

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL –**  
**MESTRADO**

**WILSON DONÁ JUNIOR**

**ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR: UM**  
**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE AS ABORDAGENS**  
**NUMÉRICAS APLICADAS A TRELIÇAS 2D E 3D**

MARINGÁ  
2022

**WILSON DONÁ JUNIOR**

**ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR: UM  
ESTUDO COMPARATIVO ENTRE AS ABORDAGENS  
NUMÉRICAS APLICADAS A TRELIÇAS 2D E 3D**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza

MARINGÁ  
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

D675a

Doná Junior, Wilson

Análise geometricamente não linear : um estudo comparativo entre as abordagens numéricas aplicadas a treliças 2D e 3D / Wilson Doná Junior. -- Maringá, PR, 2022.  
112 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2022.

1. Análise não linear geométrica. 2. Método dos elementos finitos. 3. Técnica de continuação. 4. Newton-Raphson (Método). 5. Treliças. I. Souza, Luiz Antonio Farani de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

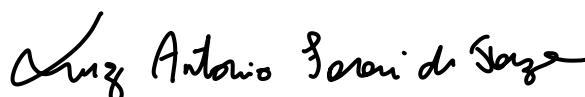
CDD 23.ed. 624.177

WILSON DONÁ JUNIOR

**ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR: UM ESTUDO COMPARATIVO  
ENTRE AS ABORDAGENS NUMÉRICAS APLICADAS A TRELIÇAS 2D E 3D**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 29/08/2022, julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

**BANCA EXAMINADORA**



**Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá  
Professor Orientador



**Prof. Dr. Leonardo Martins e Silva**  
Campus Apucarana Engenharia Civil  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná



**Prof. Dr. Carlos Humberto Martins**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá

Aos meus familiares pela constante companhia e suporte ao longo dessa jornada.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me ceder resiliência e sabedoria.

À Universidade Estadual de Maringá, por oferecer a oportunidade de aprender.

Ao Professor Dr. Luiz Antonio Farani de Souza, pela orientação e pela disponibilidade, sem hesitar em oferecer auxílio.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia civil, pela vocação em transmitir conhecimento.

Aos funcionários da instituição, pela manutenção do primor da universidade.

Aos meus pais, por nunca desistirem de acreditar em mim, mesmo quando eu não o fiz.

À minha irmã, por sempre estar ao meu lado, por quaisquer que sejam as circunstâncias.

E, aos meus amigos, por tornar meus dias mais singelos.

O maior inimigo do conhecimento não é a ignorância, é a ilusão do conhecimento.

Stephen Hawking

## RESUMO

Este trabalho realiza um estudo acerca da eficiência de diversas estratégias numéricas para a obtenção da trajetória de equilíbrio em análise não linear geométrica, utilizando a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. Devido a condições críticas presentes nas trajetórias de equilíbrio de problemas estruturais com comportamento fortemente não linear, os procedimentos incrementais-iterativos podem não convergir. Para sobrepujar os pontos críticos, mesclam-se diferentes metodologias de soluções acopladas a diversas técnicas de continuação, com a finalidade de analisar a convergência das abordagens numéricas. Dentro do rol de métodos de solução, são aplicados o Newton-Raphson, o Newton-Raphson Modificado e um método com dois passos e convergência cúbica, associando os mesmos às estratégias convencional e fluxo normal para a obtenção do vetor de sub-incremento de coordenadas nodais. Além disso, empregam-se as técnicas de continuação Carga Constante, Deslocamento Constante, Trabalho Externo Constante, Arco Linear Fixo e Atualizado, Norma Mínima de Deslocamento Residuais, Deslocamento Generalizado e Área Triangular. Observou-se que o procedimento incremental-iterativo proposto atinge a solução dos problemas com um número de iterações menor, e que a técnica de fluxo normal oferece condições para que a convergência seja garantida. Em relação ao Newton-Raphson Modificado, verificou-se que em muitos casos não houve convergência, devido a não atualização da matriz de rigidez no ciclo iterativo. Por fim, concluiu-se que para os problemas testados a técnica de continuação baseada da Norma Mínima de Deslocamentos Residuais foi a mais eficiente.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos Posicional. Fluxo Normal. Treliças.



## ABSTRACT

This paper performs a study about the efficiency of numerical strategies for obtaining the equilibrium path in geometric nonlinear analysis, using Positional Finite Element Method (FEM). In light of this, incremental-iterative procedures may not converge due to critical conditions present in the equilibrium patch with strongly nonlinear behavior. To overcome these critical points, different solution methodologies are blended with various patch-following techniques in order to analyze the convergence of the numerical approaches. In addition, Newton-Raphson, Modified Newton-Raphson and a proposed formulation from Kou et al. (2006) are applied, associating the conventional process and the normal flow as strategies to obtain the sub-increment vector of nodal coordinates. Moreover, Constant Load, Constant Displacement, Constant External Work, Constant and Updated Arc Length, Minimum Residual Displacement, Generalized Displacement, and Triangular Area are employed as path-following techniques. To achieve convergence, it was observed that the proposed formulation needs smaller number of iterations, as well as that the normal flow provides conditions for convergence. Regarding the Modified Newton-Raphson, it was had that in many cases there was no convergence, due to not updating the stiffness matrix in the iterative process. Furthermore, it was concluded that the path-following technique based on the Minimum Residual Displacement Standard proved the most efficient results.

**Key-words:** Positional Finite Element Method. Normal Flow. Trusses.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Barra submetida à esforços .....	28
Figura 2.2 – Barra submetida à não linearidade geométrica .....	29
Figura 3.1 – Comportamento elasto-plástico do aço e do concreto .....	28
Figura 3.2 – Esforços de segunda ordem não desprezíveis caracterizando .....	29
Figura 3.3 – Descaracterização das condições de contato estipuladas inicialmente .....	30
Figura 3.4 – Exemplo de instabilidade de ponto de bifurcação .....	31
Figura 3.5 – Trajetória de equilíbrio com presença de laços.....	32
Figura 4.1 – Pontos singulares na trajetória de equilíbrio .....	37
Figura 4.2 – Elemento finito de treliça indeformado e deformado .....	38
Figura 4.3 – Graus de liberdade de um elemento finito de treliça.....	39
Figura 4.4 – Elemento finito de treliça indeformado e deformado .....	40
Figura 4.5 – Graus de liberdade de um elemento finito de treliça.....	41
Figura 6.1 – Curvas de propagação de Davidenko .....	54
Figura 8.1 – Rotina de cálculo simplificado acoplado à técnica de iteração baseada na carga constante .....	62
Figura 8.2 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no deslocamento constante ....	64
Figura 8.3 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no trabalho externo constante	65
Figura 8.4 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no comprimento de arco linear constante .....	66
Figura 8.5 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no comprimento de arco linear atualizado.....	67
Figura 8.6 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada na norma mínima dos deslocamentos residuais .....	68
Figura 8.7 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no controle do deslocamento generalizado.....	70
Figura 8.8 – Representação gráfica do triângulo que restringe a área delimitada pelos pontos b, c e d.....	71
Figura 8.9 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada na restrição geométrica da área triangular.....	72
Figura 9.1 – Metodologias numéricas disponíveis na rotina de cálculo do presente trabalho .	74
Figura 9.2 – Esquematização da implementação no Scilab.....	75
Figura 10.1 – Algoritmo para análise-comparativa das técnicas de continuação.....	78

Figura 10.2 – Treliça abatida assimétrica de Powell e Simons (1981).....	79
Figura 10.3 – Trajetória de equilíbrio obtida por Powell e Simon (1981) e Menin (2006) ....	79
Figura 10.4 – Gráfico comparativo do número total de iterações .....	81
Figura 10.5 – Trajetória de equilíbrio da treliça abatida assimétrica, com Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação TE.....	82
Figura 10.6 – Trajetória de equilíbrio da treliça abatida assimétrica, com Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação DC .....	82
Figura 10.7 – Trajetória de equilíbrio da treliça abatida assimétrica, com Newton-Raphson Padrão, Fluxo Normal e técnica de continuação CC .....	83
Figura 10.8 – Comparação do número total de iteração.....	84
Figura 10.9 – Trajetória de equilíbrio para a treliça abatida assimétrica, utilizando o Newton-Raphson Modificado, Fluxo Normal e técnica de continuação CC .....	85
Figura 10.10 – Arco circular treliçado proposto por Crisfield (1991).....	86
Figura 10.11 – Trajetória de equilíbrio obtida por Hrinda (2005).....	86
Figura 10.12 – Comparação de valores totais de iteração .....	88
Figura 10.13 – Trajetória de equilíbrio para arco treliçado, utilizando o Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação ALF, TE e DG .....	89
Figura 10.14 – Trajetória de equilíbrio para arco treliçado, utilizando o Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação ALA .....	89
Figura 10.15 – Trajetória de equilíbrio para arco treliçado, utilizando o Newton-Raphson Padrão, Fluxo Normal e técnica de continuação CC .....	90
Figura 10.16 – Algoritmo para processo incremental-iterativo.....	91
Figura 10.17 – Cúpula treliçada de 24 Elementos.....	92
Figura 10.18 – Trajetória de equilíbrio para a cúpula espacial de 24 nós .....	93
Figura 10.19 – Cúpula espacial deformada .....	94
Figura 10.20 – Vista superior e lateral da cúpula treliça de 60 elementos .....	95
Figura 10.21 – Trajetória de equilíbrio em relação ao nó 25 .....	96
Figura 10.22 – Posição deformada da cúpula treliçada de 60 elementos .....	97
Figura 10.23 – Arco circular treliçado proposto por Hrinda (2010) .....	98
Figura 10.24 – Trajetória de equilíbrio para o arco treliçado .....	98
Figura 10.25 – Detalhe da trajetória de equilíbrio.....	99
Figura 10.26 – Arco treliçado circular deformado .....	100
Figura 10.27 – Ponto de não convergência na trajetória de equilíbrio para o método proposto .....	101

Figura 10.28 – Ponto de não convergência na trajetória de equilíbrio para o método de NR 102	
Figura 10.29 - Matriz de rigidez esparsa .....	103
Figura 10.30 – Coeficiente de redução para o processo convencional.....	103
Figura 10.31 – Coeficiente de redução para o fluxo normal .....	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Quadro-resumo das formulações matemáticas .....	47
Tabela 9.1 – Parâmetros de entrada do software .....	76
Tabela 9.2 – Parâmetros de saída .....	76
Tabela 10.1 – Dados de entrada.....	79
Tabela 10.2 – Resultados obtidos com Newton-Raphson Padrão do exemplo de treliça abatida assimétrica .....	80
Tabela 10.3 – Resultados obtidos pelo Scilab utilizando o Newton-Raphson Modificado para o exemplo de treliça abatida assimétrica .....	83
Tabela 10.4 – Dados de entrada.....	87
Tabela 10.5 – Resultados obtidos pelo Scilab utilizando o Newton-Raphson Modificado para o exemplo de arco treliçado.....	87
Tabela 10.6 – Parâmetros de entrada.....	92
Tabela 10.7 – Dados de saída para o exemplo da cúpula espacial de 24 elementos .....	93
Tabela 10.8 – Dados de entrada.....	95
Tabela 10.9 – Resultados obtidos para o exemplo da cúpula treliçada de 60 elementos .....	96
Tabela 10.10 – Dados de entrada.....	99
Tabela 10.11 – Dados de saída para o exemplo do arco treliçado.....	100

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>0</b>	Vetor nulo
<b>B</b>	Produto tensorial de <b>d</b>
<b>C</b>	Matrix componente da matriz de rigidez
<b>K</b>	Matriz de rigidez do elemento finito
<b>E</b>	Módulo de elasticidade
<b>F<sub>int</sub></b>	Vetor de forças internas
<b>F<sub>r</sub></b>	Vetor de forças externas aplicadas
<b>H</b>	Parâmetro incremental
<b>I</b>	Matriz identidade
<b>I</b>	Número de iterações
<b>L<sub>0</sub></b>	Comprimento indeformado
<b>L</b>	Comprimento deformado
<b>P</b>	Energia potencial das forças externas
<b>V</b>	Volume
<b>U</b>	Energia de deformação
<b>W</b>	Trabalho externo
<b>ΔW</b>	Incremento de trabalho externo
<b>X</b>	Componente do par ordenado na abscissa
<b>Y</b>	Componente do par ordenado na ordenada
<b>Π</b>	Energia potencial total
<b>θ</b>	Parâmetro restritivo aplicada na técnica de continuação
<b>ε</b>	Parâmetro de deformação
<b>δλ</b>	Sub-incremento de parâmetro de carga
<b>Δλ</b>	Incremento de parâmetro de carga
<b>λ</b>	Parâmetro de carga
<b>f</b>	Vetor de cargas externas
<b>d</b>	Vetor de relações geométricas
<b>g</b>	Vetor de forças residuais
<b>d</b>	Vetor de coordenadas nodais
<b>δd</b>	Sub-incremento de coordenadas nodais
<b>Δd</b>	Incremento de coordenadas nodais

- u** Densidade de energia de deformação
- x** Vetor que contém a direção de aplicação da força externa

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>18</b>
1.1 JUSTIFICATIVA.....	20
1.2 OBJETIVOS.....	21
1.2.1 Objetivos gerais.....	21
1.2.2 Objetivos específicos.....	22
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>23</b>
<b>3 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR.....</b>	<b>27</b>
3.1 ANÁLISE LINEAR .....	27
3.2 TIPOS DE NÃO LINEARIDADE.....	28
3.2.1 Não linearidade física .....	28
3.2.2 Não linearidade geométrica .....	28
3.2.3 Não linearidade de contato.....	30
3.3 TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO .....	30
<b>4 FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ....</b>	<b>33</b>
4.1 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA .....	33
4.2 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES .....	35
4.3 ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA 2D .....	38
4.4 ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA 3D .....	40
4.5 PARÂMETRO DE DEFORMAÇÃO.....	42
4.5.1 Deformação de engenharia.....	42
4.5.2 Deformação de Green-Lagrange .....	45
4.6 QUADRO RESUMO DAS FORMULAÇÕES .....	47
<b>5 MÉTODO DE SOLUÇÃO.....</b>	<b>48</b>
5.1 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO BASEADO NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (nr).....	48
5.2 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO BASEADO NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON modificado (nrm) .....	51
5.3 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO proposto BASEADO NO MÉTODO DE KOU ET AL. (2006) .....	51



