

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ARTHUR BUENO DE LUZ

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS
PLANOS UTILIZANDO A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

MARINGÁ

2022

ARTHUR BUENO DE LUZ

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS
PLANOS UTILIZANDO A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Vanalli

MARINGÁ

2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

L979a

Luz, Arthur Bueno de

Avaliação da confiabilidade estrutural de pórticos planos utilizando a não-linearidade geométrica / Arthur Bueno de Luz. -- Maringá, PR, 2022.
96 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Vanalli.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2022.

1. Confiabilidade estrutural. 2. Não-linearidade geométrica. 3. Método analítico (FORM)
. 4. Pórtico plano. I. Vanalli, Leandro, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 23.ed. 624.1

ARTHUR BUENO DE LUZ

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS
PLANOS UTILIZANDO A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

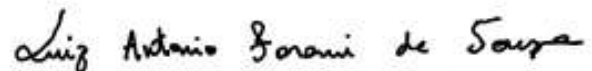
Dissertação de Mestrado apresentada no dia 25/02/2022, julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Leandro Vanalli

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Orientador



Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Andre Campos Moura
Centro de Tecnologia e Urbanismo
Universidade Estadual de Londrina

MARINGÁ
2022

In Memoriam ao meu avô Paulo R. Bueno
que nos deixou neste ano 2022. Te amo.

AGRADECIMENTOS

A DEUS pela proteção, saúde e por sempre estar comigo.

A minha esposa Camila por toda paciência, atenção, amor, carinho e companhia.

Aos meus pais e minha irmã por todo apoio e amor.

Ao M.Sc José Delábio, amigo e companheiro de mestrado.

A meu orientador pela motivação e paciência.

A todos os professores do programa, por nos ensinarem uma fagulha do que aprenderam.

Agradeço à Capes. Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Porque para DEUS nada é impossível

Lucas, 1:37

RESUMO

A confiabilidade estrutural baseia-se em um método que calcula a probabilidade de falha de uma determinada estrutura. A falha ocorre quando a sollicitação de uma estrutura for maior que a resistência dos elementos empregados. Neste trabalho, estuda-se a confiabilidade estrutural de pórticos planos, em que a análise estrutural foi realizada pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando a Não Linearidade Geométrica (NLG) e aplicando a formulação corrotacional na descrição cinemática. As trajetórias de equilíbrio são fornecidas por meio de uma análise iterativa incremental baseada nos métodos de Newton-Raphson Padrão e Modificado associados a técnica de continuação do Comprimento de Arco Linear. A análise de confiabilidade estrutural é estudada pelo método analítico FORM, que se caracteriza por linearizar a equação do estado limite, essa equação determina os domínios de falha, os domínios de segurança, o índice de confiabilidade e, por fim, a probabilidade de falha. Para a obtenção dos resultados da confiabilidade referente a estrutura estudada, foi implementado um algoritmo utilizando a ferramenta MATLAB, onde os resultados gerados são o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha e, por fim, os códigos foram validados com trabalhos disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Confiabilidade Estrutural; Não Linearidade Geométrica; FORM.

ABSTRACT

Structural reliability is a method that evaluate the probability of failure of the structures. The failure occurs when the load on a structure is greater than the strength of the material used. In this work, the structural reliability of plane frames is studied, in which the structural analysis was performed by the Finite Element Method, using Geometric Nonlinearity (NLG) and applying the corotational formulation in the kinematic description. The equilibrium trajectories are provided through an incremental iterative analysis based on the Standard and Modified Newton-Raphson method associated with the linear arc length technique. The structural reliability analysis is studied by the FORM analytical method, which is characterized by linearizing the limit state equation, in which, this equation determines the failure and safety domains, the reliability index and, finally, determines the probability of failure. In order to obtain the reliability results referring to the studied structure, an algorithm was implemented using the MATLAB tool, where the results generated are the reliability index and the probability of failure and, finally, the codes were validated with works available in the literature.

Keyword: Structural Reliability; Geometric Nonlinearity; FORM.

LISTA DE FIGURAS

Figura	Título da Figura	Pág
Figura 1.1	Fluxograma das ações metodológicas	15
Figura 3.1	Caminho de equilíbrio do sistema estrutural	30
Figura 3.2	O Método de NR	31
Figura 3.3	Treliça com um grau de liberdade	32
Figura 3.4	Método NR resolvendo Eq. De equilíbrio	33
Figura 3.5	Procedimento incremental-iterativo NRM	34
Figura 3.6	Algoritmo Newton-Raphson	35
Figura 3.7	Algoritmo Newton-Raphson Modificado	35
Figura 3.8	Formulação Corrotacional Cinemática da Viga	36
Figura 3.9	Restrições no Método do Comprimento de Arco Linear. (a) Restrição hiperesfera, (b) restrição hiperplano atualizado e (c) restrição hiperplano fixo	39
Figura 3.10	Procedimento incremental-iterativo para o Método de Newton-Raphson associado à técnica do Comprimento Arco Linear	42
Figura 4.1	Distribuição de probabilidade de uma variável normal	47
Figura 4.2	FDP de uma variável log-normal	48
Figura 4.3	Duas variáveis aleatórias independentes	49
Figura 4.4	Demonstração dos domínios de falha e segurança	51
Figura 4.5	Probabilidade de falha entre duas VA	52
Figura 4.6	Probabilidade de falha em função da margem de segurança	54
Figura 5.1	Transformação das variáveis R e S em variáveis normal padrão	57
Figura 5.2	(a) Relação entre P_f e β e (b) aproximação de primeira ordem	59
Figura 5.3	Transformação Composta	66
Figura 6.1	Índice de confiabilidade relacionados ao período de referência de um ano	78
Figura 6.2	Pórtico de Lee, geometria e carga	79
Figura 6.3	Comparação do gráfico carga versus deslocamentos	80
Figura 6.4	Deformada da estrutura	80
Figura 6.5	Pórtico Plano	81
Figura 6.6	Pórtico de LEE	83

Figura 6.7	Relação d x β	84
Figura 6.8	Resultado Polinômio d x Pcv	85
Figura 6.9	Pórtico de WILLIAMS	87
Figura 6.10	Relação d x β	88
Figura 6.11	Resultado Polinômio d x Pcv	88

LISTA DE TABELAS

Tabela	Título da Tabela	Pág
Tabela 4.1	Índice de confiabilidade β (taxas de falha associadas) para ELU	60
Tabela 4.2	Índice de confiabilidade β para ELS	61
Tabela 6.1	Características das variáveis aleatórias	81
Tabela 6.2	Validação dos resultados	82
Tabela 6.3	Parâmetros do pórtico LEE	82
Tabela 6.4	Variável aleatória LEE	84
Tabela 6.5	Resultados Pórtico de LEE	85
Tabela 6.6	Parâmetros do pórtico WILLIAMS	86
Tabela 6.7	Variável aleatória WILLIAMS	87

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição Símbolo	Pág
β	Índice de confiabilidade	14
M_r	Momento resistente	18
R_d	Resistência de cálculo	18
S_d	Esforço solicitante de cálculo	18
χ	Parâmetro de carregamento	18
G	Ação permanente	18
Q	Ação variável	18
P_f	Probabilidade de Falha	18
VA	Variáveis aleatórias	18
H LRF	Algoritmo de Hasofer-Lind	18
H LRFi	Algoritmo de Hasofer-Lind modificado	18
α_i	Fator de sensibilidade	19
γ_z	Coefficiente gama z	29
NLF	Não-linearidade física	29
NLG	Não-linearidade geométrica	29
ANL	Análise não linear	29
q	Vetor forças interna nodal	30
f	Vetor forças externas	30
g(x)	Equação não linear	30
N	Força axial	32
L	Comprimento	32
K_t	Matriz de rigidez	33
g(u _i)	Força residual	33
NR	Newton-Raphson	33
u	Deslocamento em x	33
tol	Tolerância	34
NRM	Newton-Raphson Modificado	34
L_0	Comprimento inicial	36
v	Deslocamento em y	36
A	Área da seção transversal	37

E	Módulo de elasticidade	37
I_m	Momento de inércia	37
M	Momento fletor	37
θ	Ângulo de rotação nodal	37
β_i	Ângulo inicial	37
β_f	Ângulo final	37
K_{el}	Matriz tangente elementar	38
D_c	Matriz constitutiva	38
B	Matriz de transformação	38
F_{el}	Vetor de forças elementar	38
F_r	Vetor de referência	38
F_{int}	Vetor global de forças internas	39
λ	Parâmetro de força	39
δu	Vetor deslocamento residual	40
Δu	Vetor deslocamento nodal	40
g	Vetor de forças desequilibradas	41
k	iteração	41
C	Confiabilidade	43
$G(x)$	Equação de estado limite	43
$f_X(x)$	Função densidade de probabilidade (FDP)	45
$F_X(x)$	Função probabilidade acumulada (FPA)	45
μ_X	Média	46
σ_X	Desvio padrão	46
$\Phi(x)$	FPD	46
$\phi(x)$	FPA	46
f_c	Resistência do concreto	49
f_y	Resistência do aço	49
ρ_{XY}	Coefficiente de correlação	49
R_k	Resistência característica	50
S_k	Solicitação característica	50
D_{falha}	Domínio de falha	51
D_{seguro}	Domínio de segurança	51
M	Margem de segurança	53

d	distância	57
∇g	Gradiente da equação estado limite	60
\mathbb{Y}	Espaço reduzido	60
\mathbb{R}^n	Espaço real	60
β_k	Vetor índice de confiabilidade	61
$g(y)$	Equação do estado limite	61
\mathbb{X}	Espaço normal padrão	63
D	Matriz diagonal	63
∂	Derivada parcial	63
J	Jacobiano	63
C_i	Matriz de correlações não cheias (i=x, y ou z)	66
I	Matriz identidade	66
\bar{A}	Matriz ortogonal	68
Π	Produtório	70
V	Matriz de rotação	70
$\mathcal{H}()$	Matriz Hessiana	70

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	JUSTIFICATIVA.....	18
1.2	OBJETIVOS.....	19
1.3	METODOLOGIA	19
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	22
2.1	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	22
2.2	ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS	29
3	ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS	35
3.1	MÉTODO NEWTON RAPHSON	36
3.2	MÉTODO NEWTON RAPHSON MODIFICADO	40
3.3	FORMULAÇÃO CORROTACIONAL PARA O ELEMENTO FINITO DE VIGA-COLONA 2D 42	
3.3	TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO DO COMPRIMENTO ARCO LINEAR	45
3.4	ALGORITMO PROPOSTO.....	48
4	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	49
4.1	INCERTEZAS NAS ESTRUTURAS	49
4.2	VARIÁVEL ALEATÓRIA E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES.....	51
4.2.1	DISTRIBUIÇÃO NORMAL	52
4.2.2	DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL	53
4.2.3	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES E CORRELACIONADAS.....	54
4.3	ESTADO LIMITE.....	56
4.4	PROBABILIDADE DE FALHA.....	57
4.4.1	MARGEM DE SEGURANÇA.....	59
4.5	PARÂMETROS DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	61
4.5.1	ESTADO LIMITE ÚLTIMO	61
4.5.2	ESTADO LIMITE SERVIÇO	62
5	MÉTODO DE TRANSFORMAÇÃO EM CONFIABILIDADE.....	63
5.1	FOSM (MÉTODO DE PRIMEIRA ORDEM E SEGUNDO MOMENTO).....	64
5.1.1	A TRANSFORMAÇÃO DE HASOFER E LIND	64
5.1.2	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE	64
5.1.3	O PONTO DE PROJETO	67
5.1.4	PROJEÇÃO DA ORIGEM, VETOR A E COSSENO DIRETORES.....	68
5.1.5	EQUAÇÃO DO ESTADO LIMITE LINEAR E NÃO LINEAR	68
5.1.6	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	69
5.1.7	TRANSFORMAÇÃO DE HASOFER-LIND MATRICIAL	71

5.1.8	ALGORITMO FOSM	72
5.2	FORM (MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM)	73
5.2.1	TRANSFORMAÇÃO UTILIZANDO O MODELO DE NATAF	73
5.2.2	ALGORITMO FORM	76
5.3	SORM (MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE SEGUNDA ORDEM)	77
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	79
6.1	VALIDAÇÃO DOS ALGORITMOS	79
6.1.1	VALIDAÇÃO ALGORITMO NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	79
6.1.2	VALIDAÇÃO ALGORITMO CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	82
6.2	PORTICO DE LEE	83
6.3	PORTICO DE WILLIANS	86
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	90
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91
	APÊNDICE	96

1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, o crescimento populacional eminente nas grandes cidades em que os espaços urbanos estão reduzindo e valorizando cada vez mais, trazendo a necessidade de sistemas construtivos rápidos e econômicos. O projeto e a execução inadequada em qualquer uma das fases de uma determinada obra de engenharia pode falhar ao desempenhar as funções para a qual foi projetada e executada. Portanto, as estruturas devem oferecer segurança em sua utilização, o que significa que parte dela não irá falhar durante a sua vida útil.

Por esse motivo, no Brasil, a Engenharia de Estruturas por meio das normas técnicas, define critérios de segurança adotados para os projetos estruturais. Uma delas é a utilização de coeficientes de ponderação para as solicitações e minoração para a resistência dos materiais. A elaboração dos projetos estruturais está baseado no método dos estados limites (métodos semi-empíricos), conforme determinam os códigos normativos onde tais coeficientes de ponderação são utilizados para determinar uma margem de segurança no projeto em relação a uma das maiores fontes de incerteza, como por exemplo, as resistências dos materiais e as ações (PEREIRA; BECK; EL DEBS, 2017).

Mesmo entendendo a necessidade de se utilizar os coeficientes parciais ao longo de todo o ciclo da vida da estrutura, podem-se ter incertezas presentes desde a concepção até o final da vida útil. As incertezas se originam do conhecimento incompleto sobre a natureza dos sistemas de engenharia que se projeta e opera como, também, na aleatoriedade natural dos processos envolvidos (PIRES et al., 2019).

Essas incertezas mudam ao longo do ciclo de vida, sendo maiores na fase de projeto, podendo reduzi-las após a construção e durante a operação, devido à coleta de dados reais para a redução das incertezas (PIRES et al., 2019).

Com o intuito de conhecer essas incertezas, que são estudados na análise da confiabilidade estrutural e iniciados por Freudenthal's (JÚNIOR et al., 2020, apud FFREUDENTHAL, 1956), o método da confiabilidade estrutural calcula as probabilidades de falha que excedem a perda em muitos modelos preditivos que interagem e simulam os perigos, as respostas estruturais, danos e perdas econômicas e sociais (AGHABABAEI; MAHSULI, 2018).

A confiabilidade estrutural determina uma medida probabilística que avalia até quando uma estrutura, em determinadas condições e com determinado grau de confiabilidade, exerce às funções para que foi projetada durante o tempo de sua vida útil. Assim, o índice de

confiabilidade e a probabilidade de falha são medidas capazes de fornecer essas respostas (JÚNIOR, 2012).

A quantificação da confiabilidade estrutural pode ser realizada de duas formas - métodos analíticos ou método das transformações; e métodos numéricos. Os métodos analíticos mais comumente utilizados são o FOSM (*First Order Second Moment*), FORM (*First Order Reliability Method*) e o SORM (*Second Order Reliability Moment*) (JÚNIOR, 2012). No método numérico, aborda-se a simulação de Monte Carlo (JÚNIOR, 2012).

A simulação é uma técnica para realizar experimentos com o computador, fundamentada em modelos matemáticos e lógicos, que descreve o comportamento de sistemas complexos. Assim, a simulação de Monte Carlo envolve a utilização de números aleatórios. Essa simulação numérica, permite soluções complexas em inúmeras áreas, como engenharia, administração, física, matemática, medicina, biologia, etc., em que o fato limitante é a capacidade computacional (BECK, 2019a).

Tratando-se da análise não linear em elementos finitos, a verificação está relacionada à solução iterativa das equações de equilíbrio e à discretização dos elementos em elementos finitos. Para validar o comportamento estrutural adequado, as equações devem retratar o verdadeiro comportamento físico (NLF - Não Linearidade Física) e a idealização da geometria (NLG - Não Linearidade Geométrica) (ENGEN et al., 2017).

1.1 JUSTIFICATIVA

As estruturas acompanham o avanço da tecnologia dos materiais, como por exemplo, materiais mais resistentes, formato irregular dos elementos e das estruturas, arquiteturas complexas, maior esbeltez, bem como outros fatores que o engenheiro busque alternativas para analisar o comportamento das estruturas próximo do real.

Para simular o comportamento mecânico de uma estrutura próximo do real, é importante que se considerem na análise as não linearidades físicas e geométricas. A análise não linear em conjunto com o Método dos Elementos Finitos (MEF) são ferramentas muito utilizadas atualmente.

A confiabilidade de estruturas abrange incertezas aleatórias, para que se possa calcular as probabilidades de falha nas estruturas. Exemplos de incertezas são as cargas atuantes, as cargas de vento estáticas ou dinâmicas, os sismos e o material constituinte.

Nesse contexto, os estudos do comportamento de estruturas via Método dos Elementos Finitos sob a ótica da análise não linear visam retratar o comportamento está mais próximo do real introduzindo a confiabilidade estrutural pelo método FORM (*First Order Reliability Method*) para verificação da probabilidade de falha de uma determinada estrutura.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo do presente trabalho é promover uma simulação numérica de pórtico plano utilizando a NLG (Não Linearidade Geométrica), considerando na análise a confiabilidade estrutural por meio do método de transformação FORM (*First Order Reliability Method*).

Posto isto, podem-se estabelecer como objetivos específicos:

1. Implementar um código computacional, utilizando o programa *Matlab* versão *R2018a* para análise não linear de pórticos planos por meio do Método dos Elementos Finitos.
2. Utilizar formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos em grandes deslocamentos;
3. Implementar a não linearidade geométrica;
4. Para relacionar o sistema de equações não lineares, serão utilizados os métodos iterativos e incrementais de Newton-Raphson padrão, associados à técnica de continuação do Comprimento de Arco Linear.
5. Determinar a confiabilidade estrutural pelo método de FORM por meio da implementação de uma rotina com o programa *Matlab*, versão *R2018a*, para determinar o índice de confiabilidade e a Probabilidade de falha.
6. Comparar os resultados do algoritmo elaborado com a literatura disponível.

1.3 METODOLOGIA

Neste trabalho, para alcançar os objetivos descritos no item 1.2, serão desenvolvidos alguns métodos nesta seção. O principal objetivo metodológico será o desenvolvimento de um algoritmo no *software MATLAB R2018A* para Análise Não Linear de estruturas e cálculo da Confiabilidade Estrutural. Todo o desenvolvimento teórico será demonstrado no capítulo 3 para Análise Não Linear e no capítulo 4 para Confiabilidade

Estrutural. A metodologia será discutida a seguir para cada objetivo específico e um fluxograma que resume o procedimento desenvolvido na Figura 1.1.

a) Validar o algoritmo desenvolvido no Software MATLAB R2018a

A validação do algoritmo desenvolvido, deve ser feita com resultados de outros trabalhos disponíveis na literatura. Portanto, buscou-se alguns trabalhos relacionados NLG de estruturas de pórticos, via método dos elementos finitos com a formulação corrotacional. Os trabalhos utilizados para comparação dos resultados foi o de Souza (2017b), Souza, Santos e Kawamoto (2018) e Yaw (2009). Dado o algoritmo desenvolvido, serão utilizadas estruturas dos trabalhos de comparação, com os mesmos tipos de propriedades geométricas e de material, vinculações, determinação do carregamento, para validar o modelo. Na parte que trata acerca da confiabilidade estrutural, a validação do algoritmo será realizada a partir da comparação com dados disponíveis da literatura. Após o desenvolvimento do modelo e das análises numéricas será realizada a comparação entre resultados numéricos, os quais serão apresentados no capítulo 6.

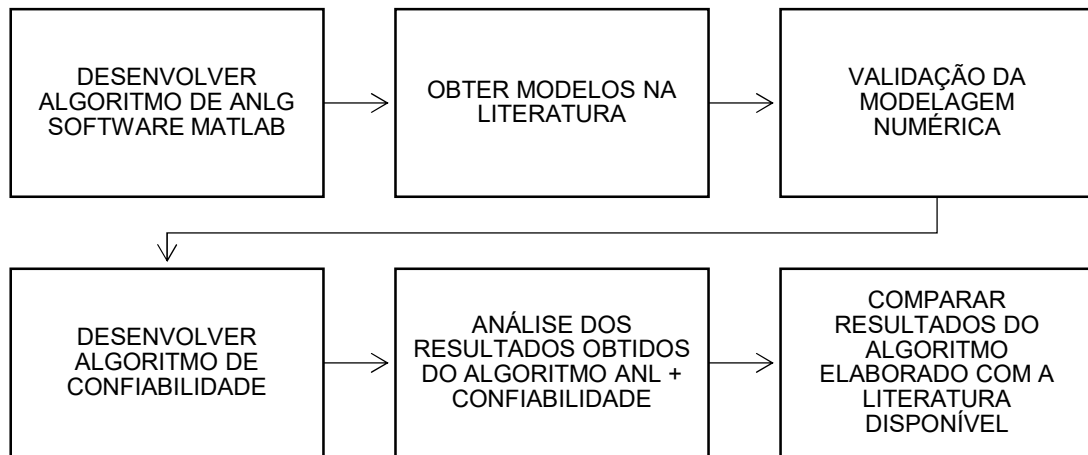
b) Comparar os resultados do algoritmo NLG com a literatura disponível para a estrutura de Pórticos Planos.

Para a comparação dos resultados do algoritmo para a estrutura de pórticos planos, será plotado um gráfico contendo o deslocamento pelo passo de carga. Após esta análise, será comparado os resultados com dados da literatura disponível. Os valores obtidos encontram-se no capítulo 6.

c) Determinar a Confiabilidade Estrutural da Análise Não Linear Geométrica, determinando o índice de confiabilidade (β) e a probabilidade de falha (P_f).

Após a validação do algoritmo com dados disponíveis na literatura, obtém-se os resultados do índice de confiabilidade e probabilidade de falha dos pórticos planos.

Figura 1.1 – Fluxograma das ações metodológicas



Fonte: O Autor

2 REVISÃO DE LITERATURA

O objetivo deste capítulo é abordar os trabalhos produzidos ao longo dos últimos anos com referência ao tema proposto.

2.1 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Schuëller e Stix (1987) introduziram em seu trabalho vários métodos para calcular a probabilidade de falha em estruturas ou sistemas estruturais, com a precisão computacional. Em problemas de dimensões superiores, as técnicas de aproximação utilizando a linearização, como o FOSM, podem estar sujeitas a erros. Portanto, determinou um método alternativo para calcular a probabilidade de falha que combinam as vantagens da técnica de amostragem e o cálculo do ponto de projeto, ou a região de maior probabilidade de ocorrência da falha. Este método alternativo, ao contrário, não utiliza métodos iterativos, ou algoritmos para encontrar o ponto de projeto, e sim procedimentos de otimização geralmente resolvem problemas de programação de restrição não linear. Esta formulação possibilita realizar cálculos no espaço original para todas as variáveis. Comparou-se os poucos resultados com técnicas de integração numéricas, obtendo probabilidade de falha e tempo computacional menor.

