NTGL, NTEL, dofno, inci, coord0, E, A, I, itipo, par, G,
kmola, kapa, analise, lig, kmola0)
//Determina a matriz global de rigidez
K=zeros(NTGL,NTGL);
for m=1:NTEL
    for i=1:6
        u(i)=udesl(dofno(m,i),1);
    end
    X1=coord0(inci(m,2),1);
    X2=coord0(inci(m,3),1);
    Y1=coord0(inci(m,2),2);
    Y2=coord0(inci(m,3),2);
    if analise==2 //Análise não linear geométrica
        L0(m)=sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2); //comprimento indeformado L0
        L(m)=sqrt((X2+u(4)-X1-u(1))^2+(Y2+u(5)-Y1-u(2))^2); //comprimento deformado L
        C=(X2+u(4)-X1-u(1))/L(m);
        S=(Y2+u(5)-Y1-u(2))/L(m);
    end
    if analise==1 //Análise linear
        L0(m)=sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2); //comprimento indeformado L0
        C=(X2-X1)/L0(m);
        S=(Y2-Y1)/L0(m);
    end
    if itipo(m,2) == 2 //elemento de viga
        if analise==2 //Análise não linear geométrica
            KELEM=zeros(6,6);
            r=[-C; -S; 0; C; S; 0];
            z=[S; -C; 0; -S; C; 0];
            B=[-C -S 0 C S 0;
                -S/L(m) C/L(m) 1 S/L(m) -C/L(m) 0;
                -S/L(m) C/L(m) 0 S/L(m) -C/L(m) 1];
            beta0=atan((Y2-Y1)/(X2-X1));
            beta=atan((Y2+u(5)-Y1-u(2))/(X2+u(4)-X1-u(1)));
            beta1=u(3)+beta0;
            beta2=u(6)+beta0;
            teta1=atan((cos(beta)*sin(beta1)-sin(beta)*cos(beta1))/(cos(beta)*cos(beta1)+sin(beta)*sin(beta1)));
            teta2=atan((cos(beta)*sin(beta2)-sin(beta)*cos(beta2))/(cos(beta)*cos(beta2)+sin(beta)*sin(beta2)));
            //ul=(L(m)^2-L0(m)^2)/(L(m)+L0(m));
            ul=(L(m)-L0(m));
            if par(1)==1 //viga de Bernoulli
                N=E(m)*A(m)*ul/L0(m);
                M1=2*E(m)*I(m)/L0(m)*(2*teta1+teta2);
                M2=2*E(m)*I(m)/L0(m)*(teta1+2*teta2);
                ri=sqrt(I(m)/A(m));
                Cl=E(m)*A(m)/L0(m)*[1 0 0; 0 4*ri^2 2*ri^2; 0 2*ri^2 4*ri^2];
            end
            KM=B*Cl*B;
            K1=N/L(m)*z*z';
            K2=(M1+M2)/L(m)^2*(r*z'+z*r');
            KELEM=KM+K1+K2;
        end
    end
    if analise==1 //Análise linear
        ri=sqrt(I(m)/A(m));
        Cl=E(m)*A(m)/L0(m)*[1 0 0; 0 4*ri^2 2*ri^2; 0 2*ri^2 4*ri^2];
    end
end

```

```

B=[-C -S 0 C S 0;
-S/L0(m) C/L0(m) 1 S/L0(m) -C/L0(m) 0;
-S/L0(m) C/L0(m) 0 S/L0(m) -C/L0(m) 1];
KELEM=B'*C1*B;
end
[K]=ensamkg(m,KELEM,dofno,itipo,K);
end

if itipo(m,2) == 3 //elemento de ligação
R=[C S 0 0 0 0;-S C 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 C S 0; 0 0 0 -S C 0;0 0 0 0 0 1];
if lig==1 //modelo linear de ligação
[Kelem_mola]=Dmola(kmola0,m);
else //modelo não linear de ligação
[Kelem_mola]=Dmola(kmola,m);
end
Kelem_mola=R'*Kelem_mola*R;
[K]=ensamkg(m,Kelem_mola,dofno,itipo,K);
end

end
[K]=contkg(NOCC,NNOSCC,NTGL,K);
endfunction

```

A.5- Função Apontador

```

function [IPO, TAM]=apontador(m, itipo)
//ELEMENTO VIGA 2 NÓS COM 3GL/NÓ
if (itipo(m,2)==2) || (itipo(m,2)==3)
IPO(1)=1;
IPO(2)=2;
IPO(3)=3;
IPO(4)=4;
IPO(5)=5;
IPO(6)=6;
TAM=6;
end
endfunction

```

A.6- Função Ensamfg

```

function [Fint]=ensamfg(m, FELEM, dofno, itipo, Fint)
[IPO,TAM]=apontador(m,itipo);
for I=1:TAM
P=dofno(m,IPO(I));
if (P>0)
Fint(P,1)=Fint(P,1)+FELEM(I,1);
end
end
endfunction

```

A.7- Função Contfg

```

function [Fint]=contfg(NOCC, NNOSCC, Fint)
for I=1:NNOSCC
Fint(NOCC(1,I))=0;
end
endfunction

```

A.8- Função Contkg

```
function [K]=contkg(NOCC, NNOSCC, NTGL, K)
for J=1:NNOSCC
for I=1:NTGL
    K(NOCC(1,J),I)=0;
    K(I,NOCC(1,J))=0;
end
    K(NOCC(1,J),NOCC(1,J))=1;
end
endfunction
```

A.9- Função Ensamkg

```
function [K]=ensamkg(m, KELEM, dofno, itipo, K)
[IPO,TAM]=apontador(m,itipo);
for I=1:TAM
for J=1:TAM
    P=dofno(m,IPO(I));
    Q=dofno(m,IPO(J));
    if (P>0 & Q>0)
        K(P,Q)=K(P,Q)+KELEM(I,J);
    end
end
end
endfunction
```

A.10- Função Dmola

```
function [Kelem_mola]=Dmola(kmola, m)
//elemento de ligação Alexandre Almeida Del Savio, 2004, dissertação
SA=10^12; //rigidez axial
ST=10^12; //rigidez tangencial
SR=kmola(m); //rigidez rotacional
Kelem_mola=[SA 0 0 -SA 0 0;
0 ST 0 0 -ST 0;
0 0 SR 0 0 -SR;
-SA 0 0 SA 0 0;
0 -ST 0 0 ST 0;
0 0 -SR 0 0 SR];
Endfunction
```

A.11- Função Danomola

```
function [dano, kmola]=danomola(r0, r, H, kmola0, kmola, m, teta, dano)
//entrada teta,r0,H,r,dano,kmola,kmola0,m //saída r,dano,kmola
tal=sqrt(kmola0(m))*abs(teta(m));
fm=tal-r0(m); //função dano
if fm<=0 then
    kmola(m)=kmola(m);
    dano(m)=dano(m);
else
    r(m)=tal;
    dano(m)=(r(m)-r0(m))/(r(m)*(1+H(m)));
    if dano(m)<0
        dano(m)=0;
    end
    if dano(m)>1
        dano(m)=1;
    end
    kmola(m)=(1-dano(m))*kmola0(m);
end
endfunction
```