<b>6</b>	<b>OBTENÇÃO DO VETOR DE SUB-INCREMENTO DE COORDENADAS NODAIS.....</b>	<b>53</b>
6.1	PROCESSO CONVENCIONAL .....	53
6.2	FLUXO NORMAL .....	53
<b>7</b>	<b>TÉCNICAS DE INCREMENTO DE PARÂMETRO DE CARGA .....</b>	<b>56</b>
7.1	TÉCNICAS RESTRITIVAS NO INCREMENTO PREDITO.....	56
7.1.1	Incremento restringido por parâmetro de carga .....	57
7.1.2	Incremento restringido por componente de deslocamento .....	57
7.1.3	Incremento restringido pelo trabalho externo .....	57
7.1.4	Incremento restringido por comprimento de arco .....	58
7.2	TÉCNICAS RESTRITIVAS NO INCREMENTO PREDITO E NA ITERAÇÃO .....	58
7.2.1	Incremento restringido pelo Parâmetro de Rigidez Geral (GSP) .....	58
7.3	COMENTÁRIOS ACERCA DO SINAL DO INCREMENTO DE PARÂMETRO DE CARGA .....	60
<b>8</b>	<b>TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO .....</b>	<b>62</b>
8.1	TÉCNICA DE CONTROLE DE CARGA CONSTANTE.....	62
8.2	TÉCNICA DE CONTROLE DE DESLOCAMENTO CONSTANTE .....	63
8.3	TÉCNICA DE CONTROLE DE TRABALHO EXTERNO CONSTANTE .....	64
8.4	TÉCNICA DE CONTROLE DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEAR CONSTANTE .....	65
8.5	TÉCNICA DE CONTROLE DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEAR ATUALIZADO .....	66
8.6	TÉCNICA DE CONTROLE NORMA MÍNIMA DOS DESLOCAMENTOS RESIDUAIS .....	67
8.7	TÉCNICA DE CONTROLE DE DESLOCAMENTO GENERALIZADO (GDCM) ..	69
8.8	TÉCNICA DE CONTROLE GEOMÉTRICO DELIMITADO POR ÁREA TRIANGULAR .....	70
8.9	CRITÉRIOS DE PARADA ADOTADOS .....	72
<b>9</b>	<b>PROGRAMA COMPUTACIONAL.....</b>	<b>74</b>

<b>10 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>77</b>
10.1 ANÁLISE-COMPARATIVA ENTRE AS TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO.....	77
<b>10.1.1 Treliça abatida assimétrica (POWELL; SIMONS, 1981).....</b>	<b>78</b>
<b>10.1.2 Arco circular treliçado (CRISFIELD, 1991).....</b>	<b>85</b>
10.2 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	90
<b>10.2.1 Cúpula treliçada de 24 elementos.....</b>	<b>91</b>
<b>10.2.2 Cúpula treliçada de 60 elementos.....</b>	<b>94</b>
<b>10.2.3 Arco circular treliçado.....</b>	<b>97</b>
10.3 DISCUSSÃO.....	100
<b>11 CONCLUSÃO.....</b>	<b>105</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>105</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Na implantação dos primeiros edifícios em estruturas de concreto, levou-se em consideração como fator restritivo a resistência do material, as hipóteses simplistas na análise estrutural e também o próprio comportamento da estrutura. Com o passar do tempo, percebeu-se que a melhora do processo construtivo se iniciou pela qualidade do projeto, em especial pela adequada concepção estrutural e a respectiva análise, que pode corresponder de 15 a 20% do custo total da obra (COSTA, 1997; ALBUQUERQUE, 1999).

À medida que a evolução tecnológica se consolidava, tornava-se possível recorrer a mecanismos que permitem a análise mais refinada e minuciosa, descartando a necessidade de adotar hipóteses que simplificam o problema estrutural, com a possibilidade de resolver análises matriciais, as quais podem extremamente complexas e seriam humanamente impossíveis de serem solucionadas à época que inexistia a ferramenta computacional, levando à obtenção de resultados mais assertivos e contundentes.

Segundo Kimura (2007) e Martha (2010), para que a análise estrutural produza resultados adequados, é necessário estabelecer um modelo estrutural, o qual busca simular o comportamento real do material e da estrutura, incorporando todas as hipóteses e teorias adotadas pelo operador. Em paralelo à evolução tecnológica, surgiu-se pesquisas que propunham formulações que contemplem o comportamento complexo dos materiais, o que permitiu avanço na análise de estruturas, resguardando a segurança.

Embora o modelo linear possa analisar os sistemas estruturais satisfatoriamente em amplo espectro de problemas, deve-se evidenciar que grande parte de arranjos estruturais possuem comportamento não linear quando submetido a carregamentos, mesmo que os efeitos em decorrência da não linearidade não sejam significativos em solicitações de serviço (BERGAN, 1980; ERIKSSON; NORDMARK, 2019).

A análise estrutural utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) se depara com sistema de equações não lineares, sendo inevitável recorrer a metodologias de solução eficientes, as quais devem oferecer a possibilidade de chegar a conclusões assertivas (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014).

Assim, considerando a não linearidade, a rotina de resolução de sistemas de equações deve ser vista como processo de simulação contínua, tendo em vista que os pontos viscerais para a análise são a adoção de leis constitutivas que descrevam os fenômenos e os comportamentos reais, bem como a capacidade de oferecer soluções de equilíbrio (BERGAN, 1980).

Em complementação, sabe-se que, antes de atingir deformações últimas, algumas estruturas apresentam mudanças notáveis em contraste à condição inicial e, em observância de deslocamentos consideráveis, é necessário recorrer à análise da não linearidade geométrica, visando a acurácia e a precisão acerca do comportamento estrutural (REZAIIEE-PAJAND; NASERIAN, 2015; MOHIT et al., 2020).

Em relação à análise estrutural não linear, evidenciam-se três abordagens: processos puramente incrementais; emprego do método iterativo baseado na rigidez secante; ou, então, concatenação das duas alternativas anteriores, chegando-se ao esquema incremental-iterativo associado ao método de solução de sistemas. Esse último, tem-se provado como o mais eficiente, todavia em alguns casos pode não ocorrer a convergência numérica devido às condições críticas presentes nas trajetórias de equilíbrio (CHAN, 1988).

Durante a execução do procedimento incremental, assume-se que vetor de deslocamentos ou de coordenadas nodais é obtido a cada incremento de carga, que pode ser constante ou variável. Ficando a cargo do operador a determinação da dimensão do incremento, quando é selecionado incrementos pequenos, percebe-se que o processo leva a um alto custo computacional desnecessário; ou, em caso de selecionar incrementos suficientemente grandes, pode-se chegar a resultados pobres de informações. Assim, opta-se por implantar a seleção de incrementos de parâmetro de carga sob restrições previamente estabelecidas (BATHE; DVORKIN, 1983).

Tangente à rotina de iteração, utiliza-se metodologias que foram desenvolvidas com a finalidade de estender o espectro de convergência na análise numérica, denominadas de estratégias de continuação. Em outras palavras, a aplicação dessas metodologias permite extrair o traçado completo da trajetória de equilíbrio, por isso as técnicas de continuação se tornaram indispensáveis para auxiliar na análise estrutural não linear, principalmente com uso de computadores para programação e resolução de esquemas incremental-iterativos (RHEINBOLDT, 1980; SCHWEIZERHOF; WRIGGERS, 1986).

Ao traçar a trajetória de equilíbrio de uma análise geometricamente não linear, deparar-se-á comumente com pontos críticos, nos quais as operações numéricas deverão ser capazes de ultrapassá-los sem deixar de convergir. Conforme os pesquisadores Kondoh e Alturi (1985), tais eventos de instabilidade são resultantes de pontos de bifurcação e/ou de pontos limites, como o de deslocamento e o de força, da trajetória de equilíbrio de estrutura.

À época das primeiras pesquisas sobre as técnicas de continuação, muitas vezes resultava em trajetórias que não condiziam com a realidade nas vizinhanças de pontos críticos, levando a conclusões errôneas de que os métodos de continuação não eram capazes de traçar o

caminho de equilíbrio, uma vez que o parâmetro de continuação adotado não era apropriado. Após de superar esse contratempo, as estratégias de continuação se mostraram bastante versáteis para a obtenção da curva de equilíbrio (RIKS, 1984; WEMPNER, 1971).

Em adição, encontrar soluções efetivas para problemas que possuem deformações excessivas tem sido considerado um desafio difícil, tanto sob perspectivas numéricas quanto sob perspectivas analíticas. Desde então, inúmeros trabalhos têm sido publicados que propõem esquemas de cálculos que sejam capazes de encontrar a trajetória de equilíbrio (LEON *et al.*, 2011; KOOHESTANI, 2013; TURCO *et al.*, 2020), nos quais é requerido que forneçam estabilidade numérica para identificar e ultrapassar os pontos críticos (REZAIEE-PAJAND; NASERIAN, 2015).

Diante do exposto, segundo os autores Muñoz e Roehl (2017), as modelagens matemáticas disponíveis na engenharia estrutural conseguem lidar com efeitos de não linearidade de fontes diversas, incluindo a não linearidade geométrica associada a deformações excessivas, bem como a não linearidade material, descritas na literatura por meio das teorias de plasticidade, do dano e da fratura.

De modo breve, os conceitos introdutórios supracitados constituem os pontos centrais abordados no presente trabalho, tendo as definições e aplicações discutidas nas seções subsequentes.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Após a difusão dos computadores, os problemas discretizados, isto é, fenômenos reais que são satisfatoriamente modelados por um conjunto de componentes finitos, puderam ser analisados mesmo que a quantidade de componentes contidos no conjunto fosse extremamente numerosa. Assim, salienta-se que a execução dessas análises sem o uso de computadores torna o processo infinitamente mais trabalhoso, uma vez que a mente humana não consegue lidar com as complexidades existentes nas análises não lineares e, para solucioná-las, impõem-se hipóteses que simplificam o cálculo, mas que diminuem a precisão dos resultados devidos aos erros residuais inerentes à falta de refinamento (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005).

Paralelamente ao domínio dos computadores, os materiais empregados na engenharia estrutural têm sido amplamente estudados, apresentando comportamento mais resistentes e eficientes. Desta maneira, observa-se que os arranjos estruturais concebidos têm sido cada vez mais esbeltos, o que os tornam mais suscetíveis às instabilidades, sendo indispensável o

emprego de metodologias numéricas complexas que possibilitem analisá-los corretamente (STRAMANDINOLI, 2007; GARCIA, 2007).

O método de discretização das estruturas neste estudo é método Posicional dos Elementos Finitos, o qual dispensa a manipulação de sistemas de eixos locais e globais e apresenta excelentes resultados, em concordância numérica com a formulação corrotacional.

Em adição, em perspectiva da sociedade, expor os apontamentos acerca das comparações entre as metodologias numéricas neste trabalho aplicadas, pode ser utilizado como norteador para a tomada de decisões por parte de engenheiros estruturais, pesquisadores da área e profissionais habilitados que eventualmente manuseará a análise matricial.

Com o enfoque de comparar a eficiência numérica, destacando as metodologias que levam a resultados assertivos com custos computacionais aceitáveis, os resultados gerados por este trabalho auxiliam para tornar o dia a dia dos analistas estruturais mais produtivos, uma vez que pode ser coibido o uso de abordagens numéricas que não são contundentes, bem como acelerar o processo da análise estrutural com a aplicação de metodologias mais eficientes.

Portanto, como contribuição, o presente trabalho pretende fazer alusão ao estudo das metodologias numéricas disponíveis na literatura científica, que podem ser empregadas em diversos estágios diferentes na rotina incremental-iterativa das análises geometricamente não linear, contribuindo para a construção civil, para engenharia estrutural e para o ramo da pesquisa acadêmica.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivos gerais

Este trabalho possui como objetivo geral implementar abordagens numéricas que sejam capazes de ultrapassar pontos críticos e traçar a trajetória de equilíbrio adequadamente, com a finalidade de analisar o desempenho computacional, a eficiência e a convergência numérica oferecida por cada metodologia.

O rol de possibilidades é vasto no que tange à metodologia de solução de sistema não linear, podendo-se empregar a formulação de Newton-Raphson, Newton Raphson Modificado ou uma formulação proposta a partir de Kou et al. (2006). Há estratégias para a determinação do vetor sub-incremento de coordenadas nodais, que são o processo convencional e a técnica do fluxo normal. E, por fim, existem diversas técnicas de controle de carga e iteração (técnicas

de continuação). Assim, neste trabalho implementa-se procedimentos incrementais-iterativos encontrados na literatura, sendo aplicados a estruturas com comportamento fortemente não linear a fim de compará-los.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Dado a linha de pesquisa em que o corrente trabalho se encontra, estipulam-se os seguintes objetivos específicos:

- desenvolver e implementar a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos (MEF) para elementos de treliça plana e espacial;
- apresentar e implementar computacionalmente com o programa livre Scilab procedimentos incrementais-iterativos de solução de sistemas de equações não lineares, como Newton-Raphson Padrão e Kou et al. (2006);
- demonstrar e implementar a estratégia do fluxo normal para a obtenção do vetor sub-incremento de coordenadas nodais;
- apresentar e implementar os métodos de solução associados às seguintes técnicas de continuação: Carga Constante; Deslocamento Constante; Trabalho Externo Constante; Comprimento de Arco Linear fixo; Comprimento de Arco Linear atualizado; Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais; Deslocamento Generalizado; e Restrição Geométrica Delimitada por Área Triangular;
- selecionar problemas não lineares de treliças planas e espaciais que apresentem trajetória de equilíbrio com diversos pontos limites, com o intuito de analisar a robustez e eficiência numérica dos métodos; e
- confrontar os resultados numéricos obtidos, salientando os números totais de passos de carga e de iterações acumuladas até a convergência para a solução, o número médio de iterações por passo de carga e o tempo de processamento, obtidos das simulações com as metodologias de solução.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A não linearidade pode ser de natureza física, geométrica ou de contato. Ao que concerne à física, recomenda-se consultar Souza, Magalhães e Andrade (2019), no qual realiza um estudo comparativo de pilar de concreto reforçado esbelto entre as simulações via Método dos Elemento Finito e via P-Delta; em Kumar e Varghese (2017), analisa-se o efeito da não linearidade material em pilares flutuantes, por meio de P-Delta.