Sagrilo (1994) em sua tese de Doutorado elaborou dois programas computacionais independentes, o primeiro foi elaborado análise não-linear de estruturas de plataformas offshore e o segundo para análise de confiabilidade (PACONF), donde, mais tarde, foram interligados para obter um programa de análise de confiabilidade estrutural das determinadas plataformas. Neste programa, são determinados dois critérios de falha (VA), um para deslocamento horizontal máximo ao topo da estrutura e o outro para a verificação de juntas selecionadas (*punching shear*). A análise de confiabilidade foi estudada por dois métodos de transformação, o FORM e o SORM, que se utilizou uma técnica adaptativa de superfície de resposta para o cálculo dos gradientes da função de falha.

Zhang e Kiureghian (1994) em seu trabalho desenvolveram um algoritmo para cálculo de confiabilidade estrutural utilizando o método analítico FORM para estimar a probabilidade de *first-excursion*. Probabilidade de *first-excursion* se dá quando as cargas são dependentes do tempo, tanto as determinísticas quanto as probabilísticas, a resposta estrutural constitui de um processo estocástico, sendo necessária uma análise de confiabilidade dependente do tempo, ou seja, o evento de falha é definido como o cruzamento de uma quantidade de resposta críticas acima de um limite seguro durante a vida útil da estrutura. A

equação do estado limite para *first-excursion* e seu gradiente, foi determinada por um código de elemento finito. O algoritmo desenvolvido, localiza sucessivamente pontos de distância mínima local na superfície do estado limite na ordem de aumento da distância da origem no espaço normal padrão. Dois exemplos foram determinados com estruturas de treliça e um pórtico. O material constitutivo segue a lei da plasticidade e o dano contínuo. Para o exemplo da treliça, os resultados foram menos precisos e, segundo o autor, foi devido o método FORM, pois este atribui resultados mais precisos para pequenas probabilidades.

Beck (1999) em sua tese de Doutorado apresentou uma implementação de um método de confiabilidade estrutural em um programa de Elementos Finitos *ACE-Pro* (Análise de Componentes Estruturais Probabilística), ou seja, implementou sub-rotinas para o programa ANSYS. O método de confiabilidade foi realizado uma combinação entre o FORM e o SORM. Os resultados elaborados, como por exemplo uma viga engastada, barra tracionada, treliça e outros, mostram boa concordância entre o ACE-Pro e as referências citadas.

Nogueira (2005) em sua dissertação de Mestrado elaborou um modelo de otimização unindo a análise estrutural de barras de concreto armado com a confiabilidade, de maneira que a confiabilidade foi adicionada como restrição ao processo de otimização. Na análise não linear foram considerados a não-linearidade física do concreto e do aço, assim como a não-linearidade geométrica. A determinação das VA são dados pelo esmagamento do concreto e deformação excessiva da armadura no ELU (Estado Limite Último). Para o ELS (Estado Limite de Serviço) foi verificado o deslocamento excessivo de determinados pontos de uma estrutural. A função de estado limite, que separa regiões de domínio de falha e não falha, foi construída com o emprego do Método de Superfícies de Respostas, determinando-se assim o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha. Um dos exemplos analisados, foi uma viga isostática, com distribuição Normal, com índice de confiabilidade 3,802 e probabilidade de falha da ordem de $7,081 \times 10^{-5}$.

Beck e Rosa (2006) em seu trabalho desenvolve e determina a incorporação de algoritmos de confiabilidade estrutural em algoritmos de Elementos Finitos comerciais, como no caso do ANSYS, que realiza análises de confiabilidade estrutural numérica com base no modelo de elementos finitos de uma determinada estrutural. A análise de confiabilidade realizada no software ANSYS, envolve a construção de um modelo paramétrico de elementos finitos, definição da distribuição de parâmetros aleatórios, definição de uma função de estado limite baseado em Elementos Finitos e solução de probabilidade de falha. Foram resolvidos quatro exemplos, uma viga, duas treliças e calculado a probabilidade de falha de uma barra da

análise estrutural da ponte Hercílio Luz. Os resultados foram condizentes, apesar de cada estrutura obter VA diferentes.

Júnior (2012) trabalhou com dois aspectos, uma foi a Não-Linearidade Geométrica (NLG), e a confiabilidade estrutural por meio de uma linguagem de programação em FORTRAN; Para NLG utilizou-se a linguagem de programação do trabalho do Galvão (2000); e para confiabilidade estrutural, utilizou-se do programa PACONF desenvolvido por SAGRILO (1994). A probabilidade de falha foi calculada pelo método analítico utilizando FORM, mas, como este método demanda um cálculo de derivadas provida do vetor gradiente da função de falha nos pontos, foi implementada uma rotina no MATLAB, fazendo ligação aos dois códigos citados antes.

Santos, Stucchi, Beck (2014) verificou a confiabilidade estrutural de vigas, pelo método FORM para vigas em concreto armado, viga metálica com travamento lateral contínuo e viga mista de aço e concreto segundo as normas brasileiras. A princípio, determina-se a seção transversal do elemento estrutural; a resistência R_d ou M_r por meio da NBR 6188 (2014) para vigas em concreto ou a NBR 8800 (2008); os esforços solicitantes de cálculo S_d ; parâmetro de carregamento χ e determinação dos modelos probabilísticos G e Q; análise da confiabilidade por P_f e determinação do índice de confiabilidade β ; e, por fim representação dos resultados entre χ e β .

Beck e Silva (2016) em seu trabalho inseriu o método analítico FORM, donde este método é bem eficiente para resolver problemas de confiabilidade estrutural por funções de estado limite lineares ou moderadamente não linear. As VA limitadas, induzem fortes não linearidades no mapeamento para o espaço gaussiano padrão, tornando assim, a busca por ponto de projeto mais duro. A transformação para o espaço padrão é limitada, o que traz dois problemas abordados, o primeiro seria o comportamento limitante do mapeamento de probabilidade quando uma determinada VA aproxima-se de seus valores inferiores e superiores, e segundo, como introduzir os limites do ponto de projeto para deixar o domínio de suporte de problemas. O Princípio da Aproximação de Cauda Normal, que permite uma variável não gaussiana X seja transformada em uma variável gaussiana Y, foi utilizado. Neste trabalho, foram utilizados três algoritmos que tendem a achar o zero da equação de estado limite, HLRF, iHLRF e SQP. Os resultados obtidos e comparados foram providos destes algoritmos.

Mapa (2016) em sua dissertação de Mestrado analisou pórticos planos metálicos por uma análise estrutural avançada em Elementos Finitos, considerando o efeito da não-linearidade geométrica e a flexibilização das ligações pelo programa *Computational System for Advanced Structural*. A análise de confiabilidade estrutural foi desenvolvida em um ambiente

Matlab com o método analítico FORM e simulação de Monte Carlo para avaliar a probabilidade de falha, perante as VA utilizadas, como funções de desempenho formuladas para estados últimos de resistência e estados limites de serviço do deslocamento. Os resultados obtidos pelo FORM e a simulação de Monte Carlo, obtiveram pouca diferença em ambos, com valores maiores para a simulação de Monte Carlo.

Sakamoto (2016) introduziu a análise de confiabilidade estrutural em um edifício alto submetido à ação do vento. Os modos de falha ensaiados foram o deslocamento excessivo o topo do edifício e aceleração máxima para verificação do conforto humano. As variáveis foram a velocidade máxima do vento no topo da estrutura em que a distribuição da probabilidade é a distribuição de Gumbel e o módulo de elasticidade do concreto com modelo de probabilidade normal. O método utilizado foi o FORM implementado em um ambiente Matlab e o edifício utilizado foi o teórico CAARC.

Engen et al. (2017) avaliou a resistência global de grandes estruturas de concreto por análise de elementos finitos não lineares com uma estratégia baixa de solução de incertezas na modelagem. A análise de variáveis foi feito por inferência bayesiana, em que nesta análise, tanto a variável a ser modelada como os parâmetros de distribuição são tratados como aleatórios desconhecidos, portanto, o método permite a incorporação de conhecimento prévio e dados observados, e a incerteza estatística dos parâmetros pode ser estimada a partir das respectivas distribuições de probabilidade. O autor desenvolveu um novo método para calcular o modo de falha. Para a análise não linear foi utilizado o método de Newton-Raphson modificado para as equações das soluções iterativas. As cargas foram aplicadas com incremento constante para que a capacidade experimental fosse alcançada em 30 etapas de cargas.

Pereira, Beck e El Debs (2017) analisaram um pilar misto de aço e concreto parcialmente revestido e submetidos à flexo-compressão, onde determinaram uma seção transversal mista e projetaram o carregamento admissível segundo a norma NBR 8800 (2007). O cálculo do índice de confiabilidade (β) e o fator de sensibilidade (α_i) foram determinados pelo método FORM. Foram adotadas duas estratégias, ambas utilizando o diagrama de iteração da força Normal x Momento Fletor para a seção avaliada. A primeira curva avalizada é a resistência máxima de projeto representando os pares ordenados para diversos valores de excentricidade, porém reduzidos pelos coeficientes parciais de segurança. Para a segunda, a curva foi dada pela resistência máxima que representam os valores nominais, onde estes pares ordenados poderiam atingir se não obtivesse os coeficientes de segurança. Detecta-se que o índice de confiabilidade diminui conforme aumenta-se a excentricidade; a NBR 8800 (2007) tem níveis aceitáveis, porém conservadores.

Aghababaei e Mahsuli (2018) em seu trabalho aplicou à análise de risco detalhada empregando métodos de confiabilidade estrutural consequente com diversos modelos probabilísticos de integração. Os modelos probabilísticos compreendem a modelos de riscos (sísmico), respostas estruturais, danos aos componentes e consequências econômicas e sociais. Duas análises de risco são utilizadas, análise de amostragem de cenário (análise de confiabilidade de amostragem de Monte Carlo) que funciona para qualquer problema, independente da diferenciabilidade ou grau de não linearidade, mas computacionalmente dispendiosa, e o método FORM (*First Order Reliability Method*) eficiente, mas limitada na contabilização de modelos de variação temporal e requer diferenciação contínua.

Silva, Beck e Cardoso (2018) estudou uma forma alternativa de resolver a otimização da topologia usando restrições de tensão e considerando incertezas, pois, a confiabilidade deve ser resolvida para cada restrição de tensão e para cada elemento da malha. A quantificação de incertezas, consideradas na magnitude e direção do carregamento, é realizada através da abordagem de perturbação de primeira ordem, com validação adequada pela simulação de Monte Carlos. determina-se que na presença de pequenas incertezas na direção do carregamento, diferentes topologias, são obtidas quando comparadas a uma abordagem determinística.

Deng (2019) Estudou modelos de confiabilidade estrutural considerando variáveis probabilísticas mistas e de intervalo. As variáveis aleatórias probabilísticas são descritas por funções de distribuição aleatória, que exigem amostras experimentais suficiente. As variáveis de intervalo podem ser mais apropriadas quando faltam informações. Ao analisar estruturas de treliça, o índice de confiabilidade híbrido extremo pode ser obtido quando as variáveis de intervalo atingem seus limites superior ou inferior. Com isto, para resolver este índice de confiabilidade híbrido, foi utilizado uma estratégia de loop sequencial único combinado com uma superfície de resposta baseada em variável intermediária e o método de movimentação do solucionador de otimização de assíntotas são propostas.

Felipe (2019) em sua tese de Doutorado analisou estruturas de treliça sujeitas ao colapso progressivo. A análise não linear estática e dinâmica foi elaborada pelos Elementos Finitos Posicional, abrangendo o modelo de dano dúctil e utilizando a medida de deforma logarítmica para tratar com grandes deslocamentos e grandes deformações. Combinou conjunto a análise não linear, uma formulação de confiabilidade estrutural para avaliar os caminhos de falha da estrutura de treliças sujeitas ao colapso progressivo. A degradação mecânica em termos de variação de porosidade devido ao crescimento e coalescência de microcavidades e microfissuras no material. A formulação do qual foi proposta, trouxe um excelente ajuste para

curvas de tensão deformação, para onze diferentes tipos de materiais, abordando o endurecimento, amolecimento e falha do material. No estudo do concreto, o modelo sintetizado obteve resultado próximos aos modelos experimentais do que os modelos da literatura.

Piluso et al. (2019) em seu trabalho, desenvolveu um método para o dimensionamento a sismo de Momento Resisting Frames (MRFs), baseando-se em valor alvo, ou índice de confiabilidade e da probabilidade de falha na obtenção de um mecanismo de colapso do tipo global para os p'roticos estocásticos (considerando a incerteza aleatória da propriedade do material. Com alusão ao MRFs, onde membros possuem valores aleatórios de limite de escoamento, quando o colapso estrutural é uma preocupação, o domínio de falha está relacionado a doso os mecanismos de colapso possíveis. A equação do estado limite corresponde a cada evento que é representada por um hiperplano no espaço de variáveis aleatórias, de forma que o domínio de falha é uma superfície resultante da interseção dos hiperplanos correspondentes aos estados limites que representa os eventos de falha. Considerando que os estados limites são eventos localizados em série, a probabilidade de falha pode ser calculada por meio dos limites de Ditlevsen, em que esta abordagem foi validada via simulações de Monte Carlo.

Pires et al. (2019) realizaram um estudo de análise de confiabilidade para barragens de concreto já construídas. O cálculo da confiabilidade, utiliza-se da equação da probabilidade de falha, que é uma equação que constitui uma integral multidimensional sobre o domínio de falha. Para a resolução deste trabalho, foi empregado técnica de simulação de Monte Carlo (SMC) e o método de transformação de primeira ordem ou FORM (*First Order Reliability Method*).

Cui, Li e Hong (2020) avalia a probabilidade de contribuição do fator de carga crítica para instabilidade global de uma estrutura de casca esférica treliçada reticulada submetida a carga permanente e de neve, de acordo com o código chinês. Considerou, para os modelos probabilísticos as variáveis físicas e geométricas, como as seguintes incertezas: resistência ao escoamento do aço, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, razão geométrica e variável geométrica como a espessura do perfil tubular. Para o efeito da IGI (imperfeição geométrica inicial), utilizou o modelo SAR (Modelo Auto Regressão Simultânea). As probabilidades foram estimadas em $6,2 \times 10^{-6}$ se o desvio padrão do IGI for a metade do IGI máximo do código chinês e o fator de carga crítica for igual a 2,0, assim, pode-se reduzir cerca da metade da ordem de magnitude se o IGI for 1/3 do IGI máximo. Assim o critério sugerido no código é adequado, porém conservador.

Júnior et al. (2020) em sua pesquisa, detectaram que os métodos analíticos de aproximação primeira e segunda ordem, FORM e SORM, largamente utilizados em problemas de engenharia, não satisfaz as condições do teorema de *Lax-Milgram* (MUGLER, STARKLOFF, 2011) e não garantem a existência e exclusividade da solução e possuem inconsistência gerada. Portanto, o trabalho vem trazer um alerta a comunidade científica de pesquisa de engenharia que utilizam estes métodos. Os métodos FORM e SORM estão na comunidade científica a 50 e 40 anos. Os exemplos para estas questões foram por meio de equações dedutivas.

Ni et al. (2020) em seu trabalho, estudou análise não linear de estruturas e análise de confiabilidade para otimização de projetos. Os estudos em confiabilidade foram adotados pelo método FORM e Krigagem. O método de Krigagem é um método obtido por interpolação, do qual fornece a melhor estimativa imparcial de uma função. A ideia principal é que na resposta de saída de um modelo físico consiste em duas partes, sendo a primeira baseada em um modelo de regressão linear e a outra baseada em um modelo de processo estocástico. Foi elaborada uma comparação entre estes dois métodos com a simulação de Monte Carlo, detectando a mesma precisão nos resultados. Porém, dentre os métodos, o método de Krigagem foi mais preciso. A confiabilidade foi utilizada para otimizar estruturas, ou seja, redução.

Zhong et al. (2020) Estudou em seu trabalho confiabilidade estrutural pelo método analítico FORM. Este método possui uma abordagem eficiente para análise de confiabilidade, que faz uso de técnicas de otimização baseadas em gradiente para resolver. Porém, técnicas de otimização com base em gradiente podem resultar em convergência local ou mesmo divergência para função de desempenho altamente não linear. Foi proposta então um método híbrido, o FORM e o Salp Swarm Algorithm (SSA). O SSA com forte capacidade de otimização global para problemas altamente não lineares e dimensionais é utilizado para resolver a função objetivo de Lagrange. O método híbrido é capaz de superar as limitações do FORM, incluindo a convergência e divergência local. Por fim, a precisão e a eficiência do FORM SSA são comparadas com métodos FORM baseados em gradiente e vários métodos FORM baseados em heurísticas, através de oito exemplos. O SSA-FORM pode ser aplicada de forma geral para análises de confiabilidade envolvendo funções de baixa dimensão, alta dimensão e funções de desempenho implícitas.

Pedro et al. (2022) estudaram os efeitos dos carregamentos e o índice de confiabilidade de vigas e pilares de estruturas aporticadas. Comumente são estudados elementos (vigas e pilares) isolados e/ou estruturas simétricas. Foi efetuado a remoção de partes

de elementos (pilar) da estrutura afim de obter estrutura assimétrica. Após as análises, foi encontrado o índice de confiabilidade 3 e 4 para vigas e pilares.

2.2 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Menin (2006) em sua tese de doutorado, estudou a formulação do método dos elementos finitos corrotacional com o objetivo de analisar o comportamento não-linear geométrico de diversos tipologia de estruturas, por uma análise estática linear, permitindo assim, a capacidade portanto destas estruturas após a perda ou bifurcação de equilíbrio. A tipologia das estruturas estudadas foi de treliças, pórticos planos e espaciais e cascas. As treliças e pórticos planos, as equações de transformação que permitem a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional, passaram a ser obtidas de forma exata. Para o caso de pórticos espaciais e cascas, os deslocamentos deformacionais, foram obtidos utilizando operadores de projeção, sem a necessidade de mudanças internas para rotinas lineares de elementos finitos existentes. Verificado na resolução de sistema de equações não-lineares e a obtenção das trajetórias de equilíbrio, foram implementados o método de Riks-Wempner, o método de Ramm e o método de comprimento arco cilíndrico, sendo, estes, combinados com o método de Newton-Raphson.

Müller (2007) em seu trabalho, promoveu uma formulação de elementos finitos, utilizando o método de Newton-Raphson e comparando com o método do comprimento de arco. Foi sugerido um processo de estabilização para resolver defeitos numéricos e capaz de ultrapassar os pontos críticos. Os pontos de bifurcação são passados no caminho primário. Esta sugestão, pode ser incorporado em um programa de elementos finitos, com um solucionador de Gauss aplicado, este solucionador será capaz de fatorar cada matriz de rigidez, a não ser que haja autovalores presentes. O pórtico de Lee foi analisado, o método do comprimento de arco exigiu 312 iterações de equilíbrio e o método de Newton-Raphson 251 iterações. A estabilização inserida no algoritmo, no gráfico força versus deslocamento, faz com que a trajetória passe de quatro pontos para dois.

Yaw (2009a, 2009b) publicou dois trabalhos, um sobre vigas e o outro sobre treliças em duas dimensões. Nos trabalhos apresentou formulações elementos finitos corrotacional. Um elemento pode ter grandes rotações e deslocamentos a nível global, mas pequenos a nível local. O primeiro trabalho analisou três estruturas, uma viga engastada e o pórtico de Toggle, onde este, comparou com resultados analíticos a curva carga deslocamento e o último o pórtico de

Lee em que comparou com o trabalho de Souza (2000), também obtendo a curva deslocamento próximos.

Yaw, Sukumar e Kunnath (2009) propôs uma formulação corrotacional sem malhas para elementos bidimensionais contínuos. Na configuração de elementos finitos do tipo casca e vigas, a formulação corrotacional o movimento de um corpo é separado em movimento rígido, produzindo a tensão deformação. Neste trabalho cada nó em um domínio discretizado sem malha tem seu próprio sistema de coordenadas corrotativas. Foram analisados três exemplo, donde o primeiro é uma viga engastada e os resultados do gráfico deslocamento da viga com o método corrotacional sem malha é comparado a um elemento finito de viga corrotacional 1D.

Yaw (2011) propôs uma formulação pelo método dos elementos finitos corrotacional para treliça tridimensional com elementos considerados elásticos lineares. A estrutura de treliça pode ter deslocamentos e rotações eventualmente grande a nível global, desde que, as os deslocamentos locais sejam pequenos. Os resultados obtidos, foram validados, como por exemplo a treliça espacial de cúpula, onde o gráfico de carga versus deslocamento foi preciso em relação aos resultados de Crisfield (1997, p. 395).

Silva (2011) realizou uma análise de pórticos planos utilizando uma formulação corrotacional e plasticidade por camadas. A discretização do pórtico foi elaborada com elementos de viga 2D de Timoshenko, Euler-Bernoulli e Euler-Bernoulli com acoplamento entre esforços axiais e de flexão. A relação constitutiva do material foi adotada por um modelo de elastoplasticidade unidimensional com endurecimento isotrópico, depois utilizou a quadratura de Gauss para integrar o modelo constitutivo, bem como para obter o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente dos elementos de viga. Obtém-se as trajetórias de equilíbrio fornecidas por uma análise incremental iterativa fundamentado no método de Newton-Raphson, combinado com a técnica do comprimento de arco (*arc-length*).

Em Júnior (2012) determina que em um sistema estrutural considera duas hipóteses simplificadoras; o material constituinte de uma estrutura deve seguir o comportamento da Lei de Hooke e; a deformada da geometria não difere sensivelmente da geometria não deformada, em que o equilíbrio será o mesmo nas duas situações. Por tanto, destas duas hipóteses, caso haja uma infração destas, deve-se introduzir os conceitos de Não-Linearidade no comportamento da estrutura.

Nogueira, Venturini e Coda (2013) promoveram um modelo mecânico para analisar estruturas de pórticos planos em concreto armado, utilizando o método dos elementos finitos e, com o comportamento do aço e do concreto por modelos de plasticidade e dano. O problema da não linearidade foi resolvido pelo método de Newton-Raphson. A não linearidade

geométrica introduzida, foi idealizada pela descrição lagrangeana atualizada, em que permite o equilíbrio da estrutura na última configuração moderada. Outra questão abordada foi os mecanismos complementares a resistência do concreto como intertravamento de agregados, ação de pino e a modelagem da influência ao cisalhamento. Foram analisadas três vigas, com paradas com resultados experimentais e numéricos. Os resultados foram próximos, com exceção a primeira viga (armada transversalmente), onde à análise somente com concreto, sem armação, obteve 65% de carga suporta, em relação aos testes experimentais e numéricos.

Júnior (2014) promoveu uma análise não linear física e geométrica de estruturas de pórticos planos em concreto armado. Na análise estrutural, utilizou o método dos elementos finitos corrotacional obtendo como resultado as curvas de equilíbrio (carga x deslocamento). A primeira estrutura analisada NLG (não linearidade geométrica) foi um pilar com carga excêntrica, com malhas de 1, 2 e 4 e cargas 457,52 kN, 460,59 kN e 460,09 kN. Obtido a curva de equilíbrio, comparou-se com resultados experimentais e utilizou o método das fatias para determinar a carga máxima vertical. O método das fatias, mostrou-se mais conservador.

Lacerda (2014) em seu trabalho analisou treliças pela formulação via Método dos Elementos Finitos Posicional para não linearidade geométrica utilizando diferentes medidas de deformação. Para esta formulação, se considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear ao contrário dos deslocamentos. Seu trabalho também abordou o método do comprimento de arco, que foi utilizado para traçar caminhos de equilíbrio, como por exemplo, *snap-back* e *snap-through*. Em um de seus exemplos numéricos, foi uma treliça em arco, disponível em Crisfield (1997, p. 408). Esta estrutura possui 101 barras com 42 nós e o caminho de equilíbrio é complexo com múltiplos *snap-back* e *snap-through*. A solução completa possui 5000 ciclos do algoritmo de comprimento de arco de Riks-Wempner, tolerância igual a 10^{-4} .

Lacerda, Maciel e Scudelari (2014) neste trabalho, analisou treliça utilizando a formulação posicional no método dos elementos finitos. Na solução do caminho de equilíbrio, pontos de bifurcação e pontos limites relacionados aos fenômenos *snap-through* e *snap-back*, utilizou o método do comprimento de arco (Método de Riks, e Crisfield). A formulação posicional para problemas não lineares, considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear, ao contrário dos deslocamentos. Demonstrou, também, a matriz de rigidez de treliças em relação a diferentes tipos de medidas de deformação. Nos dois exemplos abordados, a curva força versus deslocamentos foram semelhantes em comparação a literatura.

Reis e Coda (2014) em seu trabalho, elaborou uma formulação alternativa de Elementos Finitos fundamentado em posições para modelar pórticos planos, considerando o comportamento da não linearidade geométrica, a relação constitutiva é elastoplástico para as

barras e conexões semirrígidas, incluindo o efeito do cisalhamento. Foram analisados cinco exemplos, dois pórticos, uma coluna e duas vigas, comparando os resultados obtidos da análise com a literatura.

Oliveira e Silva (2016) em sua pesquisa, analisaram estruturas de pórticos planos pela formulação corrotacional para um elemento de viga que unificasse as teorias de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko. Apesar de efetuar análises da não linearidade geométrica, descreveu algumas etapas da não linearidade física, abordadas na matriz de rigidez. Um dos exemplos verificadas foi o do pórtico de Lee, os resultados obtidos no comparativo entre os caminhos de equilíbrio com a literatura foram muito próximos, tanto para deslocamentos horizontais, como verticais. Por fim, identificou os pontos críticos, dois pontos para limites de carga e dois pontos para limites de deslocamentos.

Madah e Amir (2017) em seu trabalho estudou a vários fenômenos de flambagem em barras de treliça, sendo todas as barras consideradas na otimização da resposta da não linearidade geométrica. A flambagem de Euler de membros delgados, a global e a estabilidade das sequencias. Cada barra da treliça é modelada como uma sequência de elementos de viga corrotacional, com liberação de extremidade de membros de treliça única, levando em consideração implicitamente, as configurações de flambagem das barras. Os exemplos impostos, foram relativos aos três fenômenos de flambagem descritos.

Souza (2017a) abordou análise não linear física e geométrica de pórticos planos via método dos elementos finitos, com o comportamento do material determinado por um modelo de Mecânica do Dano Contínuo. A obtenção do vetor de forças interna, o módulo de rigidez à flexão é determinado com uma divisão da seção transversal por camadas. A trajetória de equilíbrio traçada com pontos limites da estrutura, foi utilizado o método de Chebyshev, com a taxa de convergência cúbica, associada à estratégia de controle de deslocamento generalizado. Para os resultados obtidos, o método de Chebyshev obteve tempo de processamento inferior ao método de Newton-Raphson padrão, apesar do custo computacional ser maior.

Souza (2017b) elaborou um algoritmo em ambiente Matlab unindo um método iterativo pertinente a família de métodos de Jarrat com convergência de quarta ordem, associado à técnica de continuação do comprimento de arco linear, efetuou uma análise, em método dos elementos finitos corrotacional de pórticos planos com não linearidade geométrica, com o comportamento constitutivo do material é determinado por um modelo elástico linear. Os resultados obtidos, comprovam o melhor desempenho do algoritmo computacional implementado em relação análises feitas com métodos tradicionais, como por exemplo, o método de Newton-Raphson padrão e o Modificado.

Stramandinoli e Rovere (2017) em sua pesquisa desenvolveu um modelo de elementos finitos de barras bidimensional para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos em concreto armado. Os elementos de barra detêm três nós e um total de sete graus de liberdade, sendo utilizado três pontos de Gauss para integração do elemento, seção transversal discretizado em camadas em cada ponto de Gauss, chamado método das Lamelas. Como a formulação é baseada na teoria de Euler-Bernoulli, desprezam-se as deformações por cisalhamento. Quando o caminho de equilíbrio apresenta ponto limite ou o efeito *snap-through*, pode-se usar métodos como Newton-Raphson, método do comprimento de arco, entre outros, como utilizado nos exemplos. O pórtico de Williams foi o único exemplo com a utilização do método de comprimento de arco.

Albino et al. (2018) em seu trabalho analisou dutos e elementos tubulares verticais sob a formulação de vigas corrotacional, efeitos geométricos não lineares considerando grandes deslocamentos e rotações, porém, pequenas deformações. A discretização espacial das equações de equilíbrio é determinada com base nas suposições de Euler-Bernoulli, que considera elementos de viga Hermitiana de dois nós, as quais, são apresentados a um sistema de coordenadas de co-rotação posto ao quadro local de coordenadas do elemento. A degradação do material é tratada usando uma variação exponencial das propriedades ao longo da espessura do tubo. As deflexões resultam de forças causadas pelo peso próprio, movimento do navio, correntes marítimas, flutuabilidade e ondas. Alguns exemplos foram postos, dentre eles, o pórtico de Lee, donde diferente de outros trabalhos, possui a seção tubular, e, também foi demonstrado a tensão normal de Cauchy (σ_{xx}) calculada ao longo de dois planos 1-1' e 2-2' da seção transversal.

Souza (2018) promoveu uma análise não linear geométrica com conexões semirrígidas de um pórtico duplo tipo galpão. Um algoritmo foi desenvolvido em ambiente Matlab utilizando a formulação de elementos finitos corrotacional para discretização da estrutura e a solução equações não lineares por um passo incremental e iterativo proposta a partir da adaptação de um método de terceira ordem convergência, associado a técnica de continuação do comprimento de arco linear. Obteve um tempo de resposta menor em relação ao método de Newton-Raphson. O método de Newton-Raphson não convergiu.

Souza et al. (2018) em seu trabalho propôs um algoritmo baseado em métodos de Potra-Pták, Chebyshev e super-Halley combinados com o método do comprimento de arco linear, pois a escolha destes, resulta na convergência de ordem cúbica. O método dos elementos finitos posicional foi utilizado, pois considera as coordenadas nodais como variáveis de um sistema não linear ao contrário de deslocamentos, em que, este método foi aplicado na análise

de problemas de treliças planas e espaciais com a não linearidade geométrica. Os resultados presentes no trabalho, apresentou-se mais eficiente em relação ao número de passos, iterações necessárias até a convergência e tempo de processamento em comparação com os métodos clássicos de Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado.

Souza, Santos e Kawamoto (2019) propuseram uma análise não linear física em estruturas e treliça pelo MEF corrotacional submetidas a carregamentos e descarregamentos cíclicos. Dois modelos foram formulados e utilizado o modelo constitutivo inelástico uniaxial pela teoria da elastoplasticidade e outro na Mecânica do Dano. A solução do problema não linear foi obtida o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson associado à técnica de continuação do comprimento de arco linear, assumindo a condição de rotação e deslocamentos infinitesimais pequenos. Um algoritmo foi implementado pelo programa Matlab onde foi verificado a precisão e a convergência, além de comparar as repostas numéricas dos modelos constitutivos, trajetórias de equilíbrio das estruturas.

Souza (2020) Em seu trabalho, implementou computacionalmente formulações de Elementos Finitos Posicional e Corrotacional, conjunto a análise estática não linear geométrica de estruturas de treliça bidimensionais, adotando a relação constitutiva para o material elástica linear e a deformação de Green. O esquema de equações não lineares desenvolvidos ao problema estrutural, é obtido com o método de Newton-Raphson padrão, associado a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Foram analisados três exemplos, sendo o primeiro, uma treliça abatida, comparando-se as formulações posicional e corrotacional com o trabalho de (WRIGGERS, WAGNER e MIEHE, 1988), a segunda, uma treliça abatida não simétrica (MENIN, 2006) e por fim um arco treliçado.

3 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Grande parte das construções existentes é composta de concreto armado e aço, em que, estes tipos estruturais são constituídos por elementos como vigas, pilares, lajes etc. Considerando a análise estrutural integrada na maioria dos softwares comerciais é efetuada considerando a análise Elástico-Linear, conforme descrito no (subitem 14.5.2) da NBR 6118 (2014).

Uma vez que, o grande número de pilares e vigas em uma determinada análise estrutural proporciona um custo elevado de tempo computacional, bem como a geração de malhas para elementos finitos, e entre outros, a análise não linear é promovida de forma aproximada com a aplicação da rigidez secante para NLF e a utilização do parâmetro γ_z , em que este determina os efeitos de 2º ordem para a NLG (NBR 6118, 2014).

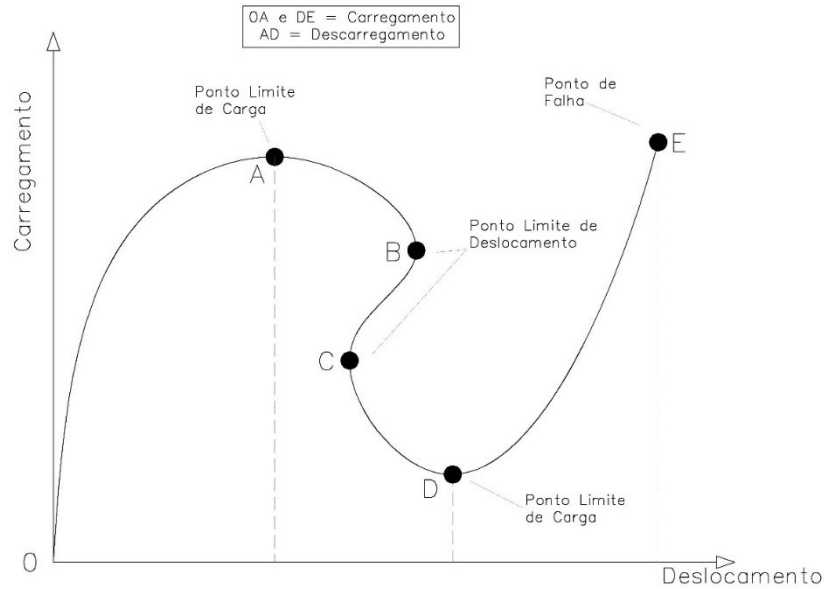
A busca pelo comportamento real de estruturas de concreto armado, requer entrar no campo do estudo da Não Linearidade Física (NLF) que trata dos fenômenos da fissuração e plastificação da armadura e a Não Linearidade Geométrica (NLG) que aborda os grandes deslocamentos e elevados esforços de compressão (PARENTE JUNIOR et al., 2014).

Na análise linear de projeto estrutural com adaptações para considerar os efeitos não lineares, ao passar dos anos, está sendo substituída por análises capazes de incorporar efeitos não lineares, como por exemplo, semirrigidez das ligações, inelasticidade do aço, interação solo-estrutura, efeitos dinâmicos, efeitos de segunda ordem etc. (SOUZA, 2018).

Para obter uma análise não linear com precisão, deve-se considerar nos métodos os efeitos de grandes rotações e deslocamentos, onde, uma metodologia efetiva para resolver equações não lineares deve superar os problemas numéricos dado ao comportamento não linear, descrevendo todo o caminho de equilíbrio (curva do deslocamento *versus* carregamento) (SOUZA; SANTOS; KAWAMOTO, 2019).

Uma resposta estrutural, verificada na Figura 3.1, em que um componente de deslocamento pode aumentar e reduzir ao longo do caminho, identifica-se também nessa figura, os pontos limites de carga (A, D), pontos limites de deslocamento (B, C) e o ponto de falha (E) (CRISFIELD, 1998; SOUZA; SANTOS; KAWAMOTO, 2019).

Figura 3.1 – Caminho de equilíbrio do sistema estrutural



Fonte: Autor

3.1 MÉTODO NEWTON RAPHSON

Tratando-se de análise não linear de estruturas, um dos grandes problemas é encontrar uma configuração de equilíbrio para uma estrutura que está sob ação de forças aplicadas. Em elementos finitos, as condições de equilíbrio, de uma estrutura, podem ser expressas pelo seguinte sistema de equações:

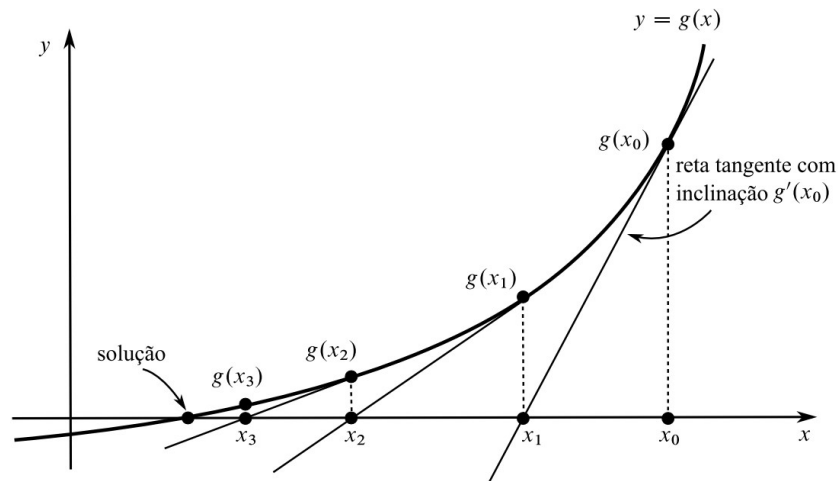
$$\mathbf{q} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

Onde \mathbf{q} é o vetor de forças internas nodais correspondente às tensões da estrutura e \mathbf{f} é o vetor de forças externas.

Para resolver o sistema de equações não lineares dado na Eq. (3.1), utiliza-se o método iterativo e incremental de Newton-Raphson (NR). Considere-se uma equação não linear $g(x) = 0$. Se $g(x)$ for contínua e diferenciável, tendo raiz próxima de um ponto estimável, ou seja, derivada primeira da função $g(x)$ no ponto x_i dado por $g'(x)$, na Figura 3.2, o método de NR encontra um valor aproximado para raiz da equação não linear, dada uma tolerância. Inicia-se por um ponto x_0 que é a primeira estimativa da raiz, a próxima é x_1 , obtido pelo cruzamento do eixo x com a reta tangente à $g(x)$ no ponto $(x_0, g(x))$. Outras estimativas são obtidas de forma semelhante, como na Eq. (3.2) (LACERDA, 2014).

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} \quad (3.2)$$

Figura 3.2 – O Método de NR



Fonte: LACERDA (2014)

A Eq. (3.2) pode ser facilmente obtida, em relação a Figura 3.2, utilizando a expansão em série de Taylor, dada por:

$$g(x) = g(x_i) + (x - x_i)g'(x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)^2 g''(x_i) + \dots \quad (3.3)$$

Fazendo $g(x) = 0$, devido à procura da raiz, e desprezando os termos de segunda ordem, tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &\approx g(x) + (x - x_i)g'(x_i) \\ x &\approx x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

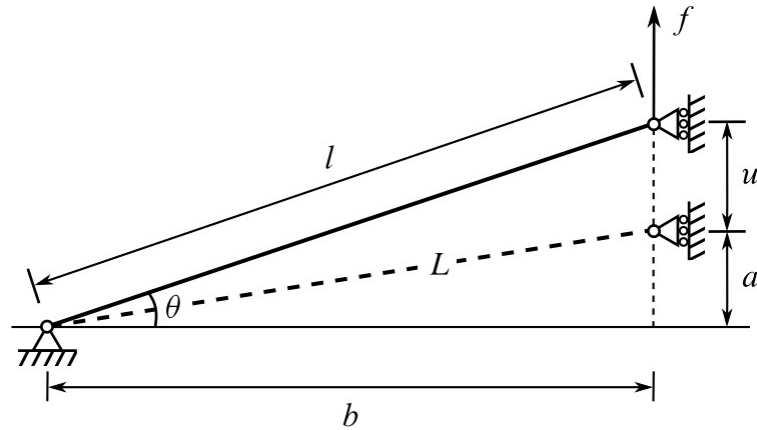
Substituindo x por x_{i+1} , tem-se a Eq. (3.2).

Crisfield (1991) utilizou o método de NR para uma treliça simples com uma barra biarticulada, Figura 3.3. A barra detém módulo de Young E e área da seção transversal A . Portanto, a equação de equilíbrio é computada por:

$$\mathbf{q}(u) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Onde \mathbf{f} é a força externa e \mathbf{q} é a força interna na barra, para este exemplo, $q = N \operatorname{sen}\theta$, sendo N a força axial.

Figura 3.3 – Treliça com um grau de liberdade



Fonte: LACERDA (2014)

Assumindo que θ é pequeno, tem-se:

$$q(u) = N \operatorname{sen}\theta \approx \frac{N(a + u)}{L} \quad (3.6)$$

O método de NR será utilizado para encontrar a raiz da função dada por:

$$g(u) = q(u) - \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Aplicando a Eq. (3.7) na Eq. (3.2), tem-se:

$$u_{i+1} = u_i - K_t^{-1} g(u_i) \quad (3.8)$$

$$K_t = g'(u_i) = \frac{d}{du} [q(u) - \mathbf{f}] = \frac{dq(u)}{du}$$

Com $df/du = 0$, pois f é constante, K_t é a matriz de rigidez e $g(u_i)$ a força residual ou força de desequilíbrio.

É importante diferenciar a matriz de rigidez tangente do método de NR com a matriz de rigidez que está sobre o caminho de equilíbrio, pois esta tem uma importante interpretação física relacionada com a estabilidade da estrutura. Já a primeira pode não ter relação com o estado de equilíbrio até antes do método convergir, podendo tornar-se positiva, negativa ou zero durante o processo de convergência, sem que isto tenha relação com a estabilidade da estrutura.

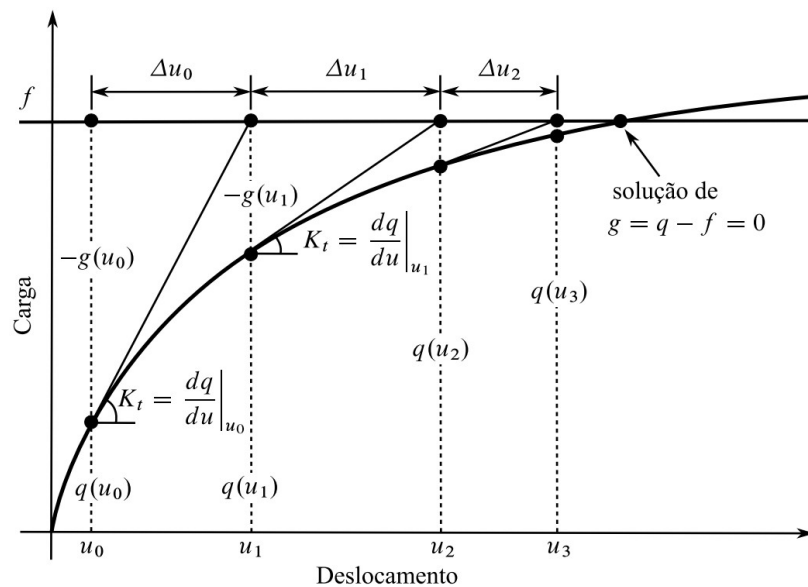
A Eq. (3.8) a pode ser apresentada como:

$$\begin{aligned}\Delta u_i &= -K_t^{-1}g(u_i) \\ u_{i+1} &= u_i + \Delta u_i\end{aligned}\quad (3.9)$$

Na Figura 3.4, é mostrado o método de NR sob outra visão, mas equivalente em relação à Figura 3.2. Nesta, o processo de convergência para a interseção da curva $q(u)$ com a reta horizontal de altura f . Iniciando com uma estimativa u_0 , tem-se:

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0 \quad \text{onde } \Delta u_0 = -K_t^{-1}g(u_0) \quad (3.10)$$

Figura 3.4 – Método NR resolvendo Eq. De equilíbrio



Fonte: LACERDA (2014)

O término do processo de iteração é dado quando algum critério de parada é informado. Normalmente dois são utilizados: o primeiro é erro relativo estimado, onde as iterações terminam quando o erro relativo é menor do que um valor de tolerância “tol” é pré-

especificado eq. 3.11; O segundo é a tolerância em $g(u)$, onde as iterações terminam quando o valor absoluto de $g(u_i)$ é menor do que o valor de tolerância “tol” pré-especificado eq. 3.12.

$$\left| \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i} \right| = \left| \frac{\Delta u_i}{u_i} \right| \leq tol \quad (3.11)$$

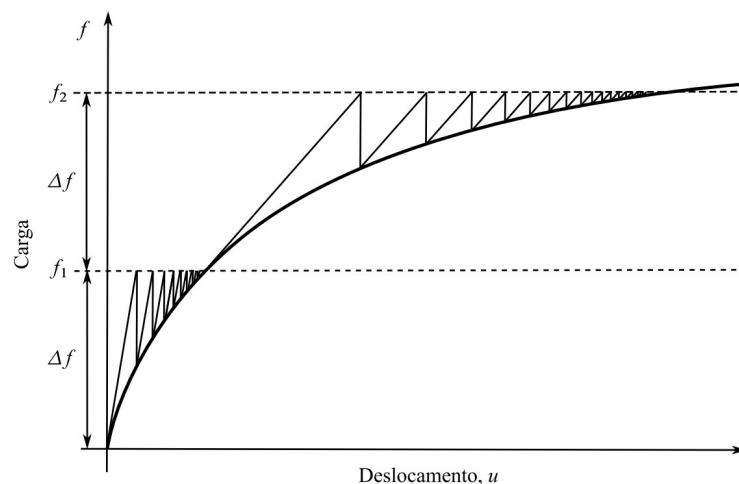
$$|g(u_i)| \leq tol \quad (3.12)$$

3.2 MÉTODO NEWTON RAPHSON MODIFICADO

O método de NR calcula e fatora a matriz de rigidez tangente para cada iteração. Em alguns problemas que são geradas grandes matrizes de rigidez, como em estruturas tridimensionais, pode haver problemas. No caso, o tempo do custo computacional de montar e fatorar grandes matrizes repetidas vezes é considerado alto. Vários outros métodos foram propostos para lidar com esta situação, um deles foi o Método de Newton-Raphson Modificado (*NRM*) (LACERDA, 2014).