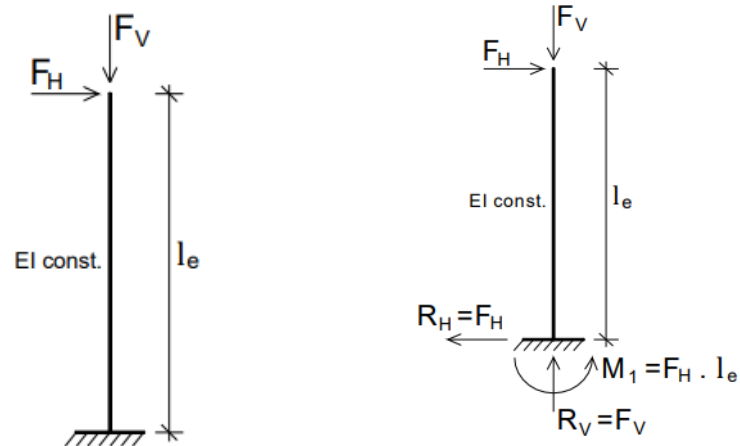
A ABNT NBR 6118:2014, cujo título é “Projeto de estruturas de concreto – Procedimento”, prevê em seu conteúdo a aplicação e análise da não linearidade física, por meio da relação do momento-curvatura, característica observada em estruturas de concreto armado, devido à trabalhabilidade entre o concreto e o aço.

Em relação a análise não linear geométrica que é o enfoque deste trabalho, citam-se: Kassimali (1983), em que apresenta uma análise considerando comportamento elastoplástico de pórticos; Zhang, Li e Meng (2021), que propõem uma formulação altamente eficiente e precisa para a análise não linear de vigas curvas de paredes finas; e, por fim, Chalal e Abed-Meraim (2018), que desenvolvem um elemento de casca quadrática para a análise não linear de materiais funcionalmente graduados (FGM).

Na literatura nacional, com o enfoque na análise não linear física e geométrica, cita-se a dissertação de Moncayo (2011), no qual é analisado os efeitos de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado. Para exemplificar, tem-se na Figura 2.1, uma barra que está submetida a esforços horizontal e vertical. A partir deste ponto, considerando o equilíbrio na posição inicial, surge-se reações na base da barra, denominadas de esforços de primeira ordem, como é mostrado na Figura 2.1.



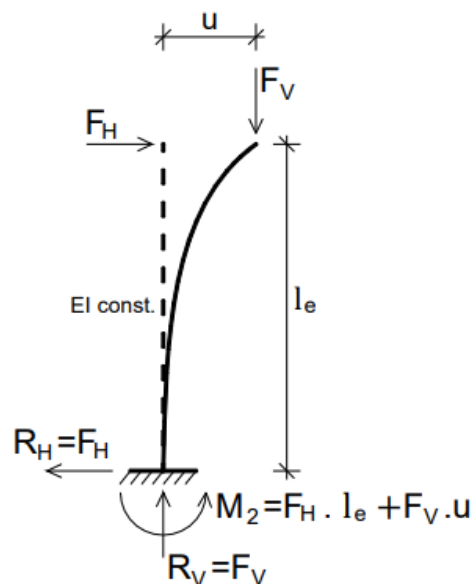
**Figura 2.1 – Barra submetida à esforços**



FONTE: Montacayo (2011)

Porém, se o equilíbrio for analisado em relação à posição deformada, percebe-se que há acréscimo do momento na base à medida que o deslocamento horizontal ( $u$ ) aumenta, resultando na somatória dos esforços de primeira e segunda ordem, uma vez que nesta análise leva-se em consideração a não linearidade geométrica, observada na Figura 2.2.

**Figura 2.2 – Barra submetida à não linearidade geométrica**



FONTE: Montacayo (2011)

Em análises em que as condições de contorno se alteram ao longo do tempo, recorre-se a Maciel (2008), cujo trabalho trata da análise dinâmica de pórticos e sólidos, considerando a plasticidade, bem como o estudo de problemas de impacto de sólidos.

Neste trabalho, a análise estrutural de treliças é feita por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional, que utiliza o vetor de posição nodais na sua rotina de cálculo ao invés do vetor de deslocamentos nodais. Essa formulação foi difundida na literatura nacional por Coda e Greco (2004). Posteriormente, outros trabalhos foram publicados, tais como Maciel (2007), que emprega essa abordagem para a análise de problemas não lineares geométricos de pórticos planos e de sólidos. Em Greco e Ferreira (2009), a formulação posicional é utilizada para comparar os resultados de treliças espaciais considerando as deformações logarítmica e de engenharia; e Becho (2016) utiliza a formulação para descrever o comportamento viscoelástico de fluência em vigas e pórticos planos.

Tendo em vista que as trajetórias de equilíbrio de estruturas possuem pontos críticos, sendo discutidas em Lacerda (2014), é preciso utilizar métodos numéricos que sejam capazes de ultrapassá-los, garantindo a convergência dos resultados, para que o caminho de equilíbrio seja adequado. Para isso, acoplam-se técnicas de continuação à rotina iterativo-incremental, sendo que as técnicas implementadas foram: deslocamento constante, presente em Batoz e Dhatt (1979); trabalho externo constante, apresentado por Powell e Simons (1981); comprimento de arco linear fixo, proposto por Riks (1972 e 1979); no comprimento de arco linear atualizado, aprimorado por Ramm (1981); norma mínima dos deslocamentos residuais, introduzido por Chan (1988); e deslocamento generalizado, publicado por Yang e Kuo (1994). Alguns trabalhos mais recentes propõem impor controle de incremento de carga por meio da geometria gráfica, conforme é apresentado por Rezaiee-Pajand e Naserian (2015, 2018).

Em relação às técnicas de continuação implementadas, com exceção a esta última, optou-se pelas estratégias mencionadas acima, uma vez que se tratam de abordagens numéricas consideradas clássicas, encontradas amplamente em diversos trabalhos anteriores, porém, ante a isso, selecionou-se também a metodologia proposta por Rezaiee-Pajand e Naserian (2015, 2018) para a analisar a eficiência de performance quando comparada às já estabelecidas técnicas de continuação.

Em relação à obtenção do vetor de deslocamentos nodais, alternativamente ao processo convencional, é possível aplicar a técnica do fluxo normal, que utiliza a direção ortogonal às curvas de Davidenko para obter os próximos passos do processo iterativo-incremental. Nesse contexto, Saffari, Fadaee e Tabatabaei (2008) modificam a taxas de convergência do fluxo normal, com intuito de estudar as melhorias de estratégias numéricas. Sob análise de três problemas de treliças espaciais, percebeu-se que mesmo que haja diversos pontos críticos na trajetória de equilíbrio, a técnica do fluxo normal modificada se apresentou satisfatória, com resultados menos onerosos computacionalmente (menor tempo de processamento).

Com a finalidade de desenvolver métodos numéricos mais eficientes, Mousavi, Sadr e Jelveh (2020) simularam uma análise dinâmica com o enfoque de forçar a resposta não linear do sistema estrutural. Assim, desenvolveram um método de continuação numérica mais eficiente partindo da formulação original do comprimento de arco, observando redução de tempo computacional em até 70%, com os respectivos resultados em conformidade com os dados apresentados por Sracic e Allen (2011).

É proposto por Quyen e Tien (2021) um elemento finito híbrido para a análise geometricamente não linear considerando imperfeições iniciais de elementos de treliças planas. Nesse trabalho, autores concatenam as formulações de elemento finito de treliça em condições ideais com o elemento apresentando a imperfeição inicial, utilizando o método iterativo-incremental baseado no comprimento de arco. Em relação a implementação computacional proposta, evidencia-se que não é necessário computar as imperfeições iniciais na matriz de rigidez, contornando as dificuldades numéricas para a análises de problemas desta natureza, com a efetiva redução de custo computacional para a resolução do sistema de equações.

Não se deve deixar de citar os livros que são mundialmente utilizados em trabalhos que manuseiem análise não linear: Crisfield (1991, 1997), Yang e Kuo (1994) e Zienkiewicz et al. (2005). Na literatura nacional, cita-se o Assan (2020), que apresenta extensamente o MEF.

Com a finalidade de propor um novo método de solução, Mahdavi et al. (2020) apresentou uma formulação originária da segunda derivada do método de Chebyshev, o qual necessita de um número consideravelmente menor de iterações para fornecer resultados com acurácia.

Em Saffari et al. (2011), publicou-se a metodologia tradicional de Newton-Raphson associado ao resíduo mínimo generalizado, ao mínimo quadrado e ao gradiente biconjugado, no qual essas abordagens numéricas substituem a inversão da matriz de rigidez por um procedimento iterativo que resolve um sistema linearizado de equações.

No que tange a análises que envolve perturbações ao domínio, Dehghani et al. (2020) elabora uma rotina de cálculo, que apresenta performance superior ao clássico método do Newton-Raphson.

Adicionalmente, em Mohit, Sharifi e Tavakoli (2020), é proposto uma nova família de técnicas de continuação, em que se chega à quarta ordem de convergência, por meio da metodologia de solução de três passos utilizada. Em consonância, em Souza et al. (2018), utilizou-se as formulações de Potra-Pták, Chebyshev e super-Halley associado à estratégia de continuação baseado no comprimento de arco linear, uma vez que esses métodos de soluções possuem ordem cúbica de convergência.

### 3 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

#### 3.1 ANÁLISE LINEAR

Preliminarmente, na análise estrutural considerando o comportamento linear, explicita-se a seguir as hipóteses que regem a formulação do método dos elementos finitos (BATHE, 2006):

- a) os deslocamentos do elemento finito são infinitesimalmente pequenos;
- b) o material que constitui o elemento estrutural responde de forma elástico-linear;
- c) as condições de contorno do elemento finito permanecem inalteradas durante a atuação das solicitações externas.

Sob essas conjunturas, a equação de equilíbrio advém da análise estática, descrita na Equação 3.1.

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

em que:  $\mathbf{K}$ : matriz de rigidez do elemento finito;  
 $\mathbf{d}$ : vetor de deslocamentos;  
 $\mathbf{f}$ : vetor de cargas externas;

Dessa forma, para a análise linear tem-se a matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) é em relação à posição indeformada do elemento e que a natureza do vetor deslocamento ( $\mathbf{d}$ ) é uma função linear dependente do vetor de carga externa ( $\mathbf{f}$ ), ou seja, para uma variação aplicada no vetor de carga externa, deve ser esperado uma variação linear no vetor de deslocamento nodais. Caso a resposta da relação deslocamento-tensão não seja observado conforme descrito anteriormente, dever-se-á aplicar a análise estrutural não linear (BATHE, 2006).

Consequente ao Kimura (2007), “uma análise não linear é um cálculo no qual a resposta da estrutura, seja em deslocamentos, esforços ou tensões, possui um comportamento não linear, isto é, desproporcional à medida que um carregamento é aplicado”.

A análise estrutural adequadamente equacionada depende da correta idealização do comportamento estrutural do material do elemento finito, ficando a cargo do engenheiro determinar as características que melhor irá modelar o problema estrutural (FONTES, 2005; BARBOZA, 2008).

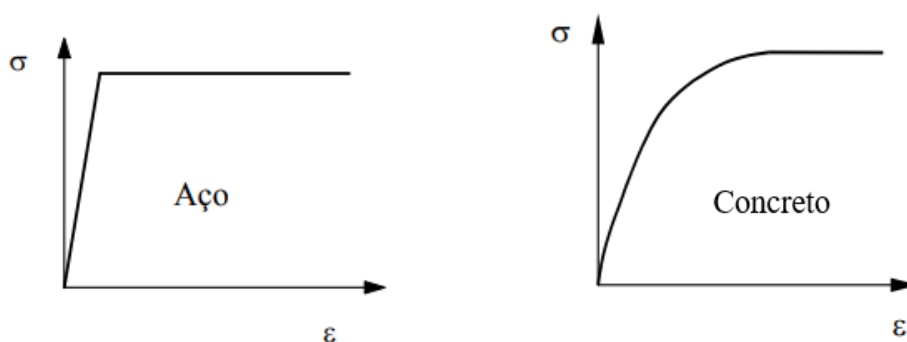
## 3.2 TIPOS DE NÃO LINEARIDADE

### 3.2.1 Não linearidade física

Ao encontro do que é proposto pela Lei de Hooke, em que os materiais possuem comportamento elástico-linear quando submetido às solicitações, deve-se salientar que em condições adequadas são adotadas as relações constitutivas dos materiais mais complexas: dentre elas, o regime elástico não linear, a plasticidade, a viscoelasticidade, bem como a consideração de deslocamentos diferidos no tempo e de deslocamentos sujeitos à variação térmica do ambiente.

Em observância da trajetória de equilíbrio, a relação tensão e deformação depende do comportamento estrutural supracitado, das considerações optadas na análise, do tipo e do histórico de carregamentos. Na Figura 3.1, demonstra-se a resposta constitutiva genérica para o aço e para o concreto.

**Figura 3.1 – Comportamento elasto-plástico do aço e do concreto**



FONTE: Lourenço (1999)

### 3.2.2 Não linearidade geométrica

Dentre as premissas impostas pela hipótese linear, é necessário considerar que os deslocamentos são infinitesimalmente pequenos, assim a análise estrutural pode ser realizada inteiramente considerando a posição indeformada (ou inicial) do elemento, podendo ser desconsiderado o erro devido a esta simplificação.

Em contrapartida, nem sempre os deslocamentos são desprezíveis, fazendo-se imprescindível examinar os mesmos – podendo ocorrer deformações pequenas com grandes deslocamentos ou rotações; ou, então, deformações excessivas – realizados pelo elemento

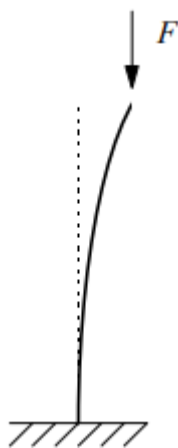
durante a aplicação das solicitações externas, uma vez que as equações equilíbrio iniciais deixam de ser válidas (LACERDA, 2014; PARENTE JUNIOR, 2012).