O método de NRM calcula a matriz de rigidez uma única vez e na primeira iteração de cada ciclo de nível de carga no procedimento incremental-iterativo, Figura 3.5.

Figura 3.5 – Procedimento incremental-iterativo NRM



Fonte: LACERDA (2014)

No método de NRM a convergência é mais lenta, pois requer um maior número de iterações, em comparação com o método de NR. Isto pode diminuir sua possível vantagem no custo computacional.

Lacerda (2014) apresenta um algoritmo descrevendo os métodos de NR e NRM, Figura 3.6 e Figura 3.7.

Figura 3.6 – Algoritmo NR.

```

f =  $\Delta f$ , u = 0;
for n = 1 to  $n_{max}$  do
  g = q(u) - f;
  for i = 1 to  $i_{max}$  do
     $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ ;
     $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}$ ;
    u = u +  $\Delta \mathbf{u}$ ;
    g = q(u) - f;
    if  $\|\mathbf{g}\| \leq tol \cdot \|\Delta f\|$  then break;
  end
  output u, f;
  f = f +  $\Delta f$ 
end

```

Fonte: LACERDA (2014).

Figura 3.7 – Algoritmo NRM.

```

f =  $\Delta f$ , u = 0;
for n = 1 to  $n_{max}$  do
   $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ ;
  g = q(u) - f;
  for i = 1 to  $i_{max}$  do
     $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}$ ;
    u = u +  $\Delta \mathbf{u}$ ;
    g = q(u) - f;
    if  $\|\mathbf{g}\| \leq tol \cdot \|\Delta f\|$  then break;
  end
  output u, f;
  f = f +  $\Delta f$ 
end

```

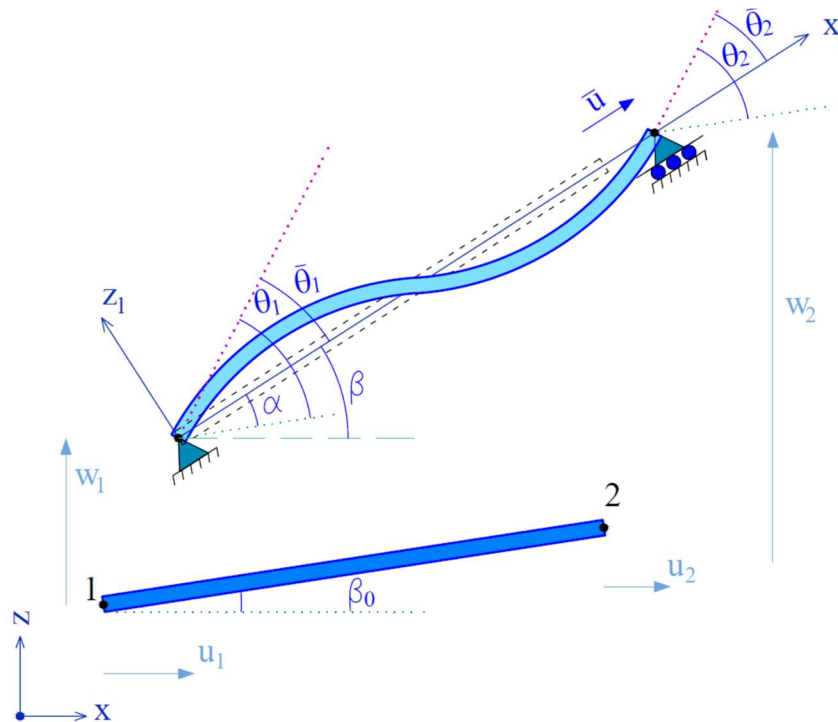
Fonte: LACERDA (2014).

3.3 FORMULAÇÃO CORROTACIONAL PARA O ELEMENTO FINITO DE VIGA-COLONA 2D

A abordagem ao MEF Corrotacional foi baseada na separação dos deslocamentos de corpo rígido das deformações sofridas pelo elemento utilizando um sistema de coordenadas que acompanha o elemento. Para esta abordagem, permite-se grandes deslocamentos e rotações de uma forma simples e computacionalmente eficiente, além de simplificar a consideração da não linearidade física (NLF) (PARENTE JUNIOR et al., 2014).

Na Figura 3.8 vemos a descrição cinemática de um elemento de viga Corrotacional sofrendo deslocamento de corpo rígido e deformação, denotando que as coordenadas dos nós 1 e 2 no sistema global são dadas por (X, X_1, X_2) e (Y, Y_1, Y_2) na devida ordem. Os deslocamentos global e local são definidos por $\mathbf{u}_g = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2\}^t$ e $\mathbf{u}_l = \{\bar{u} \ \bar{\theta}_1 \ \bar{\theta}_2\}^t$ respectivamente.

Figura 3.8 – Formulação Corrotacional Cinemática da Viga



Fonte: Adaptado de (SILVA, 2011).

A formulação dos Métodos dos Elementos Finitos Corrotacional foi abordada nos trabalhos de (PARENTE JUNIOR et al., 2014; SOUZA, 2019; YAW, 2009, S).

Perante a Figura 3.8, o comprimento inicial (L_0) e o comprimento corrente (L) será:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (3.13)$$

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2} \quad (3.14)$$

A deformação específica ε que é reconhecida constante e determinada por $\varepsilon = u_l/L_0$ e o deslocamento axial é $u_l = L - L_0$. Nos trabalhos de Souza (2008) e Yaw (2009b), multiplicou-se u_l por $\frac{(L+L_0)}{(L+L_0)}$ determinando um novo deslocamento axial local (u_l) do elemento e a força normal (N) na viga:

$$u_l = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0} \quad (3.15)$$

$$N = \frac{EAu_l}{L_0} \quad (3.16)$$

Na qual E é o módulo de elasticidade e A é a área da seção transversal. Por meio da análise estrutural tradicional, os momentos locais das extremidades do elemento de viga, são relacionados com as rotações nodais locais (θ_{1l} e θ_{2l}) calculados por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI_m}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1l} \\ \theta_{2l} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Em que I_m é o momento de inércia. As rotações nodais são determinadas por:

$$\theta_{1l} = \arctan \left(\frac{\cos\beta_f \sin\beta_1 - \sin\beta_f \cos\beta_1}{\cos\beta_f \cos\beta_1 - \sin\beta_f \sin\beta_1} \right) \quad (3.18)$$

$$\theta_{2l} = \arctan \left(\frac{\cos\beta_f \sin\beta_2 - \sin\beta_f \cos\beta_2}{\cos\beta_f \cos\beta_2 - \sin\beta_f \sin\beta_2} \right) \quad (3.19)$$

Em que $\beta_1 = \theta_1 + \beta_i$ e $\beta_2 = \theta_2 + \beta_i$, os ângulos θ_1 e θ_2 são as rotações nodais globais determinadas no sistema de equações globais. As expressões para os ângulos inicial e final da barra, β_i e β_f são:

$$\beta_i = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right) \quad (3.20)$$

$$\beta_f = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right) \quad (3.21)$$

A matriz de rigidez tangente elementar \mathbf{K}_{el} , os vetores \mathbf{r} e \mathbf{z} , e a matriz de transformação \mathbf{B} , são calculadas por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{B}^T \mathbf{D}_c \mathbf{B} + \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{z} = [\sin \beta_f \quad -\cos \beta_f \quad 0 \quad -\sin \beta_f \quad \cos \beta_f \quad 0]^T \quad (3.23)$$

$$\mathbf{r} = [-\cos \beta_f \quad -\sin \beta_f \quad 0 \quad \cos \beta_f \quad \sin \beta_f \quad 0]^T \quad (3.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos \beta_f & -\sin \beta_f & 0 & \cos \beta_f & \sin \beta_f & 0 \\ -\sin \beta_f / L & \cos \beta_f / L & 1 & \sin \beta_f / L & -\cos \beta_f / L & 0 \\ -\sin \beta_f / L & \cos \beta_f / L & 0 & \sin \beta_f / L & -\cos \beta_f / L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Em que \mathbf{D}_c é a matriz constitutiva. O cálculo dos valores seno e cosseno do ângulo β_f e do vetor de forças internas elementar (\mathbf{F}_{el}) são respectivamente:

$$\cos \beta_f = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L} \quad (3.26)$$

$$\sin \beta_f = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T \quad (3.28)$$

O entendimento da análise não linear é determinar a configuração de equilíbrio de uma estrutura que está sob ação dos carregamentos. Assim, o sistema de equações não lineares a ser solucionado, que governa o equilíbrio estático de um determinado pórtico no comportamento não linear geométrico será:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}_{int} - \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.29)$$

Na qual \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} é o vetor global de forças internas e λ é o parâmetro de força responsável por escalonar o vetor de referência \mathbf{F}_r .

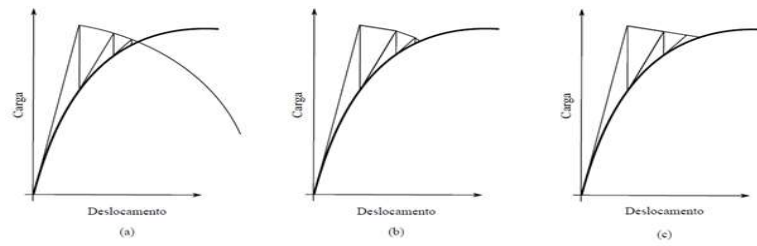
$$c(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (3.30)$$

3.3 TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO DO COMPRIMENTO ARCO LINEAR

A técnica de continuação do comprimento arco linear foi introduzido por Wempner (1971) e Riks (1972) para estruturas geometricamente não lineares, que permitiram aos algoritmos da solução passarem por pontos limites, na qual a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à tangente inicial em cada passo (CRISFIELD, 2000; SOUZA, et al. 2018).

O método de comprimento de arco insere tanto a carga como o deslocamento. Para isto, insere-se uma nova equação ou restrição no determinado sistema de equações de equilíbrio, e, também, a inserção de uma nova incógnita, denominada o *fator de carga*. A Figura 3.9 (a) demonstra a restrição de hipersfera. Para as versões linearizadas, adota-se restrições de hiperplano, como (b) hiperplano atualizado e (c) hiperplano fixo (LACERDA, 2014). As equações abaixo referentes ao comprimento de arco linear, foi tratado nos trabalhos de (CRISFIELD, 1981; LACERDA, 2014; SOUZA, 2017a;).

Figura 3.9 – Restrições no Método do Comprimento de Arco Linear. (a) Restrição hiperesfera, (b) restrição hiperplano atualizado e (c) restrição hiperplano fixo.



Fonte: (LACERDA, 2014).

Souza, et al. (2018) sugere que métodos de solução em problemas de estruturas não lineares, deve ser apto a traçar a trajetória de equilíbrio completo, reconhecendo e computando os pontos limites, para isto, um determinado processo iterativo incremental é utilizado consistindo em duas etapas: (1) A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, um incremento de carga é selecionado, que tenta satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Logo após a seleção do parâmetro, o incremento inicial das coordenadas nodais é determinado; (2) A próxima etapa da solução, por meio de uma estratégia do *path-following* (passo de força) corrige a solução incremental, proposta na etapa anterior, a fim de restaurar o equilíbrio da estrutura.

A expressão que rege o subincremento inicial do parâmetro da força $\delta\lambda^{(1)}$ (solução predita, abordado no trabalho de (LACERDA, 2014) é dado por:

$$\delta\lambda^{(1)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{u}_r\|} \quad (3.31)$$

Em que, Δl simboliza o incremento do Comprimento de Arco e $\delta\mathbf{u}_r$ o vetor de deslocamentos nodais tangente. O processo iterativo consecutivo na equação de restrição para calcular $\delta\lambda^{(k)}$ é tido fazendo com que a solução $(\delta\mathbf{u}^{(k)}, \delta\lambda^{(k)}\mathbf{F}_r)$ seja ortogonal à solução incremental da iteração anterior $(\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}, \Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r)$, então:

$$\delta\mathbf{u}^{(k)T} \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)} \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (3.32)$$

Onde, $\delta\mathbf{u}^{(k)}$ é o vetor de deslocamentos residuais na iteração corrente, \mathbf{F}_r é o vetor de forças referências e $\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ é o vetor de deslocamentos nodais incrementais na iteração anterior. Deve-se corrigir o subincremento de força ($k > 1$) a partir da eq. 3.33, dado por:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \quad (3.33)$$

As incógnitas para as forças residuais ($\delta\mathbf{u}_g$) e forças de referências ($\delta\mathbf{u}_r$), são aferidas pelas equações 3.34 e 3.35:

$$\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)^{-1}} \mathbf{g}^{(k)} \quad (3.34)$$

$$\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)^{-1}} \mathbf{F}_r \quad (3.35)$$

Na qual \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema estrutural e \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas. Por experiência numérica, como dado em (LACERDA, 2014), o termo do denominador ($\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0$), o subincremento do parâmetro de força ($\delta\lambda^{(k)}$) torna-se:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \quad (3.36)$$

No passo de força $t+\Delta t$ e iteração k , os parâmetros de força ($\Delta\lambda$) e de deslocamentos ($\Delta\mathbf{u}$) serão:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)} \quad (3.37)$$

$$\Delta\mathbf{u}^{(k)} = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)} \quad (3.38)$$

É de suma importância que a escolha correta do sinal do incremento inicial de força ($\Delta\lambda^1$), podendo ser positivo ou negativo, nas definições das sequências de soluções (\mathbf{u} , λ), permitam o avanço contínuo na resposta de força-deslocamento. Por fim o critério de convergência é dado por:

$$\|\mathbf{g}\| \leq tol \quad (3.39)$$

O subincremento de força ($\delta\lambda^{(k)}$) dado na equação 3.37, traz o cálculo do hiperplano atualizado, pode-se optar pelo hiperplano fixo dado pela seguinte equação:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \quad (3.40)$$

3.4 ALGORITMO PROPOSTO

O método de Newton-Raphson promove apenas uma solução de um simples ponto no caminho de equilíbrios. Portanto, abaixo é fornecido um algoritmo para obter mais pontos, combinando-se as iterações de Newton-Raphson a um procedimento incremental, com a técnica com comprimento de arco linear.

Figura 3.10 – Procedimento incremental-iterativo para o Método de Newton-Raphson associado à técnica do Comprimento Arco Linear.

Entrada: $\Delta l^{(0)}, k_{m\acute{a}x}, Nd, tol, \Delta P, n_{m\acute{a}x}$	14. $\delta\mathbf{u} \leftarrow \delta\mathbf{u}_g + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_r$
Saída: $\mathbf{u}, \lambda, NP, k_{total}$	15. $\Delta\mathbf{u} \leftarrow \Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$
1. $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}, \Delta\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}, \lambda \leftarrow 0, k_{total} \leftarrow 0$	16. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda$
2. Para $NP \leftarrow 1, \dots, n_{m\acute{a}x}$	17. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$
3. $\delta\mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u})]^{-1} \mathbf{F}_r$	18. Se $\ \mathbf{g}\ \leq tol \ \mathbf{F}_r\ $
4. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta l / \ \delta\mathbf{u}_r\ $	19. Terminar a execução do Para
5. Se $\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_r < 0$	20. Fim-Se
6. $\Delta\lambda \leftarrow -\Delta\lambda$	21. $\delta\mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})]^{-1} \mathbf{F}_r$
7. Fim-Se	22. Fim-Para
8. $\Delta\mathbf{u}^{(0)} \leftarrow \Delta\lambda \delta\mathbf{u}_r$	23. $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$
9. $\Delta\mathbf{u} \leftarrow \Delta\mathbf{u}^{(0)}$	24. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$
10. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$	25. $\Delta l \leftarrow \Delta l^{(0)} (Nd/k)^{0.5}$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, k_{m\acute{a}x}$	26. $k_{total} \leftarrow k_{total} + k$
12. $\delta\mathbf{u}_g \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})]^{-1} \mathbf{g}$	27. Fim-Para
13. $\delta\lambda \leftarrow -(\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_g) / (\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_r)$	

Fonte: (SOUZA; SANTOS; KAWAMOTO, 2019).

4 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

O grande objetivo da Confiabilidade Estrutural é analisar a probabilidade de uma determinada estrutura não vir a falhar para o qual esta foi projetada em toda sua vida útil.

Nogueira (2005) diz que a segurança nas estruturas é garantida via normas e códigos de projetos que especificam um conjunto de regras que determinam limites para as ações impostas nas estruturas. Estes limites são resultados dos avanços da tecnologia dentro da engenharia, e que apesar de todo estes estudos das estruturas, dos materiais, os avanços científicos não consideram a natureza aleatória das variáveis envolvidas nos projetos. Ou seja, projeta-se hoje estruturas utilizando métodos determinísticos, onde, apesar de representar o comportamento estrutural, não se entende de maneira adequada o grau de incerteza ocorrido, podendo causar, situações indesejáveis não previstas inicialmente.

Neste contexto, a confiabilidade avalia as incertezas nas variáveis de projeto, em que, seu objetivo principal é determinar uma probabilidade de ocorrência de falha na estrutura, ou, a função de uma estrutura está sendo desempenhada adequadamente. Portanto, a confiabilidade vem medir a probabilidade de a estrutura infringir uma determinada função de estado limite ou função de falha $G(\mathbf{X}) = 0$ (NOGUEIRA, 2005; SAGRILO, 1994). Em termos probabilístico, a confiabilidade C , pode ser definida por:

$$C = 1 - P_f \quad (4.1)$$

Onde P_f é a probabilidade estrutural de falha. É notável que a ordem de grandeza da P_f em estruturas fica em torno de 10^{-3} a 10^{-6} , ou seja, C varia de 0,99 a 0,9999..

4.1 INCERTEZAS NAS ESTRUTURAS

As incertezas na engenharia podem ser classificadas em três tipos, as incertezas intrínsecas, as incertezas epistêmicas e erro humano.

Incetezas intrínsecas fazem parte da natureza dos processos envolvidos e, portanto, não podem ser eliminadas. Podemos classificá-las em dois tipos (BECK, 2019):

- a) física é aquela que corresponde à aleatoriedade natural dos fenômenos físicos, químicos, biológicos e atmosféricos, que afetam o comportamento de sistemas de engenharia. Temos como exemplo os ventos, ondas, neve, chuva,

tempestades, ciclones, furacões, terremotos, variação da resistência dos materiais dentro de um mesmo lote, variação da durabilidade ou vida útil etc.;

- b) previsão refere-se a condições futuras de um processo ou sistema, em que na maioria das vezes, a informação disponível sobre um determinado processo é limitada a um curto período de tempo, devendo ser extrapoladas para o período de vida útil da estrutura. Durante as fases de projeto e de construção, existem diversas incertezas em relação a resistência dos materiais estruturais e, em relação aos carregamentos que atuarão durante sua vida útil. Conforme os dados vão sendo coletados, este tipo de incerteza pode ser reduzido. Como a elaboração dos projetos antecede a execução da obra, as incertezas de previsão devem ser utilizadas.

As incertezas epistêmicas relacionam o nosso conhecimento sobre as variáveis aleatórias e o processo envolvido para o problema. Pode-se reduzi-las ou eliminá-las, em teoria, pela coleta de informações sobre o processo envolvido ou através de melhor conhecimento do problema. Classificam-se em (BECK, 2019):

- a) estatística: Determinam com base em amostras da curva de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória ou de seus parâmetros e momentos. Quando a média de uma variável é determinada a partir de uma amostra, a variância do resultado corresponde a uma incerteza estatística nesta média;
- b) decisão: Estão relacionadas com a definição sobre um determinado evento ocorreu ou não. Os estados limites, por exemplo, escreve uma equação de estado limite que estabelece uma fronteira discreta entre os estados de sobrevivência e de falha;
- c) modelo: É a representação do comportamento estrutural através de modelos simplificados. Quando se determina a resistência de um elemento de concreto armado em função das resistências do aço, concreto e das dimensões do elemento, inclui um erro de modelo. A incerteza de modelo pode ser representada através de uma variável aleatória e sua distribuição de probabilidade pode ser determinada, por exemplo, realizando comparações entre ensaios experimentais e a resistência determinada via modelo;
- d) fenomenológica: Refere-se ao conhecimento incompleto dos fenômenos envolvidos na sobrevivência de uma estrutura, em particular, se manifesta quando falhas estruturais ocorrem devido a fenômenos ou modos de falha não imaginados pelos projetistas.

Por fim, temos a incerteza devido ao erro humano, ou seja, durante a história sabe-se de diversas falhas de estruturas e obras determinadas pelo erro dos engenheiros. Esses erros podem estar na verificação dos projetos, execução, problemas na operação, inspeção e manutenção e desastres provocados por falhas no alto gerenciamento das instituições.

4.2 VARIÁVEL ALEATÓRIA E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES

Uma (VA) variável aleatória pode assumir vários estados e, sendo uma VA, a ocorrência de um estado particular não pode ser prevista. Porém, afirma-se que um estado particular da variável pode suceder em uma determinada proporção aos demais estados possíveis, ou que um estado particular pode ocorrer para uma determinada probabilidade (BECK, 1999).

Como exemplo, arremessa-se uma moeda, onde o resultado ou a face desejada é uma VA. O resultado do arremesso é imprevisível, entretanto, se for repetido algumas vezes, pode-se obter $\frac{1}{2}$ dos arremessos resultado na face desejada, uma vez que as duas faces têm a mesma predisposição de ocorrer.

As funções básicas consideradas na confiabilidade de estruturas são (FDP) funções densidade de probabilidade e a (FPA) funções de probabilidade acumulada. As funções são dadas respectivamente pelas eq. 4.2 e 4.3 (NOGUEIRA, 2005).

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(x) dx \quad (4.2)$$

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_x(x) dx \quad (4.3)$$

Onde X é uma VA, a e b são limites do intervalo considerado, $f_x(x)$ é a FDP e $F_X(x)$ é a FPA. Nogueira (2005) determina que para as propriedades do aço e do concreto, as funções de distribuição normal e log-normal são mais indicadas.

4.2.1 Distribuição Normal

Uma das principais distribuição da confiabilidade estrutural, a distribuição normal ou de Gauss tem somente como parâmetros a média μ_X e o desvio padrão σ_X . Portanto a FDP é representado pela eq. 4.4

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] \quad (4.4)$$

A FPA não possui uma forma fechada com a eq. 4.4, sendo então avaliada por integração numérica ou tabelas em caso de média nula e desvio padrão unitário. Uma alternativa para representar uma variável normal se dá na introdução de uma variável auxiliar conhecida como variável reduzida, definida na eq. 4.5.

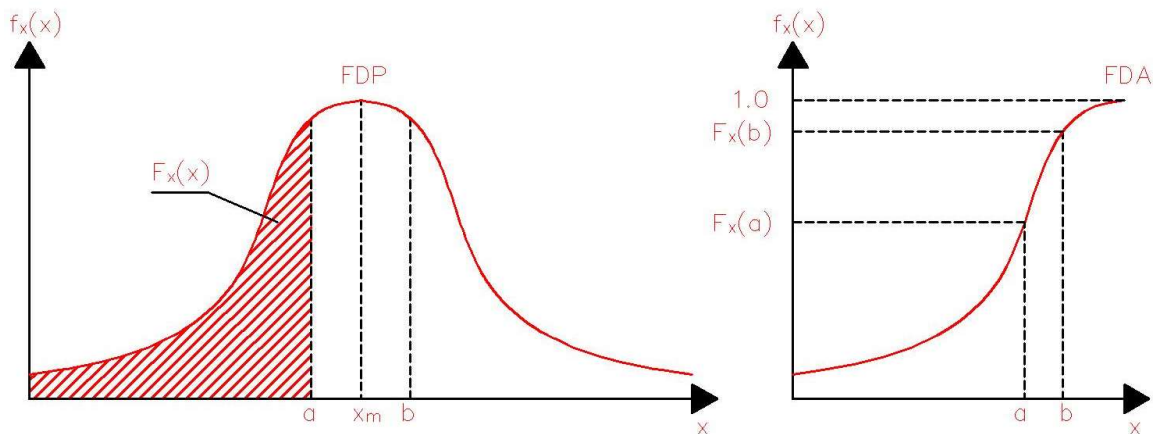
$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (4.5)$$

Substituindo eq. 4.5 em eq. 4.4 e considerando a média nula e o desvio padrão unitário, alcançamos a conhecida distribuição normal padrão de probabilidades e a função acumulada de probabilidade de distribuição normal padrão, são dadas nas eq. 4.6 e eq. 4.7 e plotadas na Figura 4.1.

$$\phi(z) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} (z)^2 \right] = f_Z(z) \quad (4.6)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(z) dz = F_Z(z) \quad (4.7)$$

Figura 4.1 – Distribuição de probabilidade de uma variável normal



Fonte: Autor

Pode-se aproveitar as informações probabilísticas das variáveis normal padrão, utilizando este tipo de transformação para obter valores de FDP e FDA das variáveis normais como nas eq. 4.8 a eq. 4.12.

$$X = \mu_X + Z\sigma_X \quad (4.8)$$

$$\text{FDA: } F_X(x) = P(X \leq x) = P(\mu_X + Z\sigma_X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (4.9)$$

$$z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \therefore P(Z \leq z) \quad (4.10)$$

$$F_X(x) = F_Z(z) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (4.11)$$

$$\text{FDP: } f_X(x) = \frac{dF_X(z)}{dx} = \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} \phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (4.12)$$

4.2.2 Distribuição Log-Normal

Tratando uma variável X por uma distribuição log-normal, ou estatisticamente $\ln(X)$ representado por uma distribuição normal e somente valores positivos para x . A FDP é dado na eq. 4.13.

$$f_X(x) = \frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi} \right)^2 \right] \quad (4.13)$$

Onde λ e ξ são na devida ordem a média e o desvio padrão da variável normal ou $\ln(x)$. Tais parâmetros são abordados nas eq. 4.14 e 4.15.

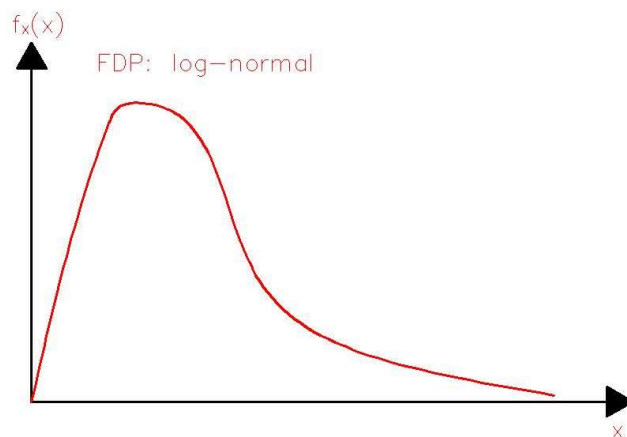
$$\xi^2 = \sigma_{\ln x}^2 = \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x} \right)^2 \right] \quad (4.14)$$

$$\lambda = \mu_{\ln x} = \ln(\mu_x) - \frac{1}{2} \xi^2 \quad (4.14)$$

Pode-se comparar a distribuição acumulada log-normal com a FDA de uma variável normal, pois $\ln(x)$ é normal, eq. 4.15 e Figura 4.2.

$$F_X(x) = F_{\ln x}(\ln(x)) = \Phi \left(\frac{\ln(x) - \mu_{\ln x}}{\sigma_{\ln x}} \right) \quad (4.15)$$

Figura 4.2 – FDP de uma variável log-normal



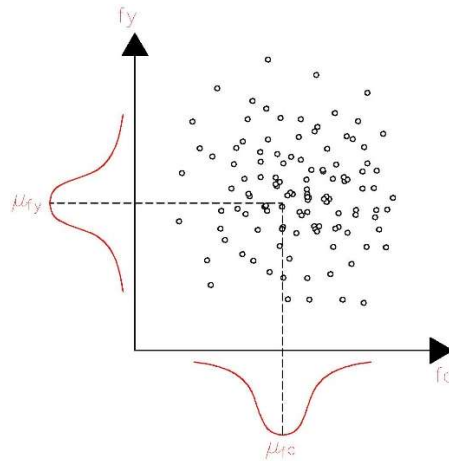
Fonte: Autor

4.2.3 Variáveis Aleatórias Independentes e Correlacionadas

Variáveis aleatórias independentes ou não-correlacionadas são variáveis da qual suas características estatísticas não se modificam em relação a presença de outra variável.

Segundo Nogueira (2005) a vantagem de trabalhar com estas variáveis se dá na transformação isoprobabilística para o espaço normal padrão que é promovida para cada variável de maneira independente, deixando o processo simples e ágil. A figura 4.3 demonstra graficamente duas variáveis independentes (resistência do aço f_y e resistência do concreto f_c).

Figura 4.3 – Duas variáveis aleatórias independentes.



Fonte: Autor

As VA dependentes ou correlacionadas possuem suas características alteradas com a presença de ambas. Toma-se como exemplo, a rigidez dos elementos estruturais de concreto perante a fissuração ou a resistência do aço perante a corrosão. Nogueira (2005) determina o coeficiente de correlação ρ_{XY} , estatisticamente, entre as variáveis X e Y pela conceituação da covariância, expressa na eq. 4.16.

$$COV(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y) \cdot f_{XY}(x, y) \, dx \, dy \quad (4.16)$$

Onde μ_x e μ_y são as médias das VA e f_{XY} é a distribuição de probabilidades conjunta, assim, o coeficiente de correlação é dado na eq. 4.17.

$$\rho_{XY} = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.17)$$

O coeficiente de correlação indica o grau de dependência linear entre as VA X e Y , tendo valores entre -1 e 1. Se obtiver valores em módulo de ρ_{XY} igual a 1, pode-se dizer as VA

são perfeitamente correlacionadas, e ρ_{XY} nulo, diz que pode haver uma correlação entre VA, ainda que não seja linear, o que significa que as VA são dependentes. Quando se tem várias VA, é apropriado utilizar a matriz dos coeficientes de correlação, dado na eq. 4.18.

$$[\rho_{ij}] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

A matriz de correlação é simétrica, no caso de variáveis independentes, os termos da diagonal principal são iguais a unidade. Pode-se obter uma estimativa do coeficiente de correlação para conjuntos de dados aleatórios observados num dado experimento. Em confiabilidade o experimento corresponde a um conjunto de valores provenientes na geração determinística das VA. Com dados iniciais de cada variável, tem-se um vetor com várias combinações. A eq. 4.19 denota a estimativa do coeficiente desta correlação.

$$\rho_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.17)$$

Onde \bar{x} e \bar{y} são as médias das VA e σ_X e σ_Y são os relativos desvio padrão.

A consideração de correlação entre VA provoca a utilização de transformações isoprobabilística especiais para a obtenção de variáveis reduzidas no cálculo da confiabilidade, ou seja, a transformação das variáveis se dá em um espaço existente X para um espaço conhecido Y descrito no ítem 5.1.1 e 5.1.7 deste trabalho.

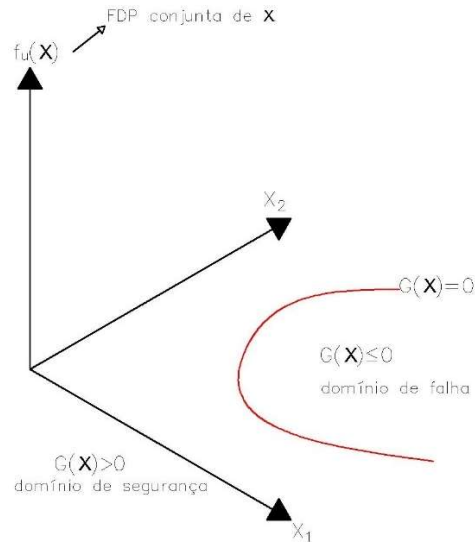
4.3 ESTADO LIMITE

As estruturas são projetadas atualmente pelo método semi-probabilístico, em que os estados limites são definidos pela relação $R_k \geq S_k$, ou seja, a resistência característica do material deve ser maior que a solicitação imposta na estrutura.

Em confiabilidade estrutural a equação do estado limite ou um modo de falha é representado por uma equação que divide o domínio das variáveis do problema em um domínio de falha e um domínio de segurança. Seja a função de falha definida por $G(\mathbf{X})$ e suas variáveis X_1 e X_2 no espaço original \mathbf{X} , temos:

$$G(\mathbf{X}) = R - S = G(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (4.18)$$

Figura 4.4 – Demonstração dos domínios de falha e segurança.



Fonte: Autor

$$D_{falha} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \mid G(\mathbf{X}) \leq 0\} \quad (4.19)$$

$$D_{seguro} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \mid G(\mathbf{X}) > 0\} \quad (4.20)$$

Onde n é o número de VA pertencentes ao espaço original \mathbf{X} .

Como se determina na Figura 4.4, a função de falha separa os domínios do seguro e de falha, sendo os mesmos retratados nas eq. 4.19 e eq.4.20. Para valores negativos da função $G(\mathbf{U})$ representam pontos pertencentes ao domínio de falha determinando a violação de um dado estado limite e valores positivos indicam pontos dentro da região segura e com os quais possam trabalhar. Aplicando o conceito de falha aos problemas de engenharia e com o intuito de abordar o problema da confiabilidade, foi acrescentado na eq. 4.18 o termo das variáveis ($R-S$).

4.4 PROBABILIDADE DE FALHA

O principal problema da Confiabilidade Estrutural é caracterizado pela seguinte integral multidimensional (Z.-H. Lu, et al., 2020; ZHONG et al., 2020):

$$P_f = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} f_x(\mathbf{X}) d\mathbf{x} \quad (4.21)$$

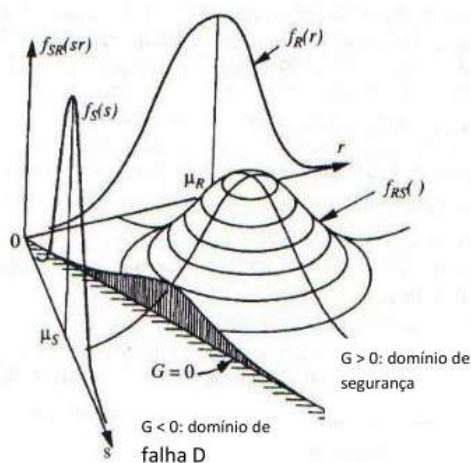
Onde P_f é a probabilidade estrutural de falha; $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ são vetores n-dimensionais das variáveis aleatórias representando quantidade de incertezas como cargas, propriedade dos materiais, dimensões geométricas, condições de contorno; $f_x(\mathbf{X})$ é o ponto da função de densidade de probabilidade (FDP) de \mathbf{X} , $G(\mathbf{X})$ é função de estado limite para $G(\mathbf{X}) \leq 0$ é o domínio de integração que denota a região de falha da estrutura.

O mencionado espaço \mathbf{X} pode ter inúmeras variáveis, caso sejam aleatórias e independentes, FDP marginal de x_i é expressa por:

$$f_x(\mathbf{X}) = f_{x_1}(X_1) \cdot f_{x_2}(X_2) \dots f_{x_n}(X_n) \quad (4.22)$$

Dada as eq. 4.21 e a 4.22, a avaliação da probabilidade de falha que demanda integração da FDP tem-se restringido a problemas com 5 a 6 variáveis (JÚNIOR, 2012, apud SAGRILO, LIMA, 2002). Assim, neste ambiente de dimensionamento estrutural, em que pretende-se atender os requisitos de segurança e serviço, tem-se as VA de resistência (R) e segurança (S) expressas por $P_f = P\{R \leq S\} = P\{R - S \leq 0\}$. A Figura 4.5 faz a representação da probabilidade de falha para as variáveis aleatórias R e S .

Figura 4.5 – Probabilidade de falha entre duas VA.



Fonte: JUNIOR (2012) apud MELCHERS, BECK, (2002)

A dificuldade do cálculo da integral tem levado ao desenvolvimento de técnicas como por exemplo, método de confiabilidade de primeira (FORM) e segunda ordem (SORM), métodos de momentos (FOSM) e de simulação (Simulação de Monte Carlo) (Z.-H. Lu, et al., 2020).

4.4.1 Margem de Segurança

A Margem de segurança (M) é uma variável quantificada que garante o problema $R > S$. Beck (1999) descreve duas definições para M eq. 4.23 e 4.24.

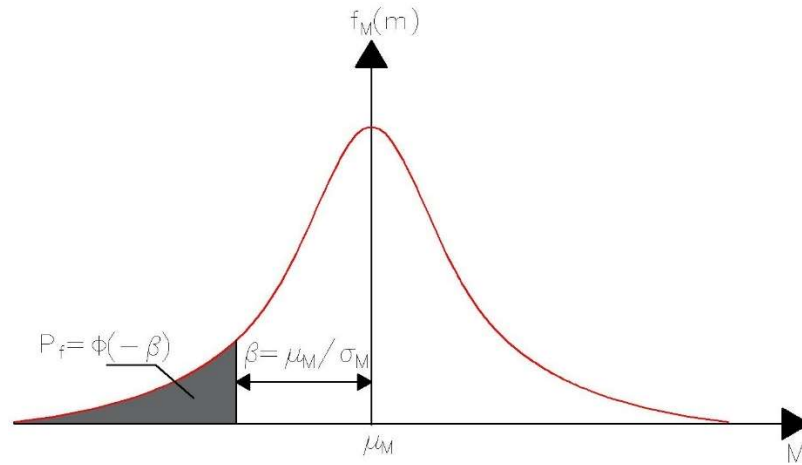
$$M = R - S \quad (4.23)$$

$$M = \frac{R}{S} - 1 \quad (4.24)$$

Observando as equações 4.23 e 4.24, determina-se que valores positivos indicam que o projeto é seguro e se negativo o projeto está fora da região de segurança. Caso obtenha-se valor nulo, a M define o que se conhece por equação de estado limite, onde esta equação divide o espaço das variáveis de projeto em um domínio de falha e um domínio de sobrevivência, portanto, se R e S são variáveis aleatórias, M também será considerada uma VA, assim a probabilidade de falha é calculado na eq. 4.25 e verificado na Figura 4.6 (BECK, 1999).

$$P_f = P(M \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_M(m). dm = F_M(0) \quad (4.25)$$

Figura 4.6 – Probabilidade de falha em função da margem de segurança.



Fonte: Autor

Para esta situação, $F_M(0)$ pode ser obtida a partir da FPA normal padrão $\Phi(\cdot)$, tendo a média de M como $\mu_M = \mu_R - \mu_S$ e o desvio padrão como $\sigma_m = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$. A distribuição de M será transformada em uma distribuição normal padrão Y , com média nula e desvio padrão unitário) pela eq. 4.26.

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (4.26)$$

A transformação abordada na eq. 4.26 permite uma comparação dos valores de M com os valores de probabilidade da curva normal padrão $\Phi(\cdot)$, assim reescreve-se a probabilidade de falha como:

$$P_f = P(M \leq 0) = P\left(y \leq -\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (4.27)$$

$$P_f = \Phi\left[-\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right] = \Phi(-\beta) \quad (4.28)$$

Onde Φ será FPA normal padrão, β é o índice de confiabilidade.

4.5 PARÂMETROS DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE

O índice de confiabilidade é um parâmetro calculado que determina o ponto de origem do espaço padrão até a os limites da equação do estado limite. Em JCSS (2000) (Joint Committe on Structural Safety), foi determinado critérios de aceitação para este parâmetro que auxiliam na otimização de estruturas, como por exemplo, a relocação de material em lugares certos menor será a perda.

Em JCSS (2000), a confiabilidade necessária para a estrutura é moderada por duas situações: a primeira destina-se a evitar erros grosseiros com um conjunto de pressupostos sobre a garantia de qualidade e medidas de gestão da qualidade, em que, estas medidas estão relacionadas com a supervisão da concepção e construção; a segunda destina-se a requisitos formais de probabilidade de falha, condicionados a essas premissas, definidos por valores alvo especificados para várias classes de estruturas e membros estruturais.

Os valores aceitáveis para o índice de confiabilidade foram separados em duas tabelas 4.1 para o Estado Limite Ultimo e 4.2 para o Estado Limite de Serviço.

4.5.1 Estado Limite Último

Os valores definidos para o índice de confiabilidade no estado limitem último (ELU), são obtidos com base na análise de custo-benefício para o público em exemplo de estruturas características e representativas, sendo compatíveis com estudos de calibração e observações estatística.

Tabela 4.1 – Índice de confiabilidade β (taxas de falha associadas) para ELU

1	2	3	4
Custo relativo de segurança quantificada	Menor consequências de falha	Moderada consequências de falha	Maior consequências de falha
Maior (A)	B=3,1 ($P_f \approx 10^{-3}$)	B=3,3 ($P_f \approx 5 \cdot 10^{-4}$)	B=3,7 ($P_f \approx 10^{-4}$)
Normal (B)	B=3,7 ($P_f \approx 10^{-4}$)	B=4,2 ($P_f \approx 10^{-5}$)	B=4,4 ($P_f \approx 5 \cdot 10^{-6}$)
Pequena (C)	B=4,2 ($P_f \approx 10^{-5}$)	B=4,4 ($P_f \approx 5 \cdot 10^{-6}$)	B=4,7 ($P_f \approx 10^{-6}$)

4.5.2 Estado Limite Serviço

Os valores definidos para o índice de confiabilidade no estado limitem de serviço, são:

Tabela 4.2 – Índice de confiabilidade β para ELS

Custo Relativo de Segurança	Índice de Confiabilidade
Quatificada	
Alta	$\beta=1,3$ ($P_f \approx 10^{-1}$)
Normal	$\beta=1,3$ ($P_f \approx 5 \cdot 10^{-2}$)
Baixa	$\beta=2,3$ ($P_f \approx 10^{-2}$)

5 MÉTODO DE TRANSFORMAÇÃO EM CONFIABILIDADE

Em problemas de confiabilidade estrutural independentes do tempo, a determinação ou aproximação da FDP ($f_X(\mathbf{X})$) assim como aproximações do domínio de integração, são diferentes métodos de soluções, principalmente o método de transformação e simulação de Monte Carlo circunda diferentes aproximações de $f_X(\mathbf{X})$ e o domínio de integração (BECK, 2019).

Devido a dificuldades em mensurar a probabilidade de falha, contido na equação 4.21, domínio complexo no qual as variáveis estão inseridas, assim como a função de falha, o grau de dependência de várias variáveis de projeto existentes e a forma como as FDP pode estar distribuídas (não-normal), alguns métodos analíticos (método de transformação) foram desenvolvidos (JUNIOR, 2012):

- FOSM (First Order Second Moment) ou método de primeira e segundo momento;
- FORM (First Order Reliability Method) ou método de confiabilidade de primeira ordem;
- SORM (Second Order Reliability Method) ou método de confiabilidade de segunda ordem.

O objetivo do método de transformação é a busca pelo ponto de projeto, ou seja, identificar o ponto pertencente ao domínio de falha e sobre a função de falha, mais próximo da origem do espaço padrão reduzido e, transformar as variáveis do espaço existente ao espaço padrão reduzido.

Beck (2019) determina que esta transformação é baseada em um mapeamento do vetor de VA do problema, $\mathbf{X} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ com distribuição conjunta de probabilidades arbitrária em um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{Y} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ com distribuição normal padrão, onde n é o número de VA do determinado problema. Para o conjunto \mathbb{X} , chamado espaço de projeto, é aquele que as VA têm dimensões físicas (kN, MPa, m etc.), e para o conjunto \mathbb{Y} denominado “espaço normal padrão” as VA são adimensionais, com média nula e desvio-padrão unitário. Pro fim, o método de transformação está baseado em um mapeamento que levara $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ e de $\mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$.

5.1 FOSM (MÉTODO DE PRIMEIRA ORDEM E SEGUNDO MOMENTO)

No método FOSM a equação do estado limite é aproximada por uma função linear, em que a informação estatística para determinação de $f_X(\mathbf{X})$ limita-se aos momentos de segunda ordem (média e covariância). Uma representação das VA é equivalente a atribuí-las com a distribuição normal, esta hipótese é bastante limitante no tocante à solução de problemas práticos, no entanto, a solução do FOSM é a base teórica para construção de soluções mais completas ou de maior aplicação prática, ou ainda, a base para os demais métodos de transformação (BECK, 2019).

5.1.1 A transformação de Hasofer e Lind

A transformação de Hasofer e Lind, foi mencionada em (4.3.1 Margens de Segurança) e eq. 4.26. Quando se aplica esta transformação a uma variável X com distribuição normal ($X \sim N(\mu, \sigma)$), dá-se em uma variável normal-padrão ($Y \sim N(0, 1)$). Os métodos (FOSM, FORM e SORM) possuem a base da transformação de Hasofer e Lind, aplicada a cada uma das VA do problema:

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

A eq. 5.1 faz a transformação de um conjunto (vetor) de variáveis normal ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \mathbf{D})$) com média e desvio padrão quaisquer, para um conjunto ($\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$) de VA normal padrão com média nula e desvio padrão unitário. A função densidade conjunta de probabilidade possui simetria radial em relação a origem.