A este fenômeno, denomina-se não linearidade geométrica, em que a nova configuração posicional de equilíbrio do corpo corrobora a necessidade da reformulação das equações, caracterizando a perda de linearidade nas relações tangentes às deformações. Assim, conforme publicado pelo autor Parente Junior (2012), o termo análise geometricamente não linear se deve ao fato de incorporar nas rotinas de cálculo as mudanças geométricas do corpo.

Diante do exposto, já que as equações de equilíbrio e de compatibilidade não devem ser expressas conforme ao estado inicial, mas devem sim ser em relação às posições nodais atuais, observa-se que a dificuldade da análise, considerando a natureza da não linearidade advinda da geometria, habita em saber antecipadamente o arranjo deformado da estrutura (COOK et al., 2002).

Na Figura 3.2, apresenta-se o comportamento geometricamente não linear, em que as equações da condição indeformada não podem ser utilizadas devido a deslocamentos e/ou deformações consideráveis.

**Figura 3.2 – Esforços de segunda ordem não desprezíveis caracterizando**



FONTE: Lourenço (1999)

Neste presente trabalho, a não linearidade a ser estudada é a de natureza geométrica e, a depender das abordagens numéricas empregadas, será realizado ou não a atualização das posições nodais dos nós da estrutura dentro de cada etapa do processo iterativo-incremental, obtendo os melhores resultados que convirjam para o traçado da trajetória de equilíbrio adequada.

### 3.2.3 Não linearidade de contato

Em decorrência dos deslocamentos do elemento estrutural, ocorre-se que as condições de contorno inicialmente existente sofrem modificações, necessitando estipular novas condições de contorno para que os resultados de determinado problema analisado sejam válidos. Na Figura 3.3, tem-se uma esfera de borracha que recebe a solicitação vertical denotada na imagem, com o acréscimo de carregamento, a área de contato entre a superfície do anteparo e da esfera aumenta (LOURENÇO, 1999).

Figura 3.3 – Descaracterização das condições de contato estipuladas inicialmente



FONTE: Lourenço (1999)

### 3.3 TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO

Para o estudo comportamental dos materiais, comumente observa-se a trajetória de equilíbrio em gráficos que expressam a relação de parâmetro de carga no eixo das ordenadas e deslocamentos ou rotações no eixo das abscissas (RODRIGUES, 2000). Denota-se que quando a trajetória de equilíbrio plotada no gráfico não possuir caráter linear, trata-se de comportamento não linear, como dissertado anteriormente as possíveis causas da resposta não linear da estrutura.

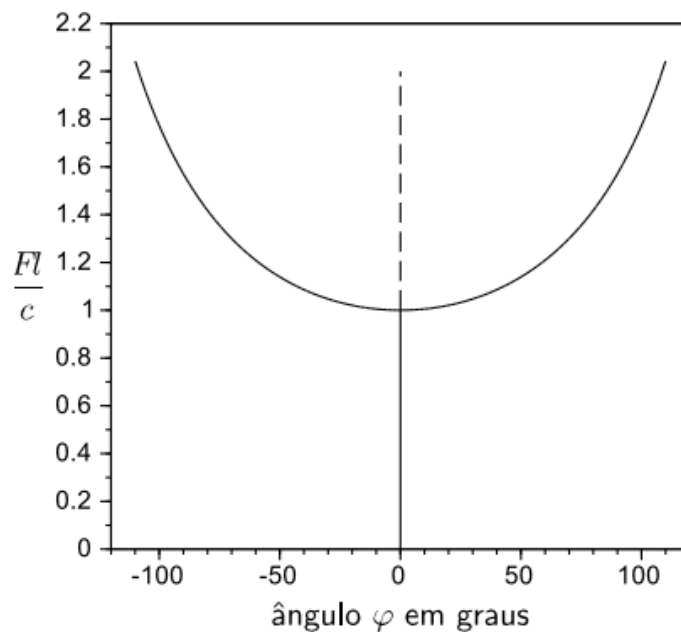
Em paralelo à trajetória de equilíbrio, deve-se analisar a tangente da rigidez, expressa pela razão entre a carga e o deslocamento. A direção da tangente de rigidez pode nortear acerca dos fenômenos que são desencadeados através da não linearidade. Diante disto, como o caminho de equilíbrio não é previsível, pode-se existir fenômenos particulares, tais como:

- a) pontos limites de força (*snap-through*);
- b) pontos limites de deslocamentos (*snap-back*);
- c) pontos de bifurcação (*bifurcation point*);
- d) laços (*looping*).

O caminho de equilíbrio fundamental é compreendido pela curva que parte da origem do plano cartesiano do gráfico força relacionado com deslocamento e se estende até ao ponto de bifurcação ou ponto limite de força (RODRIGUES, 2000). Em relação a este último, evidencia-se que se trata de máximo global ou local da curva, em que a tangente de rigidez é horizontal.

Ao que concerne ao ponto de bifurcação, trata-se do ponto crítico em que se tem mais de uma trajetória de equilíbrio, em que as possibilidades coexistem, podendo o corpo percorrer quaisquer traçados possíveis a partir do ponto de bifurcação. Na Figura 3.4, apresenta-se o exemplo do ponto de bifurcação.

**Figura 3.4 – Exemplo de instabilidade de ponto de bifurcação**



FONTE: Wriggers, 2008

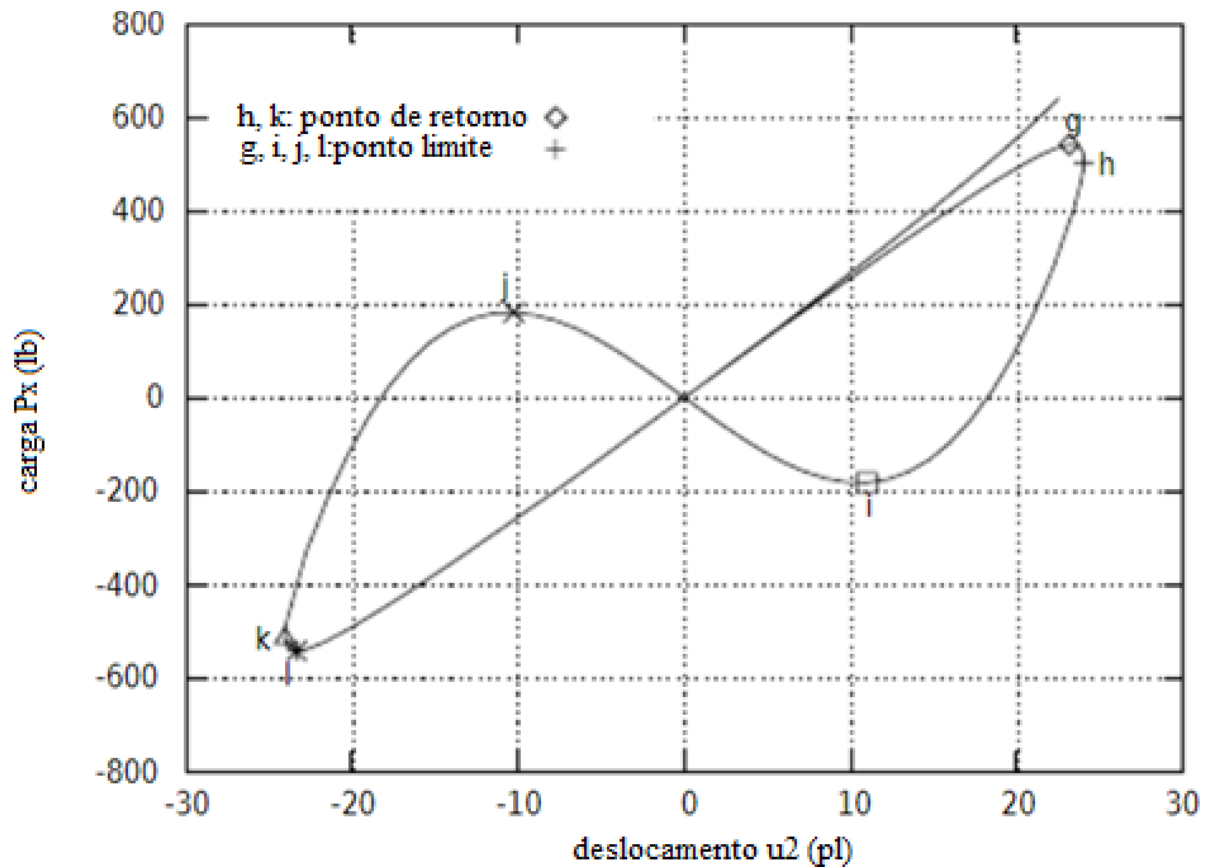
As configurações estáveis do elemento ocorrem quando a carga e o deslocamento agem em paralelo, ou seja, ambas crescem ou decrescem; enquanto que, para configurações instáveis, a relação entre os parâmetros é inversa, isto é, com a diminuição dos deslocamentos, tem-se o aumento de carga ou vice-versa. A este evento denomina-se de *snap-back*, em que a tangente



da rigidez é vertical e está atrelado ao ponto de viragem (*returning point*) da trajetória de equilíbrio (RODRIGUES, 2000).

Em situações mais complexas, é possível observar o caminho de equilíbrio formar laços (loopings), em que traçado se sobrepõe, ocorrendo um padrão de repetição. Na Figura 3.5, tem-se como exemplo o caminho obtido pela pesquisa publicada por Matias (2002).

**Figura 3.5 – Trajetória de equilíbrio com presença de laços**



FONTE: Matias (2002)

## 4 FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) propõe o processo de discretizar determinado domínio de estudo em elementos finitos elementares, conectadas entre si por pontos em comum denominados de nós e, desta forma, ao arranjo de elementos e nós, designa-se de malha. Para a caracterização do problema a ser analisado, impõe-se as condições iniciais, as equações de compatibilidade, bem como as restrições de contorno, fornecendo um sistema consistente e suficiente para a obtenção de solução (LOGAN, 2007).

Em contrapartida ao MEF tradicional, Coda e Greco (2004) apresentam na literatura científica nacional o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), que utiliza as posições como parâmetros nodais ao invés de utilizar os deslocamentos. Assim, dispensa-se os processos de transformações de coordenadas do sistema local para o sistema global, uma vez que as posições já estão inseridas no sistema global e, para além disso, inerentemente é considerado as não linearidades geométricas.

Conforme foi mostrado por Greco et al. (2012) e por Souza (2019), a fim de comparação entre as formulações posicional e corrotacional – esse último utiliza os deslocamentos como parâmetros nodais – observou-se que aquele se apresentou mais eficiente que a formulação corrotacional para problemas estruturais planos com barras biarticuladas, havendo concordância numérica entre os resultados.

Partindo-se que o Método dos Elementos Finitos Posicional se trata de uma descrição Lagrangiana Total, ou seja, é utilizado um único sistema cartesiano de coordenadas para descrever a cinemática do corpo, segundo Bathe (1996) é possível obtê-lo por meio da formulação variacional e da formulação diferencial. Neste presente trabalho, utilizar-se-á o princípio de energia potencial mínimo. Alternativamente, é possível consultar Lacerda (2014) para observar o desenvolvimento e as expressões obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais.

### 4.1 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA

De acordo com Coda e Greco (2004), dado determinado problema estrutural, tem-se que a energia potencial total é expressa pela seguinte Equação 4.1:

$$\Pi = U - P \quad (4.1)$$

em que:  $\Pi$ : energia potencial total;  
 $U$ : energia de deformação, considerando o volume inicial – considerando neste trabalho que o volume se mantém constante, expressa na Equação 4.2;  
 $P$ : energia potencial das forças externas, apresentado na Equação 4.6.

$$U = \int u \, dV \quad (4.2)$$

em que:  $u$ : densidade de energia de deformação, segue-se a expressão na Equação 4.3;  
 $V$ : volume, a energia de deformação é integrada ao longo do volume do elemento.

De acordo com a Lei de Hooke, para material isotrópico, homogêneo e elástico, segue-se que a densidade de energia de deformação é calculada pela Equação 4.3.

$$u = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (4.3)$$

em que:  $E$ : módulo de elasticidade;  
 $\varepsilon$ : parâmetro de deformação.

Assim, retornando à Equação 4.2 e substituindo, vem que:

$$U = \int \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \, dV \therefore U = \frac{1}{2} E A L \varepsilon^2 \quad (4.4)$$

Considera-se que a área transversal se mantém constante ao longo da aplicação das solicitações externas, assim, por meio da Equação 4.5, vem que:

$$U = \int \frac{1}{2} E A \varepsilon^2 \, dx \therefore U = \frac{1}{2} E A L_0 \varepsilon^2 \quad (4.5)$$

em que:  $A$ : área da seção transversal;  
 $L_0$ : comprimento linear indeformado do elemento.

Ainda de acordo com Coda e Greco (2004), já a energia potencial das forças externas é obtida através da Equação 4.6:

$$P = \sum_{i=1}^n f_i x_i = \mathbf{f}^T \mathbf{x} \quad (4.6)$$

em que:  $\mathbf{f}^T$ : vetor de forças externas aplicadas, vetor linha com número de colunas correspondente ao número de graus de liberdade;  
 $\mathbf{x}$ : vetor que contém direção de aplicação da força externa, vetor coluna com o número de linhas correspondentes ao número de graus de liberdade.

Assim, retornando à Equação 4.1, obtém-se o equilíbrio quando a energia potencial total atinge valor mínimo, isto é, a diferença entre as parcelas de energia de deformação e de energia potencial das forças externas tende a zero. Para isso, deve-se extrair as derivadas parciais de todas os elementos em relação ao parâmetro  $\mathbf{x}$ , em cada grau de liberdade, configurando-se assim o princípio da energia potencial mínima. Desta forma, segue-se a Equação 4.7 e a Equação 4.8.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial f_i x_i}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (4.8)$$

Como o presente trabalho está voltado à implantação de código fonte, reescreve-se a equação anterior em forma matricial, considerando a Equação 4.9 e a Equação 4.10.

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.10)$$

Assim, a Equação 4.8 pode ser reescrita conforme a Equação 4.11:

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_r \quad (4.11)$$

em que:  $\mathbf{g}$ : vetor de forças residuais, vetor de forças desbalanceadas;  
 $\mathbf{F}_{\text{int}}$ : vetor de forças internas;  
 $\mathbf{F}_r$ : vetor de forças externas aplicadas.