5.1.2 Interpretação geométrica do índice de confiabilidade

Promove-se uma interpretação geométrica do β (índice de confiabilidade) aplicando a transformação de Hasofer Lind as variáveis R e S do problema de confiabilidade, e, resolvendo assim, o seguinte problema de otimização (BECK, 2019):

encontrar o ponto: (y_1^*, y_2^*) ,

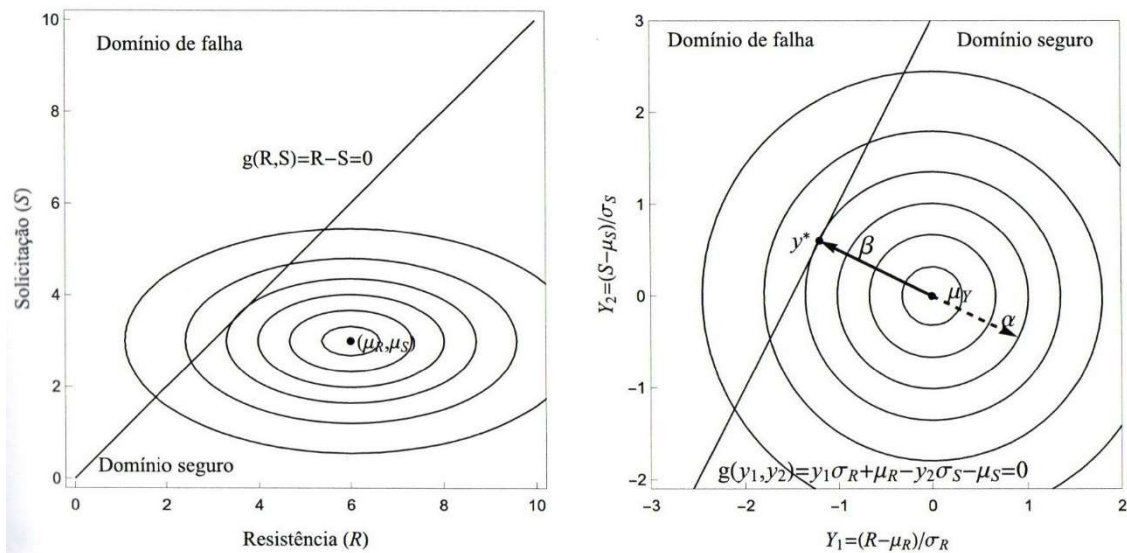
que minimiza: $d^2 = y_1^2 + y_2^2$,
 sujeito a: $g(y_1, y_2) = 0$.

Renomeando M (margem de segurança) como uma equação do estado limite G e transformando as variáveis R e S para Y_1 e Y_2 na eq. 5.2, temos a expressão para equação do estado limite no espaço normal padrão, dado por (BECK, 2019):

$$G = R - S = g(R, S) \quad (5.2)$$

$$g(y_1, y_2) = g(r(y_1), s(y_2)) = y_1\sigma_R + \mu_R - y_2\sigma_S - \mu_S$$

Figura 5.1 – Transformação das variáveis R e S em variáveis normal padrão



Fonte: Beck, 2019

Igualando a eq. 5.2 e isolando y_2 , temos:

$$y_2 = \frac{y_1\sigma_R + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \quad (5.3)$$

Sabe-se que o quadrado da distância entre um ponto qualquer (y_1, y_2) e a origem é $d^2 = y_1^2 + y_2^2$, portanto, derivando em relação a y_1 e igualando a zero, obtém-se a condição de mínimo:

$$2y_1 + 2y_2 \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0$$

$$2y_1 + 2y_2 \frac{\sigma_R}{\sigma_S} = 0 \quad (5.4)$$

Utilizando a eq. 5.4, determinaremos a coordenada y_1^* referente o ponto sobre a eq. 5.2 o mais próximo da origem.

$$y_1^* = -y_2 \frac{\sigma_R}{\sigma_S} = \frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (5.5)$$

Novamente considerando a distância $d^2 = y_1^2 + y_2^2$ e derivando em relação a y_2 e igualando a zero, temos:

$$y_2^* = -y_1 \frac{\sigma_R}{\sigma_S} = \frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (5.6)$$

Unindo os dois resultados (eq. 5.5 e eq. 5.6), as coordenadas do ponto sobre $g(y_1, y_2) = 0$ mais próximo da origem, será:

$$(y_1^*, y_2^*) = \frac{(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} (-\sigma_R, \sigma_S) \quad (5.7)$$

Substituindo a eq. 5.7 em $d^2 = y_1^2 + y_2^2$ e impondo a raiz, detém-se uma expressão para a mínima distância da eq. 5.2 e a origem.

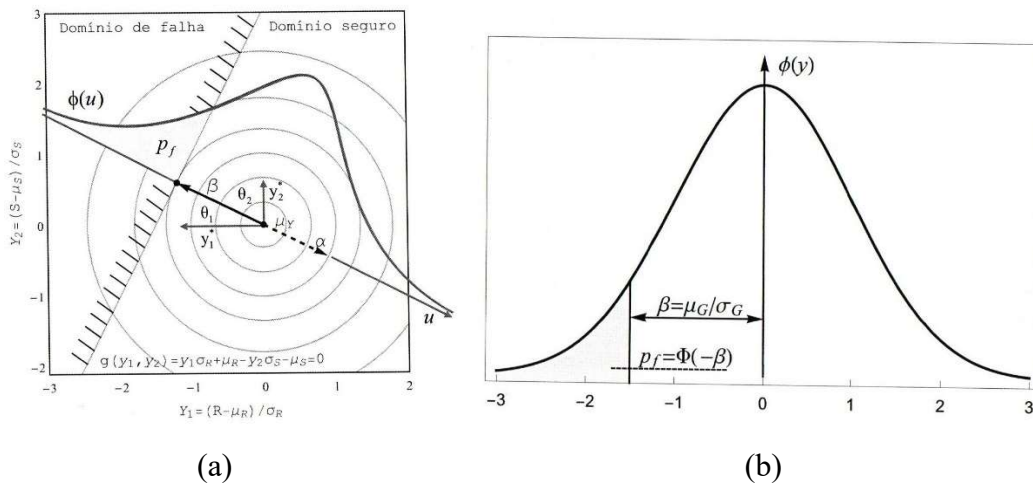
$$d_{min} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (5.8)$$

O resultado obtido na eq. 5.8 é idêntico a equação 4.28 (índice de confiabilidade de Cornell). Pode-se assim generalizar o resultado e constatar que o índice de confiabilidade condiz à mínima distância entre a equação de estado limite e a origem do espaço normal padrão:

$$\beta \equiv d_{min} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (5.9)$$

A Figura 5.1 demonstra a relação entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha (p_f). portanto, a p_f corresponde ao volume de probabilidades na região atrás o hiperplano (área hachurada) na figura. A Figura 5.2, a probabilidade também corresponde à área abaixo da curva (u) sendo calculada por $P_f = \Phi(-\beta)$.

Figura 5.2 – (a) Relação entre P_f e β e (b) aproximação de primeira ordem



Fonte: BECK, 2019, adaptado

5.1.3 O ponto de projeto

O ponto de projeto é indicado por $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ pela equação do estado limite que representa a mínima distância à origem eq. 5.7. O ponto de projeto vem determinar o ponto sobre o domínio de falha com maior probabilidade de ocorrência. Na figura 5.2 (a) verifica-se o ponto de projeto ao fim do vetor β (índice de confiabilidade).

5.1.4 Projeção da origem, vetor α e cossenos diretores

Escreve-se as coordenadas do ponto \mathbf{y}^* e associação com índice de confiabilidade. Assim, introduz-se o vetor unitário α que aponta na direção do crescimento da função $g(\mathbf{y})$.

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\nabla g(y_1, y_2)}{\|\nabla g(y_1, y_2)\|} = \frac{1}{\|\nabla g(y_1, y_2)\|} \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} (\sigma_R, -\sigma_S) \quad (5.10)$$

Substituindo na eq. 5.7 e utilizando a 5.9, temos:

$$(y_1^*, y_2^*) = -\frac{1}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} (\sigma_R, -\sigma_S) \frac{(\mu_R + \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = -(\alpha_1, \alpha_2)\beta \quad (5.11)$$

Na forma vetorial, o resultado é escrito como $\mathbf{y}^* = -\alpha\beta$, como a equação de estado limite do problema é linear, resulta que $\nabla g(y_1, y_2)$ e α são constantes. As coordenadas do ponto de projeto também podem ser escritas em termos de cossenos diretores, conforme ilustrado na figura 5.2 (a).

$$y_1^* = \|\mathbf{y}^*\| \cos(\theta_1) = \beta \cos(\theta_1) \quad (5.12)$$

$$y_2^* = \|\mathbf{y}^*\| \cos(\theta_2) = \beta \cos(\theta_2)$$

5.1.5 Equação do estado limite linear e não linear

Em soluções \mathbb{R}^n uma equação do estado limite $g(\mathbf{x}) = 0$ linear, vem a ser um hiper-plano. A transformação de Hasofer e Lind também será linear e, assim, tem a propriedade de preservar a linearidade da equação do estado limite. Deste modo, a equação de estado limite no espaço \mathbb{Y} , $g(\mathbf{y}) = 0$ é também um hiper-plano, sendo os cossenos diretores destes constantes com função linear (BECK, 2019).

A equação de estado limite para problemas de confiabilidade estrutural são, na maioria das vezes, não lineares, neste caso, as soluções são abordadas em duas partes. A primeira é uma solução de problema de otimização para encontrar o ponto de projeto e o índice

de confiabilidade, a segunda dá-se na aproximação da equação do estado limite por um hiperplano no ponto de projeto.

5.1.6 Solução numérica do problema de otimização

A resolução de um problema de confiabilidade via FOSM ou FORM, consiste em determinar o ponto de projeto das equações não lineares a partir de algoritmo, nesta seção, trataremos do HLRF e iHLRF.

Algoritmo HLRF

Segundo Beck (2019), o algoritmo mais utilizado é o HLRF (Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler), pois continua sendo difundido e utilizado e devido sua simplicidade. Sua fórmula está designada na aproximação da equação de estado limite por um hiperplano e na busca do zero ($g(\mathbf{y})=0$). A desvantagem deste algoritmo está no fato de não existir garantia de convergência.

Em torno de um ponto inicial \mathbf{y}_k , uma série de expansão da equação do estado limite em série de Taylor de primeira ordem, será:

$$g(\mathbf{y}_{k+1}) = g(\mathbf{y}_k) + \nabla g(\mathbf{y}_k)^t (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) \quad (5.13)$$

Sendo $\nabla g(\mathbf{y}_k)$ o gradiente da equação de estado limite no espaço normal padrão. Um novo ponto \mathbf{y}_{k+1} é conhecido sobre a equação linearizada. Se temos $\mathbf{y}_k = -\alpha_k \beta_k$, sendo $\beta_k = \sqrt{\mathbf{y}_k^t \mathbf{y}_k}$ e substituindo na eq. 5.13:

$$\nabla g(\mathbf{y}_k)^t \mathbf{y}_{k+1} = -\nabla g(\mathbf{y}_k)^t (\alpha_k \beta_k) g(\mathbf{y}_k) \quad (5.14)$$

Se a variável α_k possuir comprimento unitário, a eq. 5.14 não será alterada multiplicando o segundo termo por $\alpha_k^t \alpha_k = \frac{-\nabla g(\mathbf{y}_k)^t \alpha_k}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|} = 1$ e eliminando parte da pré-multiplicação pela transposta do gradiente, temos:

$$\mathbf{y}_{k+1} = -\alpha_k \left[\beta_k + \frac{g(\mathbf{y}_k)}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|} \right] \quad (5.15)$$

Na eq. 5.14, uma nova representação do índice de confiabilidade é imposta pelo termo entre colchetes, utilizando de forma iterativa, arbitrando um novo ponto inicial \mathbf{y}_k qualquer até a ocorrência da convergência em \mathbf{y} e em β . Esta expressão fica dependente de α_k , β_k , $\nabla g(\mathbf{y}_k)$, e do valor da função no ponto \mathbf{k} , $g(\mathbf{y}_k)$.

Uma expressão alternativa e apropriada para programação será pós-multiplicando ambos os termos à direita da igualdade da eq. 5.14 pelo termo unitário $\alpha_k^t \alpha_k$. Por fim tem-se:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\nabla g(\mathbf{y}_k)^t \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k)}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|^2} \nabla g(\mathbf{y}_k) \quad (5.16)$$

Algoritmo HLRF melhorado (iHLRF)

O algoritmo HLRF pode ser melhorado por uma busca linear para o ajuste do passo. Assim, a direção da busca será dada pelo algoritmo HLRF (ZHANG, KIUREGHIAN, 1994):

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k = \frac{\nabla g(\mathbf{y}_k)^t \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k)}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|^2} \nabla g(\mathbf{y}_k) - \mathbf{y}_k \quad (5.17)$$

Um novo ponto é determinado no algoritmo original, através de um passo unitário $\lambda_k = 1$, tal que $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$. O algoritmo melhorado, realiza uma busca por um passo ótimo λ_k que minimiza uma função mérito $m(\mathbf{y})$ dado por $\lambda_k = \arg \min[m(\mathbf{y}_k + \lambda \mathbf{d}_k)]$.

Beck (2019) apud Zhang e Kiureghian (1997), propõe uma função mérito dado por $m(\mathbf{y}) = 0,50 \|\mathbf{y}\|^2 + c|g(\mathbf{y})|$ e duas propriedades:

- Para direção de busca \mathbf{d}_k é a direção de descida da função mérito, obedecendo a $c > \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\nabla g(\mathbf{y})\|}$;
- Para convergência do ponto de projeto é garantida, no entanto, desde que observada a mesma restrição em c .

5.1.7 Transformação de Hasofer-Lind matricial

Quando se detém de um grande número de VA é convenientemente trabalhar em forma matricial, uma vez que o método FOSM é facilmente programável. A transformação do espaço de projeto \mathbb{X} para o espaço normal padrão \mathbb{Y} é abordado no método FOSM. A equação de estado limite do problema é formulada e avaliada no espaço de projeto \mathbb{X} , assim como o ponto de projeto é avaliado no espaço \mathbb{Y} , portanto, a solução algorítmica envolve constante transformações de pontos e gradientes de $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ e de $\mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ (BECK, 2019, BECK, ROSA 2006).

O Vetor de médias μ e na matriz diagonal de desvio padrão \mathbf{D} , à transformação de Hasofer-Lind e sua inversa são descritos por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1}\{\mathbf{x} - \mu\} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mu$$

Sendo \mathbf{D}^{-1} a inversa de \mathbf{D} ou a matriz diagonal contendo o inverso dos desvios padrão. As transformações compostas implementadas do método de primeira ordem, trabalha-se com matrizes Jacobianas eq. 5.19, sendo \mathbf{n} o número de VA do problema, a transformação de Hasofer-Lind e a inversa resultam respectivamente eq. 5.20:

$$J_{xy} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right]_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,n} = \mathbf{D} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{y} = J_{yx}\{\mathbf{x} - \mu\} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{x} = J_{xy}\mathbf{y} + \mu$$

O método FOSM, no contexto, não se tem benefício aparente em trabalhar com matrizes Jacobianas para realizar as transformações necessárias. Estes benefícios aparecerão no FORM.

O vetor gradiente é avaliado no espaço \mathbb{X} , para obter o vetor gradiente em \mathbb{Y} utiliza-se (BECK, ROSA, 2006):

$$\nabla g(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}_{yx})^t \nabla g(\mathbf{x}) \quad (5.21)$$

5.1.8 Algoritmo FOSM

Em Beck (2019) são descritos os passos de um algoritmo para a determinação do índice de confiabilidade para o método de transformação FOSM:

Passo 1. Escolha do ponto inicial \mathbf{x}_k para $k = 0$ (utiliza-se usualmente o ponto médio);

Passo 2. Avaliação das matrizes Jacobianas \mathbf{J}_{yx} e \mathbf{J}_{xy} ;

Passo 3. Transformação do ponto \mathbf{x}_k de \mathbb{X} para \mathbb{Y} ;

Passo 4. Verificação de $g(\mathbf{x}_k)$;

Passo 5. Cálculo do gradiente:

a. Cálculo das derivadas parciais de $g(\mathbf{x}_k)$ no espaço de projeto \mathbb{X}

b. Transformação do gradiente para \mathbb{Y}

c. Cálculo dos fatores de sensibilidade linearizados $\alpha(\mathbf{y}_k)$.

Passo 6. Cálculo do novo ponto \mathbf{y}_{k+1} pelos algoritmos *HRLF*, *iHRLF*;

Passo 7. Transformação de \mathbf{y}_{k+1} para \mathbb{X} ;

Passo 8. Verificação do critério de convergência. Se: $1 - \frac{|\nabla g(\mathbf{y}_{k+1})^t \mathbf{y}_{k+1}|}{\|\nabla g(\mathbf{y}_{k+1})\| \|\mathbf{y}_{k+1}\|} < \epsilon$ e

$|g(\mathbf{y}_{k+1})| < \delta$, o algoritmo é interrompido $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}_{k+1}$, caso contrário retorne ao Passo 4 com $k = k + 1$ até atingir a convergência.

Passo 9. Ao final, avaliar do índice de confiabilidade no ponto de projeto: $\beta = \|\mathbf{y}^*\|$.

Atente-se que as matrizes Jacobianas não mudam ao longo do processo iterativo, portanto, só precisam ser calculadas ao início da solução.

5.2 FORM (MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM)

O FORM é um método eficaz para análise de confiabilidade e comumente utilizado em problemas de engenharia estrutural, por tanto, o índice de confiabilidade é uma medida prática que avalia a probabilidade de falha da estrutura dado por (ZHONG et al., 2020):

Assim como o FOSM, o método FORM determina uma aproximação ao problema da confiabilidade estrutural, desenvolvendo as seguintes etapas: Transformação de variáveis, formulação como um problema de otimização com restrições no espaço reduzido, determinação do índice de confiabilidade e, por fim, cálculo da probabilidade de falha (JÚNIOR, MATIOLI, CAVACHIOLO, 2020).

Por Júnior, Matioli e Cavachiolo (2020) No espaço reduzido indica o espaço vetorial gerado pela superfície normalizada e pela aproximação da superfície de falha, ou equação de estado limite. No método FORM a superfície de falha é aproximada por variáveis aleatórias não correlacionadas associadas.

O método de primeira ordem, segundo Beck (1999) pode ser dividido em três etapas:

- Caracterização da FDP conjunta $f_X(\mathbf{x})$ do espaço original de projeto \mathbb{X} para o espaço normal padrão \mathbb{Y} (média igual a 0 e desvio padrão igual a 1);
- Determinação das coordenadas do ponto de projeto em \mathbb{Y} , através de um algoritmo de otimização.
- Aproximação de primeira ordem da P_f (eq. 4.21) no ponto de projeto.

A transformação das variáveis do espaço original para o espaço padrão normal reduzido, pode ser realizado através da transformação de Rosenblatt, porém esta envolve distribuições de probabilidade condicionais de difíceis avaliação. Uma alternativa é a transformação do modelo de Nataf, que envolve uma transformação em variáveis normais equivalentes e eliminando as correlações entre estas.

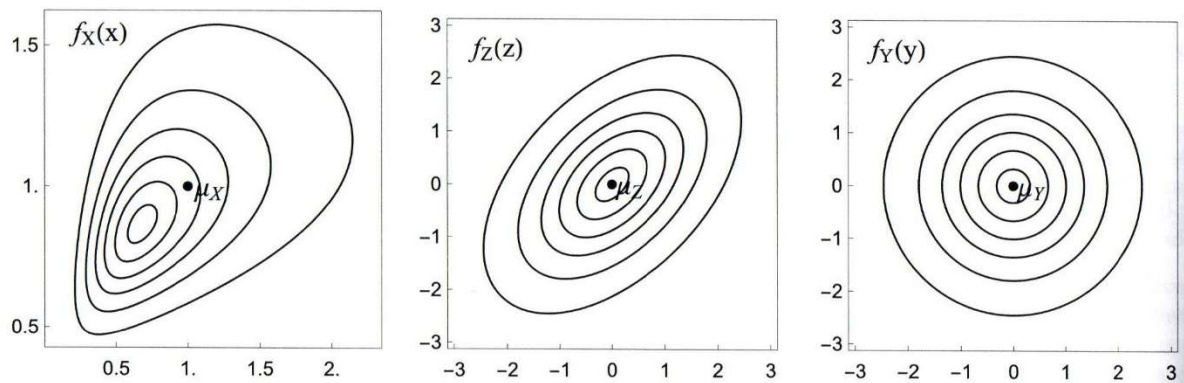
5.2.1 Transformação utilizando o modelo de Nataf

O modelo de Natal é uma transformação prática, pois se adequa as informações disponíveis. Segundo Beck (2019) é considerada composta pois:

- A transformação das distribuições marginais originais em distribuições normais equivalentes (conjunto de variáveis \mathbf{Z} com dependência linear);
- Determinação dos coeficientes de correlação equivalente para as distribuições normais;
- Eliminação da correlação, através da decomposição ortogonal ou da fatoração de Cholesky da matriz de correlação.

Os passos descritos acima são retratados na figura 5.3.

Figura 5.3 – Transformação Composta



Fonte: BECK (2019)

A figura 5.3 ilustra a transformação composta $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$. As variáveis X_1 e X_2 possuem distribuições marginais lognormais, isto explica a forma de “ostra” das curvas de nível à esquerda.

Decomposição de Cholesky da matriz de correlação

A decomposição de Cholesky é uma alternativa que se aplica com vantagens para matrizes de correlação não cheias \mathbf{C}_Z . Esta decomposição não tem relação direta com a transformação de Rosenblatt, porém, resulta em uma matriz e transformação semelhante.