## 4.2 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

A depender da maneira que é descrita a relação de comportamento de determinada estrutura, define-se a natureza da análise: se a relação entre o vetor de deslocamentos e o vetor de forças externa aplicadas for adequadamente regida por uma função linear, assume-se a

hipótese da análise linear; em contrapartida, se a linearidade não satisfizer essa relação, deve-se recorrer à análise não linear, em que considera a dependência da matriz de rigidez, do vetor de forças externa aplicadas e do vetor de deslocamento (ELLOBODY; FENG; YOUNG, 2014).

Ao encontro do que foi publicado por Clarke e Hancock (1990), as estratégias de solução de problemas não lineares adotadas devem ser capazes de fornecer toda a trajetória de equilíbrio, sobretudo em regiões que antecedem e sucedem pontos críticos – incluem-se pontos limites de força e/ou de deslocamento, bem como a presença de pontos de bifurcação da trajetória. Assim, a obtenção do traçado adequado e completo permite o estudo acerca da resposta estrutural e da sensibilidade às imperfeições.

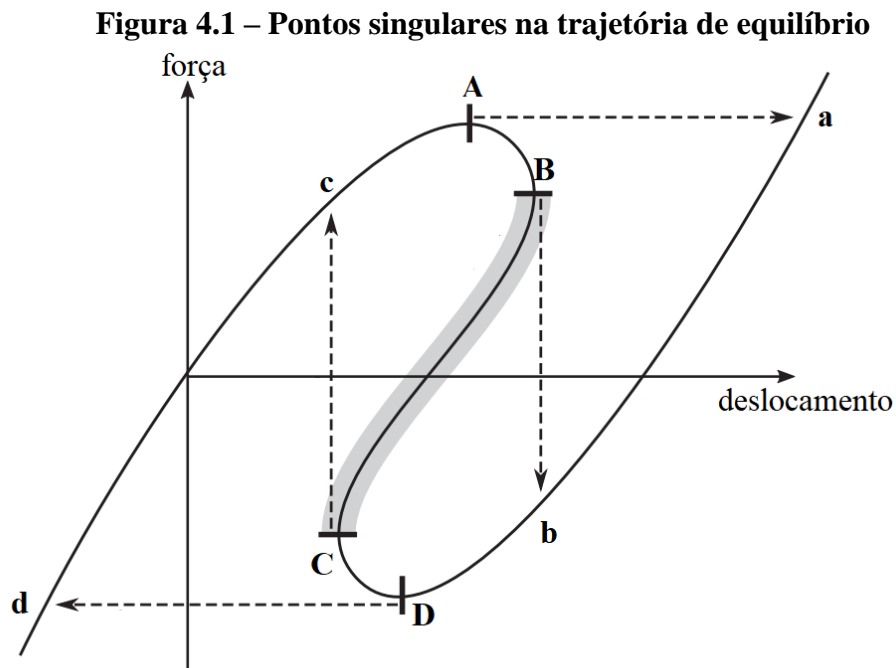
Paralelamente, Yang e Shieh (1990) reiteram que a técnica de solução não linear utilizada deve ser robusta frente aos parâmetros denotados abaixo:

- a) apresentar mecanismo adaptativo quando direção de carregamento oscilar em regiões próximos à pontos críticos;
- b) manter estabilidade numérica durante toda a trajetória, inclusive sob fenômenos críticos;
- c) ao longo do processo iterativo, as correções de parâmetros devem ser condizentes com o amolecimento ou enrijecimento da estrutura.

Ao empregar o Método dos Elementos Finitos (MEF), o sistema de equações não lineares deve ser resolvido por um método de solução capaz de encontrar as raízes aproximadas das equações, buscando-as por meio de uma das três etapas descritas a seguir.

- Preditiva: a partir do arranjo indeformado da estrutura, determina-se o incremento de parâmetro de carga inicial, o qual dará início à análise não linear. A partir desse momento, com a finalidade de atender às equações de compatibilidade e de restrição do problema estrutural, determina-se o incremento de coordenadas nodais (ou de deslocamentos). A esse par de dados, determina-se a solução incremental predita; e
- Corretiva: uma vez determinada a solução incremental predita, parte-se então para processo iterativo em que são realizados os ajustes de equilíbrio entre as forças aplicadas externamente e as forças internas, com o intuito de reduzir o desbalanceamento da força residual. A etapa corretiva estará finalizada quando o critério de convergência for atendido; caso esse critério não seja atendido, a convergência numérica para a solução não ocorre.

Desta forma, torna-se possível extrair a trajetória de equilíbrio. Porém, nos traçados podem existir pontos singulares e/ou críticos, sendo pontos limites de deslocamento (denotado pelos pontos B e C) e/ou pontos limites de força (representados pelos pontos A e D), como é possível observar na Figura 4.1.



Fonte: SHEN et al. (2020)

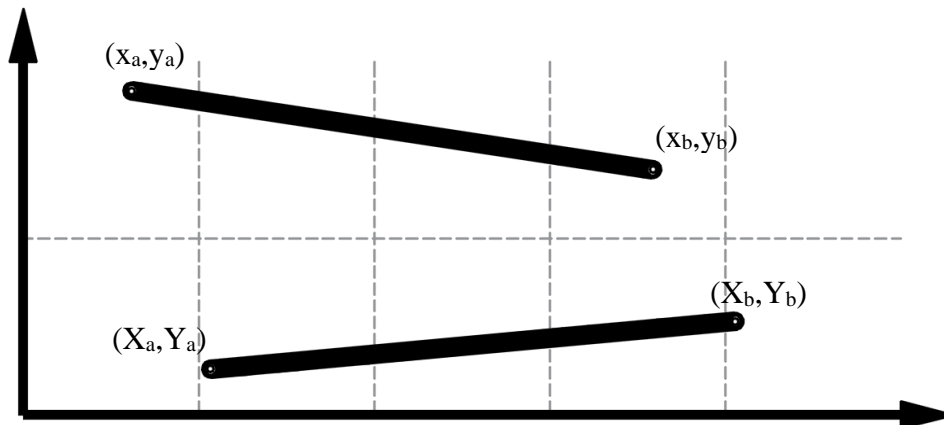
Graficamente, essas perturbações são representadas como pontos de inflexões do caminho de equilíbrio, no quais a estrutura passa de um estado estável para um quadro instável, ou vice-versa. Tendo em vista isso, quando a metodologia numérica não é eficiente, a mesma não é capaz de interpretar as inflexões da curva, realizando um salto dinâmico (em que a trajetória salta do ponto A para o ponto a, do ponto B para o ponto b, assim sucessivamente), ignorando o trecho da trajetória de equilíbrio hachurada em cinza na Figura 4.1. Assim, é necessário que a estratégia numérica a ser utilizada consiga identificá-los e ultrapassá-los sem perder a convergência.

### 4.3 ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA 2D

Consequente ao livro publicado por Assan (2020), as solicitações de cargas externas ocorrem apenas nas extremidades das barras de treliças, não havendo variação de tensão ao longo das treliças, assim, cada barra pode ser considerada um elemento finito.

Na Figura 4.2, tem-se o elemento de treliça na posição indeformada e a respectiva configuração deformada, considerando o deslocamento do corpo rígido, bem como os deslocamentos nodais devido às deformações.

**Figura 4.2 – Elemento finito de treliça indeformado e deformado**



Fonte: Autor (2022)

Do Teorema de Pitágoras, através das relações geométricas, extraem-se a Equação 4.12 e a Equação 4.13, que obtêm os comprimentos inicial e final do elemento.

$$L_0^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 \quad (4.12)$$

em que:

- $L_0$ : comprimento da barra na posição indeformada;
- $X_A$ : posição inicial do nó a no eixo das abscissas;
- $X_B$ : posição inicial do nó b no eixo das ordenadas;
- $Y_A$ : posição inicial do nó a no eixo das abscissas;
- $Y_B$ : posição inicial do nó b no eixo das ordenadas.

$$L^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad (4.13)$$

em que:  $L$  : comprimento da barra na posição deformada;  
 $x_A$ : posição final do nó a no eixo das abscissas;  
 $x_B$ : posição final do nó b no eixo das ordenadas;  
 $y_A$ : posição final do nó a no eixo das abscissas;  
 $y_B$ : posição final do nó b no eixo das ordenadas.

Dessa forma, percebe-se que há dois nós por elemento finito de treliça e, para cada nós, há dois graus de liberdade, sendo um de deslocamento na direção axial do elemento e um de deslocamento na direção transversal à barra. A Figura 4.3 denota os graus de liberdade graficamente.

**Figura 4.3 – Graus de liberdade de um elemento finito de treliça**



FONTE: Autor (2022)

Na abordagem do Método dos Elementos Finitos (MEF) convém a utilização dos elementos na forma matricial, assim, na Equação 4.14 demonstra-se a vetor das coordenadas nodais de determinado elemento.

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \quad (4.14)$$

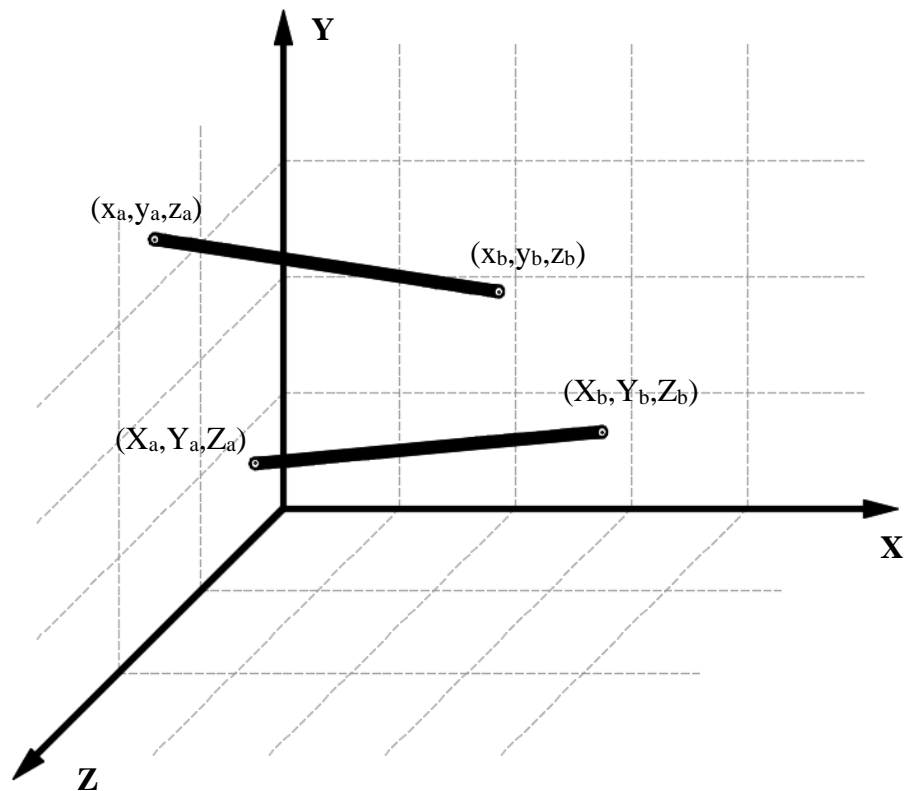
em que:  $\mathbf{x}$ : vetor coordenadas nodais do elemento finito de treliça na posição atual;  
 $x_1$ : posição atual do nó a no eixo das abscissas;  
 $x_2$ : posição atual do nó a no eixo das ordenadas;  
 $x_3$ : posição atual do nó b no eixo das abscissas;  
 $x_4$ : posição atual do nó b no eixo das ordenadas.



#### 4.4 ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA 3D

Para o elemento finito de treliça 3D, estende-se as equações definidas na seção anterior para a terceira dimensão, adicionando-se mais um componente no eixo cartesiano. Analogamente, na Figura 4.4, tem-se o elemento finito espacial de treliça nas condições indeformada e deformada.

**Figura 4.4 – Elemento finito de treliça indeformado e deformado**



Fonte: Autor (2022)

De acordo com Coda e Greco (2014), por meio das relações geométricas, define-se a Equação 4.15 e a Equação 4.16, que permitem calcular os comprimentos inicial e final do elemento.

$$L_0^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2 \quad (4.15)$$

em que:  $L_0$ : comprimento da barra na posição indeformada;  
 $X_A$ : posição inicial do nó a no eixo das abscissas;  
 $X_B$ : posição inicial do nó b no eixo das ordenadas;  
 $Y_A$ : posição inicial do nó a no eixo das abscissas;  
 $Y_B$ : posição inicial do nó b no eixo das ordenadas;  
 $Z_A$ : posição inicial do nó a no eixo das cotas;  
 $Z_B$ : posição inicial do nó b no eixo das cotas.

$$L^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \quad (4.16)$$

em que:  $L$ : comprimento da barra na posição deformada;  
 $x_A$ : posição final do nó a no eixo das abscissas;  
 $x_B$ : posição final do nó b no eixo das ordenadas;  
 $y_A$ : posição final do nó a no eixo das abscissas;  
 $y_B$ : posição final do nó b no eixo das ordenadas;  
 $z_A$ : posição final do nó a no eixo das cotas;  
 $z_B$ : posição final do nó b no eixo das cotas.

Diferentemente do elemento finito de treliça plana, que possui 4 graus de liberdade, para o caso 3D, o número de nós se mantém dois, porém, o número de graus de liberdade por nó passa a ser três: sendo um de deslocamento na direção axial da barra, um de deslocamento na direção transversal à barra e uma em relação ao deslocamento das cotas dos elementos. Desta forma, totaliza-se em 6 graus de liberdade por elemento finito. A Figura 4.5 demonstra graficamente os parâmetros de cada grau.

**Figura 4.5 – Graus de liberdade de um elemento finito de treliça**



FONTE: Autor (2022)

Na abordagem do Método dos Elementos Finitos (MEF) convém a utilização dos elementos na forma matricial, assim, na Equação 4.17 demonstra-se a vetor das coordenadas nodais de determinado elemento.

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T \quad (4.17)$$

em que:  $\mathbf{x}$ : vetor coordenadas nodais do elemento finito de treliça na posição atual;  
 $x_1$ : posição atual do nó a no eixo das abcissas;  
 $x_2$ : posição atual do nó a no eixo das ordenadas;  
 $x_3$ : posição atual do nó a no eixo das profundidades;  
 $x_4$ : posição atual do nó b no eixo das ordenadas;  
 $x_5$ : posição atual do nó b no eixo das abcissas;  
 $x_6$ : posição atual do nó b no eixo das cotas.

## 4.5 PARÂMETRO DE DEFORMAÇÃO

### 4.5.1 Deformação de engenharia

Apresentando a medida de deformação mais elementar, a deformação de engenharia é definida pela Equação 4.18.

$$\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (4.18)$$

Para obter a expressão da matriz rigidez tangente, deve-se derivar parcialmente o vetor de forças internas em relação à variável de posição ( $x$ ), conseguinte à Equação 4.19:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial x} \quad (4.19)$$

Reescrevendo a Equação 4.10 que designa o vetor de forças internas e aplicando a Equação 4.5 e a deformação de Green-Lagrange, vem que:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} EAL_0 \varepsilon_E^2 \right) \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \frac{1}{2} EAL_0 \frac{\partial \varepsilon_E^2}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.21)$$

Porém, estabelece-se a seguinte relação demonstrada na Equação 4.22, para fins de simplificação de cálculo:

$$\frac{\partial \varepsilon_E^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\varepsilon_E \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.22)$$

Portanto, reescrevendo a Equação 4.21, tem-se a Equação 4.23:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = EAL_0 \varepsilon_E \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.23)$$

Assim, aplica-se a operação matemática sobre a Equação 4.24, que discorre em relação à deformação de engenharia.

$$\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{L - L_0}{L_0} \right) \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L_0} \mathbf{d} \quad (4.25)$$

Em que  $\mathbf{d}$  é um vetor de relações geométricas da barra de treliça plana, como está denotada na Equação 4.26 e para a treliça espacial está descrita na Equação 4.27.

$$\mathbf{d} = [x_A - x_B, y_A - y_B, x_B - x_A, y_B - y_A]^T \quad (4.26)$$

$$\mathbf{d} = [x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B, x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]^T \quad (4.27)$$

Assim, torna-se viável determinar o vetor de forças internas segundo a Equação 4.23 e aplicando a Equação 4.25, tem-se as manipulações matemáticas a seguir:

$$\mathbf{F}_{int} = EAL_0\varepsilon_E \cdot \frac{1}{L_0L} \mathbf{d} \therefore \mathbf{F}_{int} = \frac{EA\varepsilon_E}{L} \mathbf{d} \quad (4.28)$$

Desta maneira, obtém-se a expressão da matriz de rigidez secante, retomando a Equação 4.19 e substituindo a Equação 4.28 tem-se que:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{EA\varepsilon_E}{L} \mathbf{d} \right) \therefore \mathbf{K}_t = EA \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\varepsilon_E}{L} \mathbf{d} \right) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{K}_t = EA \left( \frac{\varepsilon_E}{L} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{d} \otimes \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (4.30)$$

Substituindo a Equação 4.25 na Equação 4.30, vem que:

$$\mathbf{K}_t = EA \left( \frac{\varepsilon_E}{L} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{d} \otimes \frac{1}{L_0L} \mathbf{d} \right) \quad (4.31)$$

Reduzindo-se, é possível encontrar a matriz rigidez tangente, que está denotada conforme apresenta na Equação 4.32.

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \left( \varepsilon_E \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{L^2} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \right) \quad (4.32)$$

Com a finalidade de simplificar a visualização da expressão da matriz de rigidez tangente, oferece-se duas variáveis: a primeira denotada na Equação 4.33; e a segunda conseqüentes à Equação 4.34 e à Equação 4.35, para o sistema 2D e 3D respectivamente.

$$\mathbf{B} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} I_3 & -I_3 \\ -I_3 & I_3 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Diante das relações apresentadas, reescreve-se a Equação 4.36 conforme a Equação 4.36:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{EA\varepsilon_E}{L} \mathbf{C} \quad (4.36)$$

#### 4.5.2 Deformação de Green-Lagrange

Como é possível observar nas relações geométricas das barras, o comprimento da barra está expresso ao quadrado, assim, a fim de eliminar o manuseio das mesmas, a deformação de Green-Lagrange utiliza os termos elevado ao quadrado.

Desta forma, a partir da deformação de Cauchy denotada na Equação 4.17, multiplica-se o denominador e numerador pelo fator  $(L + L_0)$ , conforme o que está descrito entre na Equação 4.37 e na Equação 4.38.

$$\varepsilon_G = \frac{(L - L_0) \cdot (L + L_0)}{L_0 \cdot (L + L_0)} \quad (4.37)$$

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2(2 + \varepsilon_E)} \quad (4.38)$$

Considera-se que a deformação é pequena tendendo a zero, desta forma vem que:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \quad (4.39)$$

Para obter a expressão da matriz rigidez tangente, deve-se derivar parcialmente o vetor de forças internas em relação à variável de posição ( $x$ ), conseguinte à Equação 4.40:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial x} \quad (4.40)$$

Reescrevendo a Equação 4.10 que designa o vetor de forças internas e aplicando a Equação 4.5 e a deformação de Green-Lagrange, vem que:

$$\mathbf{F}_{int} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} EAL_0 \varepsilon_G^2 \right) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{F}_{int} = \frac{1}{2} EAL_0 \frac{\partial \varepsilon_G^2}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.42)$$

Porém, estabelece-se a seguinte relação demonstrada na Equação 4.43, para fins de simplificação de cálculo:

$$\frac{\partial \varepsilon_G^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\varepsilon_G \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.43)$$

Portanto, reescrevendo a Equação 4.42, tem-se a Equação 4.44:

$$\mathbf{F}_{int} = EAL_0 \varepsilon_G \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.44)$$

Assim, aplica-se a operação matemática sobre a Equação 4.39. que discorre em relação à deformação de Green-Lagrange.

$$\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \right) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2L_0^2} \frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.46)$$

Recorrendo-se à Equação 4.13, que apresenta a relação do comprimento da barra deformada 2D. Portanto, segue-se que:

$$\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2) = 2\mathbf{d} \quad (4.47)$$

Em que  $\mathbf{d}$  é um vetor de relações geométricas da barra de treliça, definidas na Equação 4.26 e na Equação 4.27. Assim, retornando à Equação 4.46 e aplicando a Equação 4.47, é possível determinar que:

$$\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2L_0^2} \cdot 2\mathbf{d} \therefore \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L_0^2} \mathbf{d} \quad (4.48)$$

Assim, torna-se viável determinar o vetor de forças internas segundo a Equação 4.44 e aplicando a Equação 4.48, tem-se as manipulações matemáticas a seguir:

$$\mathbf{F}_{int} = EAL_0 \varepsilon_G \cdot \frac{1}{L_0^2} \mathbf{d} \therefore \mathbf{F}_{int} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{d} \quad (4.49)$$

Com a finalidade de determinar a matriz de rigidez secante, recorre-se novamente à Equação 4.40 e substitui-se a Equação 4.49:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{d} \right) \therefore \mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\varepsilon_G \mathbf{d}) \quad (4.50)$$

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0} \left( \varepsilon_G \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{d} \otimes \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (4.51)$$

Por fim, substitui-se a Equação 4.48 na Equação 4.51, encontra-se que a matriz rigidez tangente, que passa a ser descrita conforme a Equação 4.52.

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0} \left( \varepsilon_G \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{d} \otimes \left( \frac{1}{L_0^2} \mathbf{d} \right) \right) \quad (4.52)$$

Alternativamente, pode-se reduzir a expressão matemática reescrevendo-a conseguinte à Equação 4.53, cujas variáveis B e C já foram definidas pela Equação 4.33, pela Equação 4.34 e pela Equação 4.35.

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{C} \quad (4.53)$$

Salienta-se que a matriz de rigidez com a formulação da medida de deformação de Green-Lagrange se difere da deformação de Cauchy pela variável presente no denominador, enquanto a primeira incorpora o comprimento indeformado das barras, a segunda contém o comprimento deformado dos elementos finitos de treliça.

#### 4.6 QUADRO RESUMO DAS FORMULAÇÕES

Na Tabela 4.1, encontra-se as formulações estabelecidas nas seções anteriores, apresentando as expressões matemáticas para a obtenção da deformação, do vetor de forças e da matriz rigidez das formulações de Engenharia, Green-Lagrange e Logarítmica.

**Tabela 4.1 – Quadro-resumo das formulações matemáticas**

Formulação	$\varepsilon$	$\mathbf{F}_{\text{int}}$	$\mathbf{K}_t$
Engenharia	$\frac{L - L_0}{L_0}$	$\frac{EA\varepsilon_E}{L} \mathbf{d}$	$\frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{EA\varepsilon_E}{L} \mathbf{C}$
Green-Lagrange	$\frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$	$\frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{d}$	$\frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{C}$

FONTE: Autor (2022)



## 5 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Como foi apresentado na seção 3.2, fica a cargo dos métodos de solução encontrar a solução dos sistemas de problemas não linear, garantindo que os resultados obtidos sejam condizentes com a análise estrutural.

Salienta-se que o método de solução tradicional de problemas não lineares, o Newton-Raphson padrão, fornece uma única solução, gerando apenas um ponto que está contido no traçado de equilíbrio. Dessa forma, opta-se por concatenar estratégias de incremento de carga juntamente com o procedimento iterativo, assim, é possível extrair inúmeras soluções que constroem uma trajetória.

Neste trabalho, trabalhar-se-á com procedimento incremental-iterativo baseado no método de Newton-Raphson e no método de Kou *et al.* (2006), que são apresentadas nos tópicos subsequentes.

### 5.1 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO BASEADO NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (NR)

Segundo os pesquisadores Maximiano, Silva e Silveira (2014), o comportamento do sistema estrutural geometricamente não linear pode ser descrito conforme a Equação 5.1.

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (5.1)$$

em que:  $\mathbf{F}_{int}$ : vetor de forças internas, que é em função dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura;  
 $\lambda$ : parâmetro de carga;  
 $\mathbf{F}_r$ : vetor referencial que caracteriza a direção do carregamento externo.

Enfocando a análise não linear, deve-se atentar ao arranjo de forças aplicadas à estrutura em análise, resultando no balanceamento desequilibrado, denotado pelo gradiente  $\mathbf{g}$ . Assim, na Equação 5.2, reescreve-se a equação anterior.

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}) - \lambda \mathbf{F}_r = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

em que:  $\mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda)$ : vetor de forças residuais, em função do vetor deslocamento e do parâmetro de carga;  
 $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{d})$ : vetor de forças internas, em função do vetor de deslocamento;  
 $\lambda$ : parâmetro de carga;  
 $\mathbf{F}_r$ : vetor de forças aplicadas externamente;  
 $\mathbf{0}$ : vetor nulo.

Com o esquema iterativo-incremental, para cada incremento de parâmetro de carga ( $\Delta\lambda$ ), é calculado um incremento de deslocamento ( $\Delta\mathbf{d}$ ), porém, como o vetor de forças internas possui natureza não linear, é necessário a correção para cada etapa incremental para que seja possível encontrar a solução que descreva a trajetória de equilíbrio.

O sistema de equações não lineares é composto por (n+1) incógnitas – sendo o vetor  $\mathbf{d}$  com n elementos e o parâmetro de carga ( $\lambda$ ) –, com apenas n equações, tornando inviável a investigação acerca da solução. Assim, para que o sistema de equações não lineares seja solucionado, necessita-se impor uma condição de restrição por meio de uma equação adicional ao sistema.

Na Equação 5.3, apresenta a equação adicionada ao sistema não linear, referente à condição restritiva.

$$\mathbf{c}(\mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

em que:  $\mathbf{c}(\mathbf{d}, \lambda)$  variável que depende da técnica de continuação a ser acoplada ao método, que é em função dos deslocamentos e do parâmetro de carga.

Conforme os autores Souza et al. (2018) e Leon et al. (2011), com a o sistema de equações não linear listadas, aplica-se o método Newton-Raphson padrão nas Equações 5.2 e 5.3, descritas nas Equações 5.4 e 5.5, respectivamente.

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{(k-1)}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{g}^{(k-1)}}{\partial \lambda} \delta \lambda^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^{(k-1)}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d}^{(k)} - \delta \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r = -\mathbf{g}^{(k-1)} \quad (5.4)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{c}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}} \right)^T \delta \mathbf{d}^{(k+1)} + \frac{\partial \mathbf{c}^{(k)}}{\partial \lambda} \delta \lambda^{(k+1)} = -\mathbf{c}^{(k)} \quad (5.5)$$

Adicionalmente, tem-se que a matriz rigidez do arranjo estrutural corresponde à matriz Jacobiana descrita na Equação 5.6.

$$\mathbf{K}^{(k-1)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^{(k-1)}}{\partial \mathbf{d}} \quad (5.6)$$

em que:  $\frac{\partial \mathbf{F}_{int}^{(k-1)}}{\partial \mathbf{d}}$ : componente da matriz Jacobiana;

$\mathbf{K}^{(k-1)}$ : matriz rigidez.

Desta forma, reescreve-se a Equação 5.4 aplicando a Equação 5.6, conforme está denotado na Equação 5.7:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{d}^{(k+1)} - \delta \lambda^{(k+1)} \mathbf{F}_r = -\mathbf{g}^{(k)} \quad (5.7)$$

Considerando ainda que a matriz rigidez é inversível, tem-se que:

$$\mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I} \quad (5.8)$$

Portanto,

$$\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)-1} \delta \mathbf{d}^{(k+1)} - \delta \lambda^{(k+1)} \mathbf{F}_r \mathbf{K}^{(k)-1} = -\mathbf{g}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)-1} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)-1} \delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \delta \lambda^{(k+1)} \mathbf{F}_r \mathbf{K}^{(k)-1} - \mathbf{g}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)-1} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{I} \delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \delta \lambda^{(k+1)} \mathbf{F}_r \mathbf{K}^{(k)-1} - \mathbf{g}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)-1} \quad (5.11)$$

$$\delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \delta \lambda^{(k+1)} \mathbf{F}_r \mathbf{K}^{(k)-1} - \mathbf{g}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)-1} \quad (5.12)$$

Com finalidade de simplificar, define-se que:

$$\delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} = -\mathbf{K}^{(k)-1} \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k)}, \lambda^{(k)}) \quad (5.13)$$

$$\delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} = \mathbf{K}^{(k)-1} \mathbf{F}_r \quad (5.14)$$

Portanto, vem que:

$$\delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} \quad (5.15)$$

Em que:

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \delta \mathbf{d}^{(k+1)} \quad (5.16)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k+1)} \quad (5.17)$$

## 5.2 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO BASEADO NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO (NRM)

De acordo com Kao (1974), o procedimento relativo ao Newton-Raphson Modificado consiste em não atualizar a matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) em cada passo incremental-iterativo. Para casos em que o incremento de força é suficientemente pequeno para manter a matriz de rigidez tangente estável, torna-se desnecessário a correção da matriz de rigidez, assim o esforço computacional necessário para processar o problema pode ser consideravelmente menor.