Busca-se uma transformação linear $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^t \mathbf{Z}$ que produza um conjunto de variáveis \mathbf{Y} independentes e com variância unitária, assim:

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{B}^t \mathbf{C}_Z \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (5.22)$$

Se pré-multiplicar a eq. 5.22 por $(\mathbf{B}^t)^{-1}$ e pós multiplicar por \mathbf{B}^{-1} , temos:

$$\mathbf{C}_Z \mathbf{B} = (\mathbf{B}^t)^{-1} \mathbf{I} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{C}_Z = (\mathbf{B}^t)^{-1} \mathbf{I} \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B}^t)^{-1} \mathbf{B}^{-1}$$

Utilizando a relação $(\mathbf{B}^t)^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})^t$ e expondo $(\mathbf{B}^t)^{-1} = \mathbf{L}$, temos

$$\mathbf{L} = (\mathbf{B}^t)^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})^t \quad (5.24)$$

$$\mathbf{L}^t = \mathbf{B}^{-1}$$

Substituindo a eq. 5.24 na eq. 5.23 chega-se a:

$$\mathbf{C}_Z = (\mathbf{B}^t)^{-1} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{L} \mathbf{L}^t \quad (5.25)$$

Esta expressão é precisamente a decomposição de Cholesky (ANDRETA, 2008), obtido através de algoritmos conhecidos. Adequando está transformação nas matrizes jacobianas, temos:

$$\mathbf{J}_{YZ} = \mathbf{L}^{-1} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{J}_{ZY} = \mathbf{L}$$

Transformação resultante

A transformação resultante é o mapeamento de um vetor de VA de um espaço $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$. Para combiná-las, utiliza-se a regrada da cadeia:

$$\mathbf{J}_{yx} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right] = \left[\frac{\partial y_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_k} \right] = \mathbf{J}_{yz} \mathbf{J}_{zx} \quad (5.27)$$

$$J_{xy} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial y_k} \right] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial y_k} \right] = J_{xz} J_{zy}$$

A transformação será:

$$\mathbf{y} = J_{yx} \{ \mathbf{x} - \mu^{neq} \} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{x} = J_{xy} \mathbf{y} + \mu^{neq}$$

A matriz jacobiana composta J_{yx} e sua inversa J_{xy} podem ser obtidas utilizando a decomposição ortogonal eq. 5.29 ou a decomposição de Cholesky eq. 5.30.

$$J_{yx} = (\bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Lambda}^{-0,5})^t (\mathbf{D}^{neq})^{-1} \quad (5.29)$$

$$J_{xy} = \mathbf{D}^{neq} (\boldsymbol{\Lambda}^{0,5} \bar{\mathbf{A}})^t$$

$$J_{yx} = L^{-1} (\mathbf{D}^{neq})^{-1} \quad (5.30)$$

$$J_{xy} = \mathbf{D}^{neq} L$$

5.2.2 Algoritmo FORM

Em Beck (2019) são descritos os passos de um algoritmo para a determinação do índice de confiabilidade para o método de transformação FORM:

Passo 1. Determinar os coeficientes de correlação e da matriz de decomposição (Cholesky); determinação das matrizes J_{yz} e J_{zy} ;

Passo 2. Escolha do ponto inicial \mathbf{x}_k para $k = 0$ (utiliza-se usualmente o ponto médio);

Passo 3. Renovação das matrizes Jacobianas J_{yx} e J_{xy} (eq. 5.29 e eq. 5.30);

Passo 4. Transformação do ponto \mathbf{x}_k de \mathbb{X} para \mathbb{Y} (eq. 5.28);

Passo 5. Verificação de $g(\mathbf{x}_k)$;

Passo 6. Cálculo do gradiente:

- a. Cálculo das derivadas parciais de $g(\mathbf{x}_k)$ no espaço de projeto \mathbb{X}
- b. Transformação do gradiente para \mathbb{Y} (eq. 5.21)
- c. Cálculo dos fatores de sensibilidade linearizados $\alpha(\mathbf{y}_k)$. Estes fatores podem ser utilizados para eliminar do problema da VA quem tenham pouca influência na probabilidade de falha

Passo 7. Cálculo do novo ponto \mathbf{y}_{k+1} pelos algoritmos *HLRF*, *iHRLF*;

Passo 8. Transformação de \mathbf{y}_{k+1} para \mathbb{X} (eq. 5.28);

Passo 9. Verificação do critério de convergência. Se: $1 - \frac{|\nabla g(\mathbf{y}_{k+1})^t \mathbf{y}_{k+1}|}{\|\nabla g(\mathbf{y}_{k+1})\| \|\mathbf{y}_{k+1}\|} < \epsilon$ e $|g(\mathbf{y}_{k+1})| < \delta$, o algoritmo é interrompido, caso contrário retorne ao Passo 3 com $k = k + 1$ até atingir a convergência.

Passo 10. Ao final, avaliar do índice de confiabilidade no ponto de projeto: $\beta = \|\mathbf{y}^*\|$.

5.3 SORM (MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE SEGUNDA ORDEM)

O método SORM utiliza a mesma informação estatística para construção da função conjunta de densidades de FORM, porém, este aproxima a equação de estado limite por uma equação quadrática (JÚNIOR, MATIOLI, CAVACHIOLO, 2020). Quando um hiperparabolóide é ajustado de modo que suas curvaturas principais combinam com as curvas principais da superfície do estado limite, o SORM obtém outra probabilidade de falha (BECK, ROSA, 2006).

O ajuste de um determinado parabolóide na equação de estado limite será dá através da determinação de um sistema apropriado de eixos ortogonais, onde o n -ésimo eixo $\hat{\mathbf{v}}_n$ deste sistema é escolhido de forma a apontar da origem para o ponto de projeto, assim temos:

$$\hat{\mathbf{v}}_n = - \frac{\nabla g(\mathbf{y}^*)}{\|\nabla g(\mathbf{y}^*)\|} \quad (5.31)$$

Para os eixos $\hat{\mathbf{v}}_i$, $i=1, \dots, n-1$ são determinados a partir de um esquema de ortogonalização. Uma matriz \mathbf{V} ($\mathbf{V} = [\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{n-1}]$) é formada obtendo $\hat{\mathbf{v}}_i$ como coluna. Tratando-se de um sistema ortogonal $\hat{\mathbf{v}}_i$, a equação de estado limite é dado por $v_n = g'(\mathbf{v}_{n-1})$.

O parabolóide é ajustado às curvaturas da equação de estado limite no ponto de projeto, dado por:

$$v_n = \beta + 0,5 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} v_i v_j = \beta + 0,5 (v_{n-1})^t \mathbf{A} v_{n-1} \quad (5.32)$$

Onde a matriz \mathbf{A} de derivadas de segunda ordem de $g'(v_{n-1})$. Sendo a matriz de derivadas de segunda ordem (matriz Hessiana) $\mathcal{H}(\mathbf{y}^*)$ da equação de estado limite, tem-se:

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}^*) = \left[\frac{\partial^2 g(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} \right]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n} \quad (5.33)$$

A matriz \mathbf{A} é determinada a partir da matriz de rotação \mathbf{V} :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{V}^t \mathcal{H}(\mathbf{y}^*) \mathbf{V}}{\|\nabla g(\mathbf{y}^*)\|} \quad (5.34)$$

Por fim, a estimativa de segunda ordem da probabilidade de falha será (BECK, ROSA, 2006):

$$p_f \approx p_{f_{so}} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta k_i}} \quad (5.35)$$

Segundo Beck (2019) a eq. 5.35 se torna singular quando $k_i = -1/\beta$, o que nos diz nem sempre o SORM fornece uma estimativa melhor do que a aproximação de primeira ordem.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste Capítulo serão separados em três partes: a primeira para a validação do algoritmo da análise não linearidade geométrica de estruturas via método Corrotacional dos Elementos Finitos e a confiabilidade estrutural; a segunda será analisada o pórtico de LEE e apresentado os resultados obtidos da confiabilidade estrutural e; a terceira para a análise do pórtico de WILLIAMS apresentado os resultados obtidos da confiabilidade estrutural.

Para ambos os pórticos será determinado a dimensão ideal para carga crítica de acordo com índice de confiabilidade determinado na Fig. 6.1:

Figura 6.1 – Índice de confiabilidade relacionados ao período de referência de um ano.

1	2	3	4
Relative cost of safety measure	Minor consequences of failure	Moderate consequences of failure	Large consequences of failure
Large (A)	$\beta=3.1$ ($p_F \approx 10^{-3}$)	$\beta=3.3$ ($p_F \approx 5 \cdot 10^{-4}$)	$\beta=3.7$ ($p_F \approx 10^{-4}$)
Normal (B)	$\beta=3.7$ ($p_F \approx 10^{-4}$)	$\beta=4.2$ ($p_F \approx 10^{-5}$)	$\beta=4.4$ ($p_F \approx 5 \cdot 10^{-6}$)
Small (C)	$\beta=4.2$ ($p_F \approx 10^{-5}$)	$\beta=4.4$ ($p_F \approx 5 \cdot 10^{-6}$)	$\beta=4.7$ ($p_F \approx 10^{-6}$)

Fonte: JCSS, 2001.

O algoritmo implementado para verificação da Análise da Não Linearidade Geométrica, pode ser encontrado e estudos mais detalhados em notas de aula (SOUZA, 2021). Para o algoritmo implementado para a verificação da Confiabilidade Estrutural pode ser encontrado no Apêndice A.

As configurações do Computador utilizado são: processador Intel® Core(TM) i7-8550U CPU @1.80GHz 1.99GHz; memória RAM 12,0 GB.

6.1 VALIDAÇÃO DOS ALGORITMOS

6.1.1 Validação Algoritmo Não Linearidade Geométrica

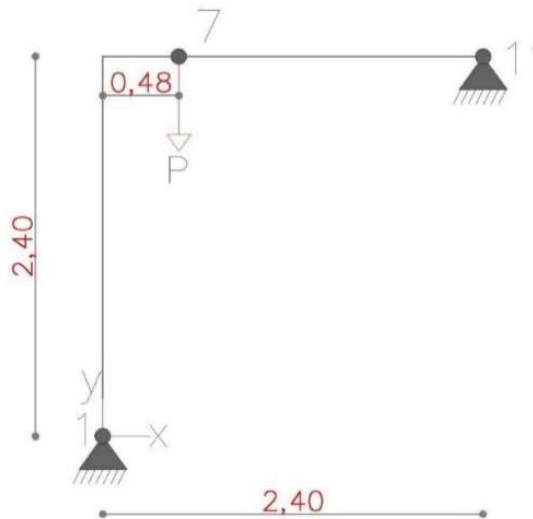
A estrutura do pórtico de Lee consiste no problema de grande rotação e deslocamento e instabilidade, sendo aplicado em esquemas de Newton, mostrando-se um comportamento de

snap-back (SCHWEIZERHOF, WRIGGERS, 1968). É amplamente utilizada por pesquisadores, a fim de validar o esquema de solução não linear (SOUZA, 2017b).

A estrutura estudada foi retirada do trabalho de Yaw (2009a), como pode ser visto na figura 6.1. As características geométricas e materiais são: área de seção igual a $6,0 \text{ cm}^2$, momento de inércia igual a $2,0 \text{ cm}^4$ e módulo de Young igual a $7.060,8 \text{ kN/cm}^2$. Foram adotados, para o processo incremental-iterativo os seguintes parâmetros: comprimento de arco inicial $\Delta l = 2,5$; número de iterações desejadas $N_d = 4$; e tolerância $\text{tol} = 1 \times 10^{-5}$.

O pórtico foi discretizado em 11 nós e 10 elementos e foram considerados apoios rotulados de segundo gênero (nós 1 e 11 da malha), cujas translações estão restringidas.

Figura 6.2 – Pórtico de Lee, geometria e carga (unidades em metro).

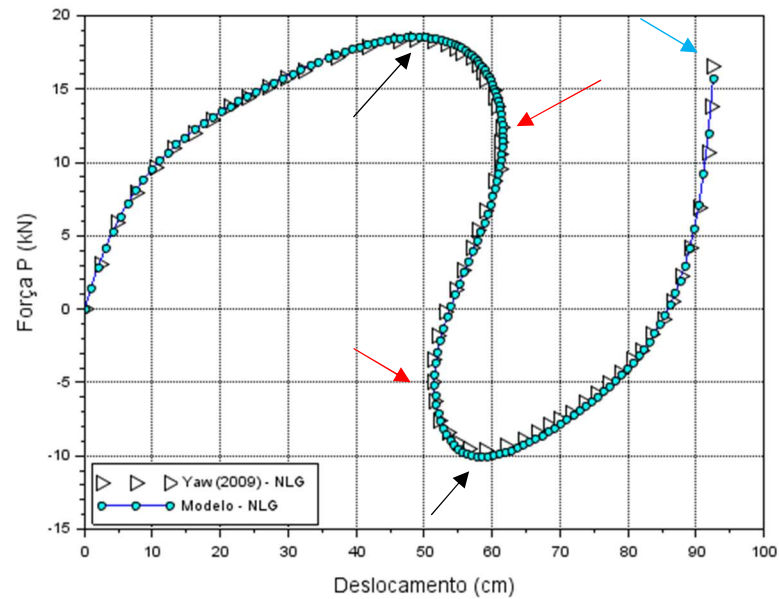


Fonte: Autor

Após a análise, obteve o tempo de processamento de 4,42s, o número de iterações acumuladas foram 457 e o número de passos de carga foram de 156.

Na Figura 6.2 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio, carga *versus* deslocamento, correspondente ao deslocamento vertical do nó 7, em que foi posta a carga P. Observa-se a proximidade dos resultados obtidos do programa desenvolvido com os resultados do trabalho de Yaw (2009).

Figura 6.3 – Comparação do gráfico carga versus deslocamentos.

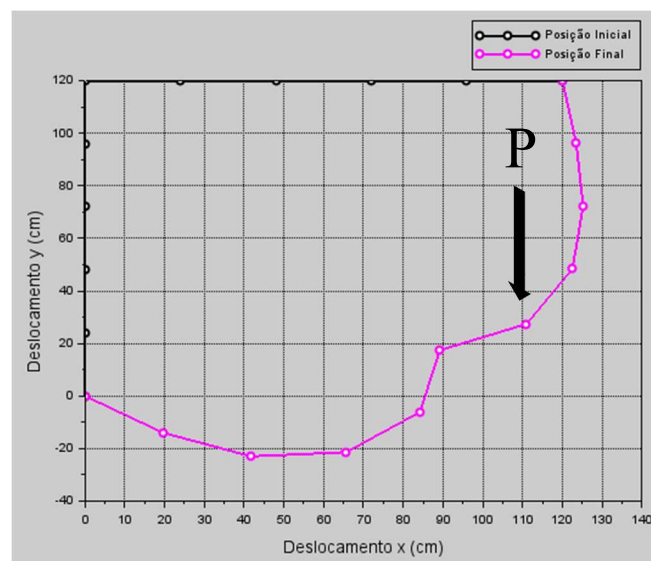


Fonte: Autor

Ainda na Figura 6.2 podem-se observar os pontos limites nas setas em preto têm-se os pontos limites de carga máxima e mínima, nas setas vermelhas, têm-se os pontos limites de deslocamentos em que possa traçar a tangente vertical; e, por fim, a seta azul, que indica o ponto de falha.

Na figura 6.3 encontram-se as configurações da estrutura para o passo de carga referente à posição inicial ($N_p=0$) e à posição final ($N_p=156$) (deformada), indicado a carga P no nó 7.

Figura 6.4 – Deformada da estrutura.

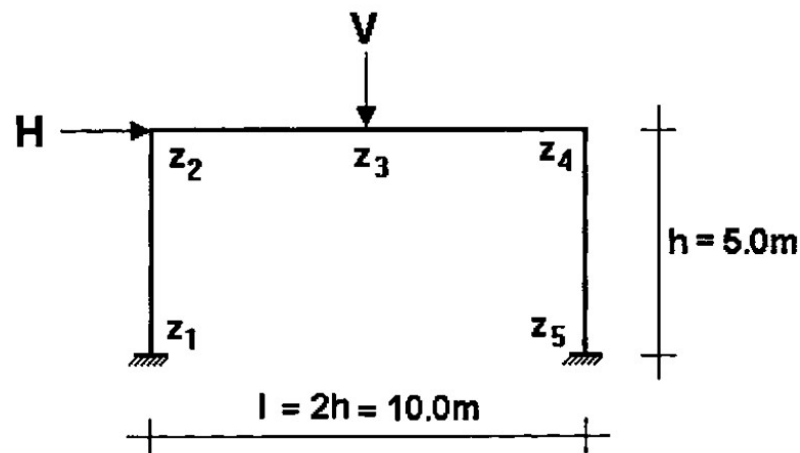


Fonte: Autor

6.1.2 Validação Algoritmo Confiabilidade Estrutural

A validação do algoritmo de confiabilidade foi feita utilizando o trabalho do Sagrilo (1994). Neste exemplo, calculam-se o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha de um pórtico. A estrutural é apresentada na Figura 6.4.

Figura 6.5 – Pórtico Plano.



Fonte: SAGRILO, 1994.

Nesta imagem, as variáveis H , V , Z_1 , ... Z_5 são a carga horizontal, a carga vertical e os momentos plásticos resistentes, respectivamente. O valor das variáveis será mostrado na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média	Desvio Padrão
Z_1, \dots, Z_5	Lognormal	134,90	13,49
H	Lognormal	50,00	15,00
V	Lognormal	40,00	12,00

Unidades: kN e m

Neste exemplo, foi verificado a probabilidade de falha em três situações. Cada situação há uma função de falha a ser avaliada (G_1 , G_2 e G_3), conforme as equações abaixo:

$$G_1(\mathbf{U}) = Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_5 - H * h \quad (6.1)$$

$$G_2(\mathbf{U}) = Z_1 + 2 * Z_2 + 2 * Z_4 + Z_5 - H * h - V * h \quad (6.2)$$

$$G_3(\mathbf{U}) = Z_2 + 2 * Z_3 + Z_4 - V * h \quad (6.3)$$

Os resultados do trabalho de Sagrilo (1994) e os obtidos do algoritmo serão comparados entre o β (índice de confiabilidade) e a P_f (Probabilidade de falha), descritos na tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Validação dos resultados

Função Falha	β		P_f	
	Sagrilo (1994)	Obtidos	Sagrilo (1994)	Obtidos
G_1	2,712	2,7118	3,35E-3	3,3E-3
G_2	2,883	2,8911	1,97E-3	1,9E-3
G_3	3,437	3,5039	2,94E-4	2,2928E-4

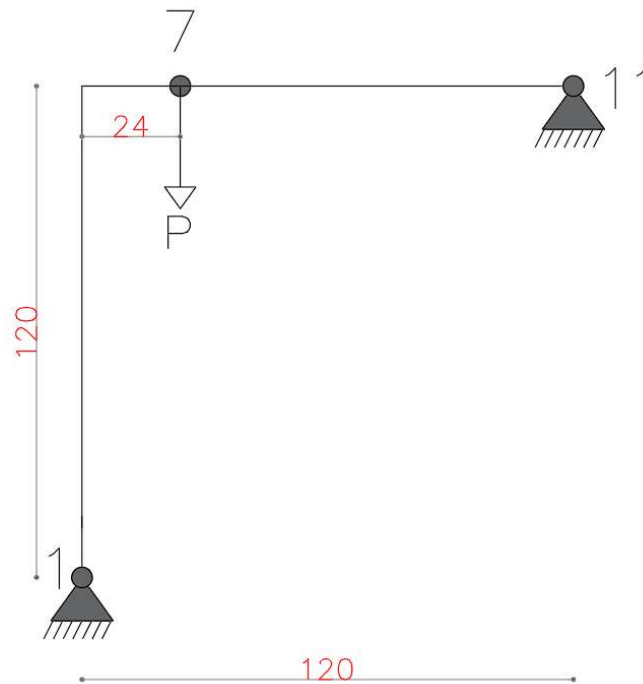
6.2 PORTICO DE LEE

Para o primeiro exemplo será utilizado o pórtico de LEE descrito na Figura 6.5. Neste problema o pórtico foi discretizado em 11 nós e 10 elementos, sendo considerados apoios do tipo pino (nós 1 e 11 da malha), cujas translações estão restringidas. Foram adotados, para o processo incremental-iterativo os seguintes parâmetros: comprimento de arco inicial $\Delta l = 2,5$; número de iterações desejadas $N_d = 4$; e tolerância $tol = 1 \times 10^{-5}$. As características geométricas são apresentadas na Tabela 6.3. Para o critério de convergência do método FORM foi utilizada uma tolerância de $1,0 \times 10^{-2}$ (JUNIOR, 2012).

Tabela 6.3 – Parâmetros do pórtico LEE

Parâmetros constantes	Valores médios iniciais
Área (A)	6,25 cm ²
Inércia (I)	3,26 cm ⁴
Comprimento das barras (L)	120 cm
Módulo de Elasticidade	720 kN/cm ²
Carga (P)	2 kN

Figura 6.6 – Pórtico de LEE (medidas em cm).



Fonte: Autor.

Inicialmente, para avaliar o índice de confiabilidade e, conseqüentemente, a probabilidade de falha, deve-se obter a função de falha, a qual determina o limite do ponto de falha Figura 4.4. Segundo Júnior (2012) e Galvão (2002), a equação da função de falha para a análise do pórtico de LEE é dada por:

$$G(X) = P_{cr} - P \quad (6.4)$$

Onde, $P_{cr}(X)$ é o valor da carga crítica, resultado da análise não linear do pórtico e P é o valor da carga aplicada.

A variável aleatória para o problema analisado foi a dimensão da seção quadrada (d). Portanto, foram analisados oito pórticos com dimensões variando de 2,50 cm a 2,85 cm e com aumento de seção a cada 0,05 cm, descrito na tabela 6.4. Na tabela 6.4, são apresentadas a Área,

o momento de inércia, a Carga crítica, índice de confiabilidade e a probabilidade de falha para cada análise do pórtico.

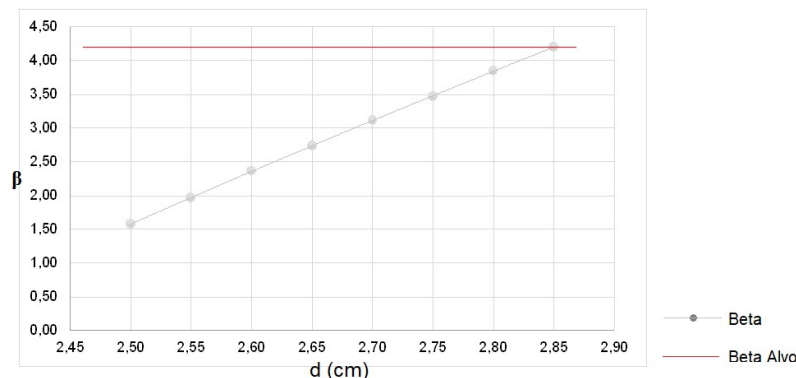
Tabela 6.4 – Variável Aleatória e resultados

Pórtico	d (cm)	A (cm ²)	I (cm ⁴)	P _{cr}	β	P _f
1	2,50	6,25	3,26	3,088	1,5790	5,72*10 ⁻²
2	2,55	6,5	3,52	3,335	1,9674	2,46*10 ⁻²
3	2,60	6,76	3,81	3,607	2,3639	9,00*10 ⁻³
4	2,65	7,02	4,11	3,890	2,7346	3,10*10 ⁻³
5	2,70	7,29	4,43	4,195	3,1192	9,07*10 ⁻⁴
6	2,75	7,56	4,77	4,512	3,4736	2,57*10 ⁻⁴
7	2,80	7,84	5,12	4,852	3,8470	5,98*10 ⁻⁵
8	2,85	8,12	5,50	5,205	4,2012	1,33*10 ⁻⁵

A média seria o próprio (d) e o coeficiente de variação (C.V.) é 0,05 (JUNIOR, 2012), portanto aumentando o lado da seção em 0,05 cm, e tendo como beta alvo ($\beta=4,2$ e $P_f=10E-5$), ou seja, para consequências de falha moderada de acordo com (JSCC, 20010) temos um limite para a dimensão da seção em relação a carga.

O gráfico da Figura 6.7, mostra o comportamento entre o índice de confiabilidade e o aumento da seção.

Figura 6.7 – Relação d x β.



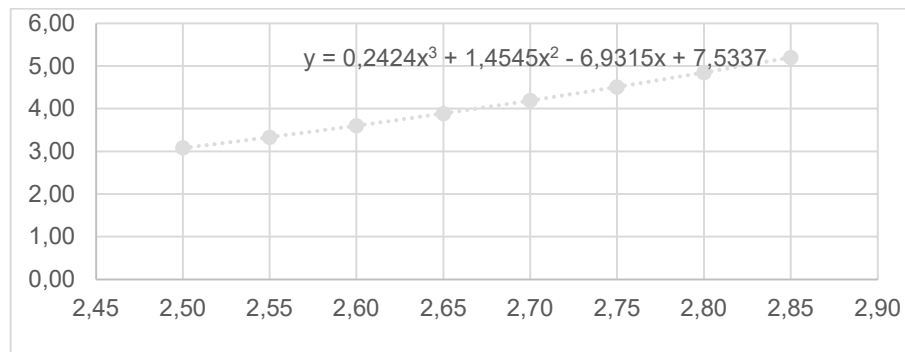
Portanto, se utilizarmos uma seção abaixo de 2,85 cm estás contra a segurança, se for uma seção maior estás utilizando material a mais.

Em Júnior (2012) foi calculado uma probabilidade de falha para cada dimensão da seção. Com as dimensões e as cargas críticas para cada pórtico, foi interpolado um polinômio

que relacionasse os oito índices d e P_{cr} . Utilizando esta nova equação como uma função de falha, economiza-se tempo computacional para a determinação da probabilidade de falha.

Neste exemplo, a equação resultante entre a relação ($d \times P_{cr}$) interpolação não linear e a nuvem de pontos em R^2 , conforme a Figura 6.8.

Figura 6.8 – Resultado do Polinômio $d \times P_{cr}$.



Fonte: Autor.

$$G(X) = 0,2424d^3 + 1,4545d^2 - 6,9315d + 7,5337 \quad (6.5)$$

Utilizando a equação (6.5) como função de falha, a média e desvio padrão (2,68 e 0,134) , obtém-se os seguintes resultados, conforme tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Resultados Pórtico LEE

β	P_f
3,647	1,3268E-4

Analisando os resultados da tabela 6.5 com a Figura 6.1, verifica-se uma probabilidade de falha de $10E-4$ e quatro iterações, o que significa que se pode ter uma consequência de falta grande em relação ao Beta Alvo. Como o beta alvo foi 4,2 os demais pórticos tinham seção menor do que a do beta alvo.

6.3 PORTICO DE WILLIANS

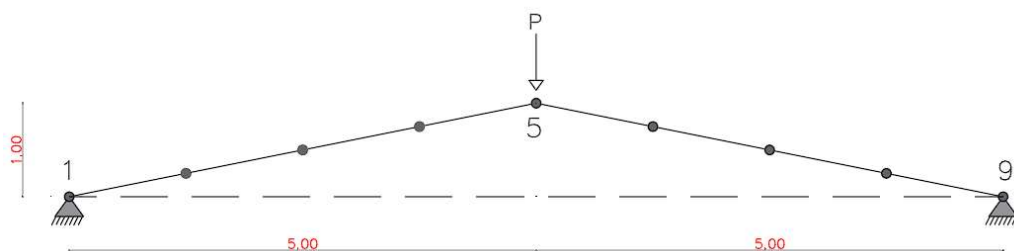
Para o segundo exemplo será utilizado o pórtico de WILLIANS (GALVÃO 2002), conforme a Figura 6.7. Neste problema, o pórtico possui duas barras quadradas com as mesmas

características e foi discretizado em 9 nós e 8 elementos, sendo considerados apoios do tipo pino (nós 1 e 9 da malha), cujas translações estão restringidas. Foram adotados, para o processo incremental-iterativo os seguintes parâmetros: comprimento de arco inicial $\Delta l = 0,03$; número de iterações desejadas $N_d = 3$; e tolerância $tol = 1 \times 10^{-6}$. As características geométricas são apresentadas na Tabela 6.6. Para o critério de convergência do método FORM foi utilizado uma tolerância de 1×10^{-2} (JUNIOR, 2012).

Tabela 6.6 – Parâmetros do pórtico WILLIAMS.

Parâmetros constantes	Valores médios iniciais
Área (A)	$5,027 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
Inércia (I)	$2,108 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
Comprimento da barra (L)	10 m
Módulo de Elasticidade	$2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$
Carga (P)	1,0 tf

Figura 6.9 – Pórtico de WILLIAMS (medidas em cm).



Fonte: Autor.

Assim como no exemplo anterior, para determinar o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha, deve-se obter a função de falha, a qual determina o limite do ponto de falha Figura 4.4.

A variável aleatória para o problema analisado foi o diâmetro da seção (ϕ). Nesse exemplo, foram analisados seis pórticos com dimensões de 0,08 m a 0,102 cm, Tabela 6.7. Na Tabela 6.7, também são apresentadas a Área, o momento de inércia, Carga crítica, o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha para cada análise do pórtico.

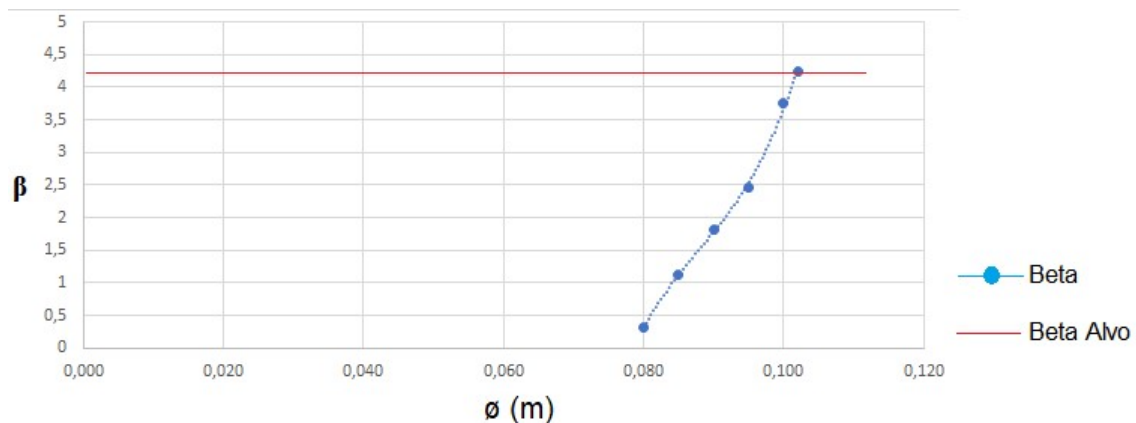
Tabela 6.7 – Parâmetros do pórtico WILLIAMS

Pórtico	d (m)	A (m ²)	I (m ⁴)	P _{cr} (tf)	β	P _f
1	0,08	5,03x10 ⁻³	2,10 x10 ⁻⁶	3,83	0,311	0,0338
2	0,085	5,67 x10 ⁻³	2,56 x10 ⁻⁶	4,32	1,1185	1,32 x10 ⁻¹
3	0,090	6,36 x10 ⁻³	3,22 x10 ⁻⁶	4,85	1,8272	3,78 x10 ⁻¹
4	0,095	7,09 x10 ⁻³	4,00 x10 ⁻⁶	5,4	2,4707	6,70 x10 ⁻³
5	0,100	7,85 x10 ⁻³	4,91 x10 ⁻⁶	5,99	3,7535	8,72 x10 ⁻⁵
6	0,102	8,17 x10 ⁻³	5,31 x10 ⁻⁶	6,23	4,2486	1,08 x10 ⁻⁶

Para este exemplo a média será o próprio (ϕ) e o coeficiente de variação (C.V.) é 0,04 (JUNIOR, 2012), portanto aumentando o lado da seção em 0,05 cm, e tendo como beta alvo ($\beta=4,2$ e $P_f=10 \times 10^{-5}$), ou seja, para consequências de falha moderada de acordo com (JSCC, 20010) temos um limite para a dimensão da seção em relação a carga.

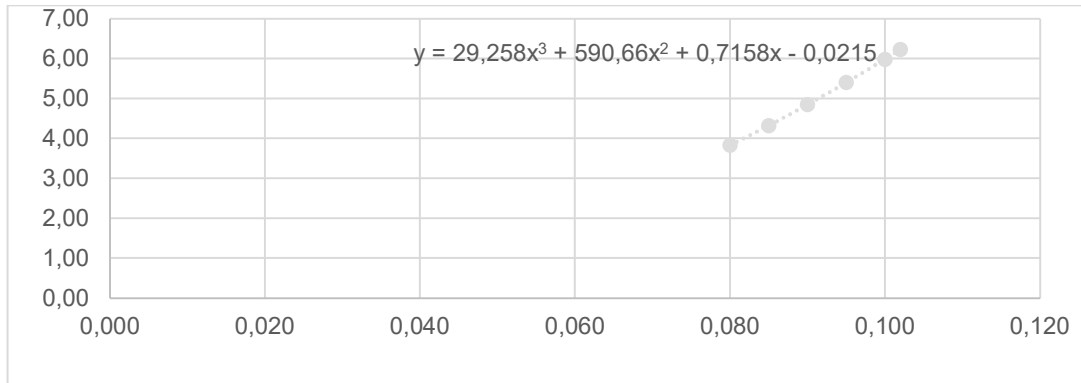
O gráfico da Figura 6.10, mostra o comportamento entre o índice de confiabilidade e o aumento da seção.

Figura 6.10 – Relação d x β.



Portanto, para este exemplo, se utilizarmos uma seção abaixo de 0,102 m estás contra a segurança, se for uma seção maior estás utilizando material a mais.

Assim como no exemplo anterior, determinou-se uma equação resultante (função de falha) entre d x P_{cr} interpolação não linear em R² elaborado a partir da ferramenta Excel, descrito a seguir:

Figura 6.11 – Resultado do Polinômio d x P_{cr}.

Fonte: Autor.

$$G(X) = 29,258d^3 + 590,66d^2 + 0,7158d - 0,0215 \quad (6.6)$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A confiabilidade estrutural detém técnicas e métodos para o cálculo da probabilidade de falha de um determinado material ou estrutura. Neste trabalho, foi estudado o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM), em que este método transforma as variáveis aleatórias de um espaço original para um espaço normatizado, obtendo assim o índice de confiabilidade e, por fim, a probabilidade de falha.

A análise de estruturas de pórticos planos, com a não linearidade geométrica, foi abordada com o intuito de contextualizar e transformar seus resultados em variáveis aleatórias para a verificação da probabilidade de falha.

Para determinar e viabilizar a confiabilidade dos pórticos planos, inicialmente, foi determinada a função de falha. A função de falha determina o limite entre um estado falha ou segurança (Margem de segurança). A determinação da função de falha abordada no capítulo 6 foi elaborada a partir dos resultados da implementação do algoritmo da ANL, sendo a carga crítica o fator relevante. Após isso, com ajuda de um algoritmo implementado, obteve-se o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha.

Verifica-se que, os resultados da confiabilidade são determinantes da quantidade de dados estatísticos providos do problema e da precisão do modelo matemático adotado.

Nos dois exemplos analisados, podemos observar a determinação da confiabilidade para verificação de uma dimensão da estrutura para uma determinada carga aplicada e assim saber se haverá falha e qual o grau. Também, foi determinado do polinômio para utilizá-lo como função de falha, colaborou para uma economia computacional. Os pórticos apresentados possuem um enfoque acadêmico, em que, para futuros trabalhos, deve-se aplicar a confiabilidade a conceitos reais.

Sugestões para futuros trabalhos são: os estudos da confiabilidade estrutural para calibração das Normas Técnicas vigentes; calibração e modelos matemáticos mais seguros e econômicos para o dimensionamento de estruturas; comparação dos resultados com outras metodologias da obtenção do índice de confiabilidade, como por exemplo o SORM, Método de Monte Carlo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGHABABAEI, M.; MAHSULI, M. Detailed seismic risk analysis of buildings using structural reliability methods. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 53, p. 23–38, 2018.
- ALBINO, J. C. R.; ALMEIDA, C. A.; MENEZES, I. F. M.; PAULINO, G. H. Co-rotational 3D beam elemento for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded material (FGMs). **Engineering Structures**. V. 173, p. 283-299. 2018.
- ANDRETTA, M. **Cálculo numérico / métodos numéricos: Sistemas lineares, método de Cholesky**. ICMC USP. Maio, 2008. Notas de aula. Disponível em <<https://sites.icmc.usp.br/andretta/ensino/aulas/sme0301-1-11/SistemasLinearesCholesky.pdf>>. Acessado 24/08/2020. Rio de Janeiro, 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. 2014.
- BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. 1º ed. São Paulo: Elsevier, 2019.
- BECK, A. T. **Um método para análise de confiabilidade para elementos finitos**. 1999. 194 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 1999.
- BECK, A. T.; SILVA, C. A. Strategies for finding the desing point under bounded random variables. **Strucutural Safety**. V. 58, p. 79-93, 2016.
- BECK, A. T.; ROSA, E. Structural reliability analysis using deterministic finite element programs. **Latin Americam Jounal of Solids and Structures**. V. 3, p. 197-222, 2006.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis od Solids and Structures**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd: 1991. Volume 1.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis od Solids and Structures**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd: 1997. Volume 2.
- CUI, X. Z.; LI, Y. G.; HONG, H. P. Effect of spatially correlated initial geometric imperfection on reliability of spherical latticed shell considering global instability. **Structural Safety**, v. 82, n. September 2019, 2020.
- DENG, X. Structural reliability model considering mixes probabilistic and interval variables. **Latin American Jounal of Solidis and Structures**. V. 17, issue 1. P. 1-9. 2019.
- ENGEN, M. et al. A quantification of the modelling uncertainty of non-linear finite element analyses of large concrete structures. **Structural Safety**, v. 64, p. 1–8, 2017.
- ESI GROUP. **SCILAB**, 2018. Disponível em: <<https://www.scilab.org/>>.

FELIPE, T. R. C. **Análise mecânica e probabilística de estruturas treliçadas sujeitas ao colapso progressivo**. 2019. 162 p. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos 2019.

FACHIOLLI, P. H. P.; BECK, A. T. Distribution of load effects and reliability of reinforced concrete frames: intact and with columns removed. **Rev. Ibracon Estrut. Mater.**. Vol. 15, no 2, e15207, 2022.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. Probabilistic Model Code. Part I – Basis of design. 2001. Disponível em: https://www.jcss-lc.org/publications/jcsspmc/part_i.pdf>. Acessado em: 02 de fevereiro de 2022.

JÚNIOR, J. C. DE A. **DIMENSIONAMENTO DE PÓRTICOS PLANOS BASEADO EM CONFIABILIDADE CONSIDERANDO NÃO-LINEARIDADE**. 2012. 126 p. Dissertação de Mestrado. Centro de Tecnologia e Geociências. Universidade Federal de Pernambuco, 2012.

JÚNIOR, C. A.S.; DAMAZIO, P. D.; MATIOLI, L. C.; CAVICHIOLO, J. L. A counterexample to FORM and SORM. **Engineering Computations**. V. 37, p. 2127-2135, 2020.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. 107 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação e Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.

LACERDA, E. G. M.; MACIEL, D. N.; SCUDELARI, A. C. Geometrically static analysis of trusses using the arc-lencht and the positional formularion of finite elemento method. **XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. November 23-26, 2014.

LU, Z. H.; CAI, C. H.; ZHAO, Y. G.; LENG, Y.; DONG, Y. Normalization of correlated random variable in structural reliability analysis using fourth-moment transformation. **Structural Safety**. V. 82, 2020.

MADAH, H.; AMIR, O. Truss optimization with bucling considerations using geometrically nonlinear beam modeling. **Computers and Structures**. V. 192, p. 233-247. 2017.

MAPA, D. L. S. **Confiabilidade de estruturas de pórticos metálicos planos**. 2016. 149 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2016.

MENIN, RENATO C. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. 2006. P. 190. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília. 2006.

MUGLER, A.; STARKLOFF, H. J. On elliptic partial differential equations with random coefficients. **Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica**. V. 26, issue 2, p. 473-487. 2011.

MÜLLER, M. Passing of instability points by applying a stabilized Newton-Raphson scheme to a finite element formulation: Comparison to arc-length method. **Computational Mechanics**. V. 40, issue 4, p. 683-705. 2007.

NI, P.; LI, J.; HAO, H.; YAN, W.; DU, X. ZHOU, H. Reliability analysis and design optimization of nonlinear structures. **Reliability Engineering and System Safety**. V. 198, p. 106860. 2020.

NOGUEIRA, C. G. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado**. 2005. 166 p. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2005.

NOGUEIRA, C. G.; VENTURINI, W. S. Teoria da confiabilidade aplicada na avaliação da influência da não-linearidade geométrica em pórticos de concreto armado. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**. v. 13, n. 58, p. 84-98, 2011.

NOGUEIRA, C. G.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures considering the influence of shear strength complementary mechanisms. **Latin American Journal of Solids and Structures**. V. 10, issue 5, p. 953-950. 2013.

OLIVEIRA, G. C.; SILVA, W. T. M. Análise não-linear de pórticos planos usando um elemento de viga corrotacional. **XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. P. 20. 2016.

PARENTE JUNIOR, E. et al. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames Análise não linear física e geométrica de pórticos de concreto armado. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 7, n. 5, p. 879–891, 2014.

PEREIRA, M. F.; BECK, A. T.; EL DEBS, A. L. H. C. Reliability of partially encased steel-concrete composite columns under eccentric loading. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 10, n. 2, p. 298–316, 2017.

PILUSO, V.; PISAPIA, A.; CASTALDO, P.; NASTRI, E. Probabilistic theory of plastic mechanism control for steel moment resisting frames. **Structural Safety**. V. 76, p.95-107. 2019.

PIRES, K. O. et al. Análise de confiabilidade de barragem. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 12, n. 3, 2019.

REIS, M. C. J.; CODA, H. B. Physical and geometrical non-linear analysis of plane frame considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**. V. 11, issue 7, p. 1163-1189. 2014.

SAGRILO, L. V. S. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando os métodos analíticos FORMS e SORM**. 1994. 151 p. Teses de Doutorado. Programa de Pós-Graduação de Engenharia. Universidade Federal do Rio de Janeiro. 1994.

SCHUELLER, G.; STIX, R. A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. **Structural Safety**. V. 4, p. 293-309. 1987.

SCHWEIZERHOF, K. H; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. V. 59, p. 261-279. 1986.

SILVA, S. S. **Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação corrotacional e plasticidade por camadas**. 2011. 180 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia. Universidade de Brasília, 2011.

SILVA, G. A.; BECK, A. T.; CARDOSO, E. L. Topology optimization of continuum structures with stress constraints and uncertainties in loading. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. V.113, issue 1, p. 153-178. 2018.

SOUZA, L. A. F. Análise não linear de estruturas. 2021. Notas de aula. Disponível em <<http://paginapessoal.utfpr.edu.br/lasouza/analise-nao-linear-de-estruturas>>. Acessado em: 02 de fevereiro de 2022.

SOUZA, L. A. F. DE. Modelagem por elementos finitos de pórticos considerando as não linearidades física e geométrica. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 38, n. 1, p. 77–90, 2017a.

SOUZA, L. A. F. D. Método numérico para a solução não linear de pórtico plano com convergência de quarta ordem. **Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia**, p. 5, 2017b.

SOUZA, L. A. F. Simulação numérica de pórtico com não linearidade geométrica e conexão semirrígida. **Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia**, n. 2018, p. 5, 2018.

SOUZA, L. A. F. Implementação computacional das formulações posicional e corrotacional de elementos finitos para treliças 2D. **Revista de Engenharia e Tecnologia**. V.11, issue 4, p. 147-158. 2020.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I., FILHO, A. A.; MACHADO, R. D. Trusses nonlinear problems solution with numerical methods of cubic convergence order. **Trends in Applied and Computational Mathematics**. V. 19, n. 1, p. 161-179. 2018.

SOUZA, L. A. F. D.; SANTOS, D. S.; KAWAMOTO, R. Y. M. Análise não linear física de treliças com ciclos de carregamento e descarregamento. **REVISTA TECNOLÓGICA**, v. 28, n. 1, p. 101–118, 2019.

STRAMANDINOLI, R. S. B. Finite element model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams and plane frames. **Revista Ibracn de Estruturas e Materiais**. V. 10, n. 2, p. 386-414. 2017.

TESSARI, R. K.; KROETZ, H. M.; BECK, A. T. Performance-based design of steel towers subject to wind action. **Engineering Structures**, v. 143, p. 549–557, 2017.

TOLENTINO, L. D.; SOUZA, L. A. F. Comparative analysis between measures of strain in structures of bar. Análise comparativa entre medidas de deformação em estruturas de barra. **Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 40, n. 2, p. 161–168, 2019.

WRIGGERS, P.; WAGNER, W.; MIEHE, C. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. V. 70, p. 329-347. 1988.

YAW, L. L.; SUKUMAR, N.; KUNNATH, S. K. Meshfree co-rotational formulation for two-dimensional continua. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**. V. 79, issue 8, p. 979-1003. 2009.

YAW, L. L. 2D Co-rotational Beam Formulation. E. F. Cross School of Engineering, **Walla Walla University**, 2009a.

YAW, L. L. 2D Co-rotational Trusses Formulation. E. F. Cross School of Engineering, **Walla Walla University**, 2009b.

YAW, L. L. 3D Co-rotational Trusses Formulation. E. F. Cross School of Engineering, **Walla Walla University**, 2011.

ZHANG, Y. KIUREGHIAN, A. D. First-excursion probability of uncertain structures. **Probabilistic Engineering Mechanics**. V. 9, p. 135-143, 1994.

ZHONG, C.; WANG, M. CHAO, DANG. WENHAI, K. Structural reliability assessment by salp swarm algorithm-based FORM. **Quality and Reliability Engineering International**. V. 36, p. 1224-1244. 2020.

APÊNDICE

Este apêndice apresenta o código em Matlab do algoritmo implementado no presente trabalho sobre confiabilidade estrutural método FORM.

```

clc, clear
ma=;%Inserir valor da média
sa=;%Inserir valor do desvio padrão
%%DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL
m=ma;s=sa;
mua=log((m^2)/sqrt(s^2+m^2));
sigmaa=sqrt(log(s^2/(m^2)+1));
% ESPACO REDUZIDO, ponto inicial, Fail Func
G=1; ar=0; Xs=[]; a=ma; i=0;
hold on
while abs(G)>1e-2
    i=i+1;
    %% NORMAL EQUIVALENTE DISTRIB.
    Px=cdf('logn',a,mua,sigmaa);
    px=pdf('logn',a,mua,sigmaa);
    ar=icdf('norm',Px,0,1);
    asn=normpdf(ar)/px;
    amn=a-ar*asn;
    J=[asn];
    G=;%Inserir função falha
    dGa=;%Inserir derivada da função falha
    dG=[dGa]; dGr=J*dG;
    Xi=[ar]; Xs=[Xs Xi];
    L=norm(dGr);
    alpha=dGr/L;
    beta=G/L-Xi'*alpha;
    ar=-beta*alpha(1);
    a=ar*asn+amn;
    fprintf('i=%d,beta=%g,G=%g\n',i,beta,G)
    plot([ma,a],'.-g')
end
MPP=[ar]
beta=norm(MPP)
PF_form=cdf('norm',-beta,0,1)

```