Por outro lado, tratando-se de análise geometricamente não linear, há necessidade em reformular e atualizar os parâmetros para que não deixem de ser válidos. Diante disso, a não atualização da matriz de rigidez pode corroborar para que a metodologia necessite de mais passos de carga para a convergência ou, em quadros desfavoráveis, para que não haja convergência.

## 5.3 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO PROPOSTO BASEADO NO MÉTODO DE KOU ET AL. (2006)

Consequente aos autores Kou et al. (2006), propõe-se uma modificação no método padrão de Newton-Raphson, com a finalidade de tornar o método de solução mais eficiente, de modo que a solução do sistema seja encontrada mais facilmente.

Diante disso, o procedimento iterativo-incremental baseado no método de Kou et al. (2006) calcula dois valores para a função no mesmo passo de carga, requerendo apenas a solução da derivada de primeira ordem, assim a ordem de convergência deste método modificado é cúbica. Então, na Equação 5.18, apresenta-se os parâmetros do vetor de deslocamento a serem calculados.

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \delta \mathbf{d}_1^{(k+1)} - \delta \mathbf{d}_2^{(k+1)} \quad (5.18)$$

Em que:

$$\delta \mathbf{d}_1^{(k+1)} = \delta \lambda_1^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} \quad (5.19)$$

Definindo-se que:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \delta \mathbf{d}_1^{(k+1)} \quad (5.20)$$

Analogamente, segue-se para:

$$\delta \mathbf{d}_2^{(k+1)} = \delta \lambda_2^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{d}_{gy}^{(k+1)} \quad (5.21)$$

E, por fim, tem-se que:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k+1)} \quad (5.22)$$

Salienta-se que, tanto para o processo incremental-iterativo baseado no Newton-Raphson quanto baseado em Kou et al. (2006), o vetor de sub-incremento de parâmetro de carga depende da técnica de continuação a ser utilizada, cujo assunto será abordado na seção 8.

Além disso, ressalta-se que entre as metodologias para a obtenção do vetor de sub-incremento de coordenadas nodais tem-se o processo convencional e o fluxo normal, cujas formulações estão apresentadas na seção subsequente.

## 6 OBTENÇÃO DO VETOR DE SUB-INCREMENTO DE COORDENADAS NODAIS

### 6.1 PROCESSO CONVENCIONAL

Como apresentado na Equação 5.15, estendendo-se para as Equações 5.19 e 5.21, o vetor de sub-incremento de coordenadas nodais obtido pelo processo convencional será calculado conforme a equação reescrita:

$$\delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} \quad (5.15)$$

Entretanto, o processo convencional pode levar à instabilidade numérica e/ou ao número maior de iterações para obter a trajetória de equilíbrio, uma vez que há erros residuais na rotina de cálculo, que podem ser mitigados com o emprego da técnica do fluxo normal.

### 6.2 FLUXO NORMAL

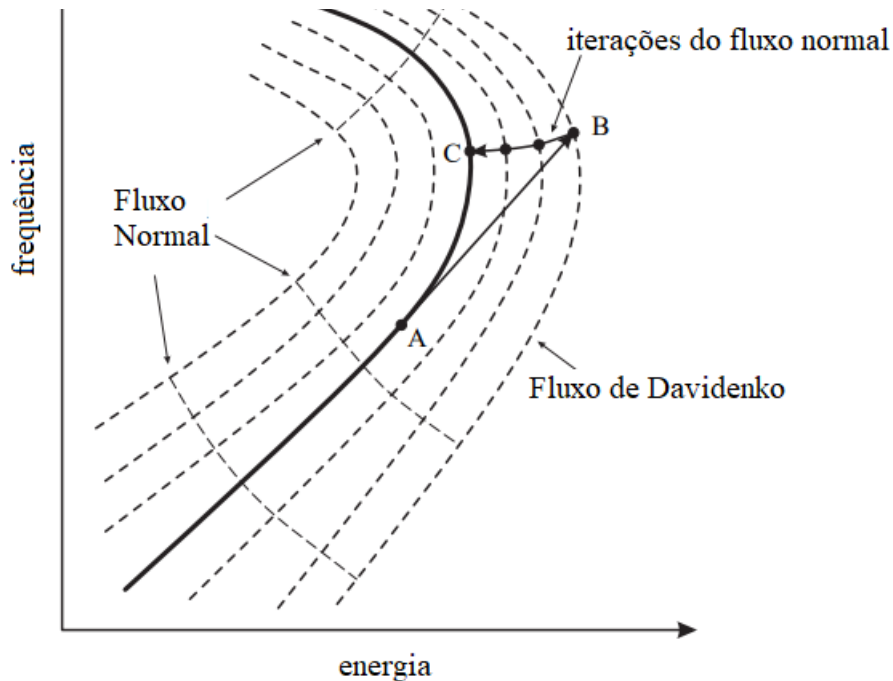
Adjacente ao processo convencional, o fluxo normal se dispõe em buscar soluções para o desbalanceamento entre o vetor de forças externas aplicadas e o vetor de forças internas por meio de rotina iterativa de correção, ao longo da direção normal das curvas de Davidenko, que são conhecidas na literatura científica (ALLGOWER; GEORG, 1980).

Na Equação 6.1, apresenta a expressão para a obtenção do vetor de coordenadas nodais considerando a técnica do fluxo normal. Consequente a Maximiano, Silva e Silveira (2014), as iterações sempre são normais às curvas, uma vez que o segundo termo da expressão é a projeção do primeiro termo na direção do vetor de coordenadas nodais, garantindo a ortogonalidade.

$$\delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} + \delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} - \frac{\left( \delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} + \delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} \right)^T \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)}}{\delta \mathbf{d}_r^{(k+1)T} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)}} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} \quad (6.1)$$

Do ponto de vista da Matemática, os fluxos de Davidenko descrevem uma família de curvas denominadas de curvas zero, que surgem quando há perturbações residuais nas vizinhanças da equação. Na Figura 6.1, apresenta-se geometricamente as curvas de Davidenko, os fluxos normais e o processo iterativo (JERSCHL; SÜß; WILLNER, 2014).

**Figura 6.1 – Curvas de propagação de Davidenko**



Fonte: JERSCHL; SÜß; WILLNER, 2014

De acordo com Jersch, Süß e Willner (2014), as linhas tracejadas representam as curvas de Davidenko, nas quais o ponto B predito irá convergir por meio do processo iterativo de fluxo normal em direção ortogonal às curvas de Davidenko, chegando ao ponto C.

Da mesma maneira, para as Equações 5.19 e 5.21, aplicando a técnica do fluxo normal para a obtenção do vetor de sub-incremento de coordenadas nodais, determina-se as Equações 6.2 e 6.3.

$$\delta \mathbf{d}_1^{(k+1)} = \delta \lambda_1^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} - \frac{(\delta \mathbf{d}_g^{(k+1)} + \delta \lambda_1^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)})^T \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)}}{\delta \mathbf{d}_r^{(k+1)T} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)}} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} \quad (6.2)$$

$$\delta \mathbf{d}_2^{(k+1)} = \delta \lambda_2^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{d}_{gy}^{(k+1)} -$$

$$\frac{\left( \delta \mathbf{d}_{gy}^{(k+1)} + \delta \lambda_2^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} \right)^T \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)}}{\delta \mathbf{d}_r^{(k+1)T} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)}} \delta \mathbf{d}_r^{(k+1)} \quad (6.3)$$

Assim sendo, o deslocamento nodal a cada passo de carga é determinado pela Equação 6.4:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k+1)} - {}^0 \mathbf{d} \quad (6.4)$$

em que:  $\mathbf{u}^{(k+1)}$ : deslocamento nodal do passo corrente;  
 $\mathbf{d}^{(k+1)}$ : coordenadas nodais do passo corrente;  
 ${}^0 \mathbf{d}$ : coordenadas nodais iniciais.



## 7 TÉCNICAS DE INCREMENTO DE PARÂMETRO DE CARGA

Tangente às técnicas de incremento de parâmetro de carga, este deve ser capaz de determinar a magnitude dos incrementos, uma vez que para trechos do caminho de equilíbrio que estiverem submetidos à presença de pontos críticos, deve-se realizar número maior de ciclos incrementais-iterativo que sejam capazes de investigar adequadamente a resposta estrutural. Todavia, é necessário encontrar o equilíbrio entre a precisão da análise e o custo computacional para a realização dos cálculos.

Tendo isto em mente, Rocha (2000) explica que as técnicas eficientes de incremento devem ser obedecer aos seguintes critérios:

- a) em trechos lineares da trajetória de equilíbrio, a estratégia adotada deve retornar com incrementos maiores;
- b) em trechos em que há fortes evidências de resposta não linear, deve-se fornecer incrementos de cargas menores;
- c) para a identificação de pontos críticos do caminho, deve identificar quando os pontos críticos são ultrapassados, adotando o sinal adequado para o incremento de carga.

### 7.1 TÉCNICAS RESTRITIVAS NO INCREMENTO PREDITO

As restrições desta natureza se baseiam em comparar a relação de número de iterações desejadas para a convergência e quantidade de iterações necessárias no passo anterior, fornecendo o controle de incremento predito de parâmetro adotado. Na Equação 7.1, tem-se a equação proposta por Crisfield (1981) e Ramm (1981):

$$\theta = {}^t\theta \left( \frac{I_d}{{}^tI} \right)^\alpha \quad (7.1)$$

em que:

$\theta$ : parâmetro restritivo, podendo ser incremento de carga, comprimento de arco linear, componente de deslocamento ou trabalho;

$I_d$ : número de iterações desejadas;

${}^tI$ : número de iterações necessárias à convergência ao passo anterior;

$\alpha$ : parâmetro que varia entre 0,5 e 2, utilizando neste presente trabalho o valor equivalente a 0,5 (CRISFIELD, 1981; RAMM, 1981).

### 7.1.1 Incremento restringido por parâmetro de carga

Acoplado à metodologia numérica de solução de problemas não lineares, Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982) preconiza comparar o número de iterações baseadas no parâmetro de carga para o controle do incremento inicial, por meio da Equação 7.2:

$$\Delta\lambda^0 = \pm^t \Delta\lambda^0 \left( \frac{I_d}{tI} \right)^{0,5} \quad (7.2)$$

### 7.1.2 Incremento restringido por componente de deslocamento

Consequente aos autores Batoz e Dhatt (1979), instrui-se a adotar um componente de deslocamento – vertical por exemplo, ‘j’ – como a grandeza restritiva e determinante do incremento inicial. Tem-se a Equação 7.3 publicada pelos autores:

$$\Delta\mathbf{d}_j = \pm^t \Delta\mathbf{d}_j \left( \frac{I_d}{tI} \right)^{0,5} \quad (7.3)$$

Assim, o incremento de deslocamento em uma das direções escolhida passa a ser o vetor de deslocamento inicial do ciclo incremental-iterativo, ou seja, como é explicitado na Equação 7.4:

$$\Delta\mathbf{d}^0 = \Delta\mathbf{d}_j \quad (7.4)$$

Com a Equação 7.4, tem-se o cálculo do incremento inicial do parâmetro de carga controlado pelo componente deslocamento adotado expresso na Equação 7.5:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta\mathbf{d}_j}{\delta\mathbf{d}_{rj}} \quad (7.5)$$

### 7.1.3 Incremento restringido pelo trabalho externo

Analogamente às técnicas apresentadas anteriormente, o trabalho externo também poder ser uma grandeza utilizada para o controle do incremento inicial do parâmetro de carga, a depender do número de iterações desejadas e necessárias no passo anterior. Na Equação 7.6, é possível calcular o incremento de trabalho externo realizado:

$$\Delta W = \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{d}_r \quad (7.6)$$

Assim, aplicando a grandeza em questão à Equação 7.7, vem que:

$$\Delta W = {}^t\Delta W \left( \frac{I_d}{tI} \right)^{0,5} \quad (7.7)$$

E, então, isolando a parcela do incremento do parâmetro de carga na Equação 7.7, tem-se que o incremento preditivo de parâmetro de carga será conforme a Equação 7.8:

$$\Delta\lambda^0 = \frac{\Delta W}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{d}_r} \quad (7.8)$$

#### 7.1.4 Incremento restringido por comprimento de arco

A restrição imposta pelo comprimento de arco se relaciona com os deslocamentos nodais iniciais da seguinte forma descrita na Equação 7.9:

$$(\Delta \mathbf{d}^0)^T \Delta \mathbf{d}^0 = \Delta l^2 \quad (7.9)$$

Com a Equação 7.1, aplicando-se os comprimentos de arcos, vem que o incremento do comprimento de arco será extraído com a Equação 7.10:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left( \frac{I_d}{tI} \right)^{0,5} \quad (7.10)$$

Com a Equação 7.10, substituindo a parcela  $\Delta \mathbf{d}^0$  da Equação 7.9, vê-se a expressão da determinação do controle de incremento inicial de parâmetro de carga.

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}_r}} \quad (7.11)$$

## 7.2 TÉCNICAS RESTRITIVAS NO INCREMENTO PREDITO E NA ITERAÇÃO

### 7.2.1 Incremento restringido pelo Parâmetro de Rigidez Geral (GSP)

Como já visto anteriormente, é formado um sistema de equações não lineares com n+1 incógnitas e, para a solução deste sistema, deve-se impor uma equação restritiva. Pela

consideração do GSP, conforme mostram os autores Yang e Kuo (1994), a restrição é imposta pela Equação 7.12:

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{d}^k + k^1 \delta \lambda^k = H^k \quad (7.12)$$

em que:  $\mathbf{C}^T$ : constante equivalente a Equação 7.13:

$$\mathbf{C} = \Delta \lambda^{0t} \delta \mathbf{d}_r \quad (7.13)$$

$\delta \mathbf{d}^k$ : subincremento de deslocamento nodais no passo corrente;  
 $k^1$ : constante com valor nulo, sugerido por Yang Shieh (1990);  
 $\delta \lambda^k$ : subincremento de parâmetro de carga no passo corrente;  
 $H^k$ : parâmetro incremental.

Assim, chega-se à expressão de obtenção do sub-incremento do parâmetro de carga descrita na Equação 7.14:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^{0t} \delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}^k} (H^k - \Delta \lambda^{0t} \delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}_g^k) \quad (7.14)$$

Em se tratando do incremento inicial, considera-se que:

- a)  $k = 0$ ;
- b)  $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$ .

Portanto,

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H^0}{\delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}^k}} \quad (7.15)$$

Em que:

$$H^0 = (\Delta \lambda_1^0)^2 \delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}_r \quad (7.16)$$

Substituindo na Equação 7.15, tem-se que:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \Delta \lambda_1^0 \sqrt{\frac{\delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}_r}{\delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}^k}} \quad (7.17)$$

O Parâmetro Geral de Rigidez (GSP) é definido como é mostrado na Equação 7.18.

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta d_r^T {}^1\delta d_r}{{}^t\delta d_r^T \delta d^k} \quad (7.18)$$

E, por fim, obtém-se que:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (7.19)$$

### 7.3 COMENTÁRIOS ACERCA DO SINAL DO INCREMENTO DE PARÂMETRO DE CARGA

Observou-se nas equações que permitem determinar o incremento de parâmetro de carga, presentes nas seções anteriores, que o sinal pode assumir valores positivos ou negativos. A eficiência da técnica empregada, bem como o sucesso da análise, depende diretamente do uso adequado do sinal, pois é o que permitirá que o ciclo incremental-iterativo ocorra ininterruptamente.

A discussão acerca do sinal está presente pelos autores que propuseram as técnicas anteriormente mencionadas, destacando-se os seguintes comentários:

- a) Consequente a Yang e Kuo (1994), o Parâmetro Geral de Rigidez torna-se negativo em trechos próximos a pontos limites e em outros casos se mantém positivos, a depender dos vetores de passo carga anterior e corrente, respectivamente;
- b) Conforme Crisfield (1991), sugere-se que o sinal de do incremento preditivo do parâmetro de carga seja de mesma natureza do passo anterior, exceto quando o determinante da matriz rigidez tangente ( $\mathbf{K}$ ) passe a ser negativo;
- c) Segundo as orientações propostas por Krenk e Hancock (1993 e 1995), deve-se analisar o produto interno entre os componentes de incremento de deslocamento obtido no passo de carga anterior e o incremento de deslocamento nodais do passo corrente. Caso o produto dê negativo, muda-se o sinal do incremento preditivo de parâmetro de carga.

No presente trabalho, adotar-se-á a Equação 7.20 para alternar a natureza do sinal do incremento de parâmetro de carga, quando a multiplicação entre o incremento de deslocamento nodal transposto e o sub-incremento de deslocamento nodal devido às forças externas for negativa.

$$\text{Se } \frac{\Delta \mathbf{d}^{(k+1)T}}{\delta d_r^{(k+1)}} \leq 0 \rightarrow \Delta \lambda = -\Delta \lambda \quad (7.20)$$

Este teste que promove a mudança do sinal do incremento de parâmetro de carga, permite que a abordagem numérica extraia a trajetória de equilíbrio correta, identificando seus pontos críticos.

## 8 TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO

### 8.1 TÉCNICA DE CONTROLE DE CARGA CONSTANTE

Nesta técnica, o incremento de parâmetro de cargas é nulo, consistindo em manter o parâmetro de carga invariável durante todo o ciclo iterativo, não possibilitando a convergência para as trajetórias de equilíbrio que possuem pontos críticos, ou seja, a iteração baseada na carga constante traçará o caminho corretamente até o primeiro ponto limite e, a partir desse ponto, notar-se-á saltos dinâmicos na trajetória. Nas Equações 8.1, 8.2 e 8.3, tem-se as condições válidas para esta técnica em questão.

$${}^t\delta\lambda = \delta\lambda^k = \delta\lambda^{k+1} = 0 \quad (8.1)$$

Assim, vem que:

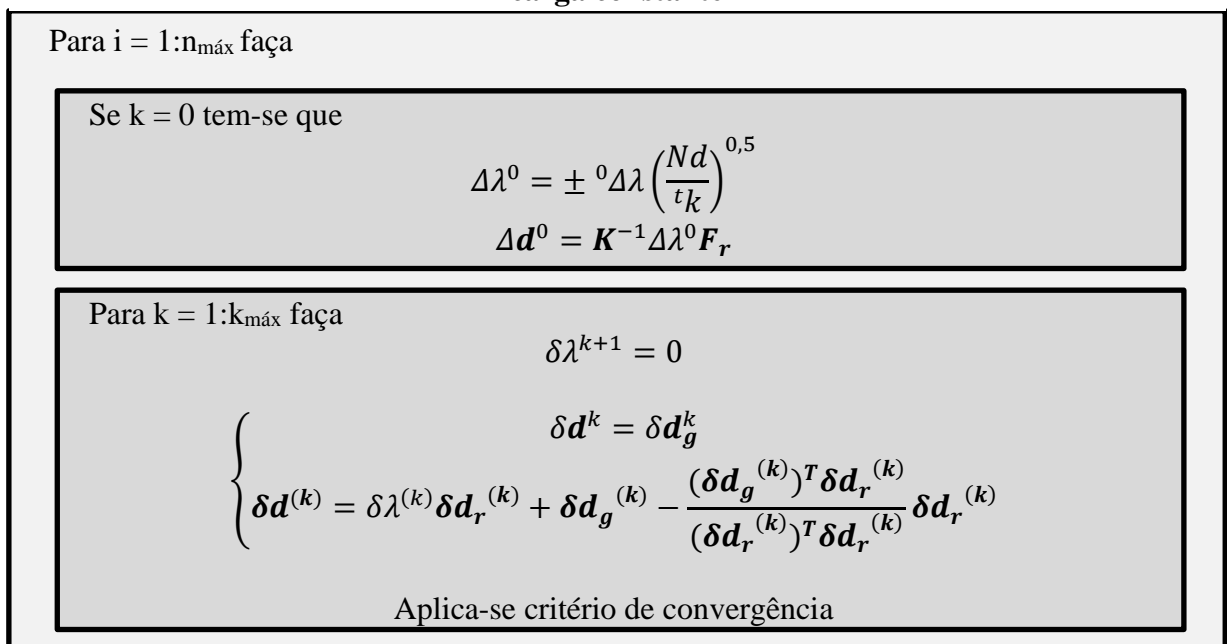
$$\lambda^k = {}^t\lambda \quad (8.2)$$

E também se tem que:

$$\delta\mathbf{d}^k = \delta\mathbf{d}_g^k \quad (8.3)$$

Para melhor entendimento, segue na Figura 8.1, a rotina de cálculo simplificado acoplado à técnica de iteração baseada na carga constante.

**Figura 8.1 – Rotina de cálculo simplificado acoplado à técnica de iteração baseada na carga constante**



FONTE: Autor (2022)

## 8.2 TÉCNICA DE CONTROLE DE DESLOCAMENTO CONSTANTE

Conforme os pesquisadores Batoz e Dhatt (1979), para o método de Newton-Raphson pudesse ser utilizado em problemas não lineares que exigissem rastrear pontos críticos como *snap-through* e mais de uma solução possível, era necessário realizar adaptações com a finalidade de transformar o método em um ciclo iterativo.

Ainda conseguinte a Batoz e Dhatt (1979), propõe-se que um componente do incremento do vetor de deslocamento nodais seja eleita como uma variável de controle ao invés de utilizar o parâmetro de carga corrente. Desta forma, a Equação 8.4 denota a expressão de controle de deslocamento constante:

$$\Delta \mathbf{d}_j^{k+1} = \Delta \mathbf{d}_j^k + \delta \mathbf{d}_j^{k+1} \quad (8.4)$$

Substituindo na Equação 8.5, obtém-se que:

$$\Delta \mathbf{d}_j^{k+1} = \Delta \mathbf{d}_j^k + \delta \mathbf{d}_{gj}^{k+1} + \delta \lambda \cdot \delta \mathbf{d}_{rj}^{k+1} \quad (8.5)$$

Assim, tem-se que:

$$\delta \lambda^{k+1} = \frac{\Delta \mathbf{d}_j - \Delta \mathbf{d}_j^k + \delta \mathbf{d}_j^{k+1}}{\delta \mathbf{d}_{rj}^{k+1}} \quad (8.6)$$

Em contrapartida, Power e Simons (1981) propõe a estratégia incremental-iterativa considerando que é adicionado uma quantidade determinada ao componente “j” do vetor dos deslocamentos e que se mantém constante nos ciclos iterativos seguintes, assim, a Equação 8.7 deve ser imposta para a viabilidade do procedimento incremental-iterativo.

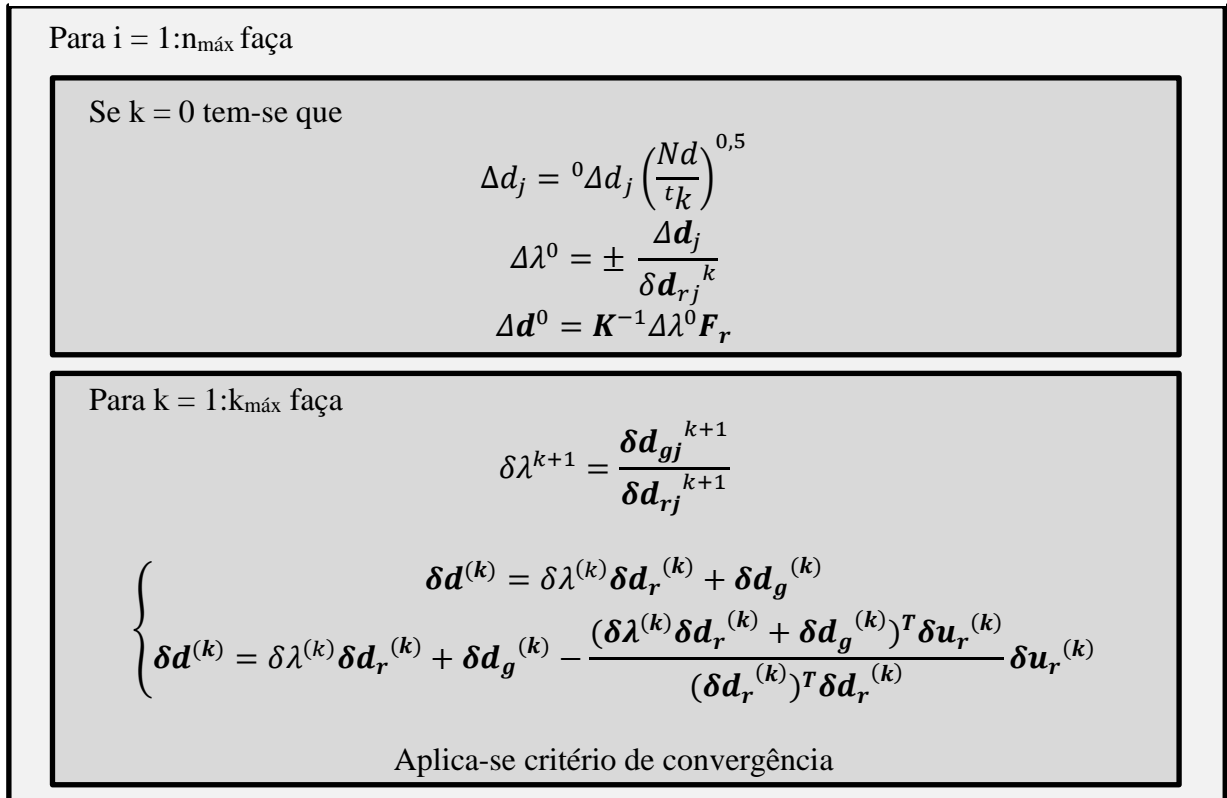
$$\delta \mathbf{d}_j^{k+1} = \delta \mathbf{d}_{gj}^{k+1} + \delta \lambda \cdot \delta \mathbf{d}_{rj}^{k+1} \quad (8.7)$$

E, portanto, vem que:

$$\delta \lambda^{k+1} = -\frac{\delta \mathbf{d}_{gj}^{k+1}}{\delta \mathbf{d}_{rj}^{k+1}} \quad (8.8)$$

Na Figura 8.2, tem-se o fluxograma apresentando a rotina de cálculo resumida para a técnica de controle de deslocamento constante.



**Figura 8.2 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no deslocamento constante**

FONTE: Autor (2022)

### 8.3 TÉCNICA DE CONTROLE DE TRABALHO EXTERNO CONSTANTE

Consoante ao que foi proposto por Powell e Simons (1981), em que para cada sub-incremento de parâmetro de carga a ser acrescido resulta no aumento do trabalho externo, quantificado como sub-incremento de trabalho externo, como é mostrado na Equação 8.9.

$$\delta W = \delta \lambda^{k+1} F_r^T \delta d^{k+1} \quad (8.9)$$

Assim, toma-se como condição restritiva que o sub-incremento do trabalho externo realizado será nulo, tornando-se como controle baseado no trabalho externo constante.

$$\delta W = 0 \quad (8.10)$$

E assim, substituindo a Equação 8.10 na Equação 8.9, extrai-se que:

$$\delta \lambda^{k+1} F_r^T (\delta \lambda^{(k+1)} \delta d_r^{(k+1)} + \delta d_g^{(k+1)}) = 0 \quad (8.11)$$

$$\delta \lambda^{k+1} (F_r^T \delta \lambda^{(k+1)} \delta d_r^{(k+1)} + F_r^T \delta d_g^{(k+1)}) = 0 \quad (8.12)$$

$$\mathbf{F}_r^T \delta\lambda^{(k+1)} \delta\mathbf{d}_r^{(k+1)} + \mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{d}_g^{(k+1)} = 0 \quad (8.13)$$

$$\delta\lambda^{(k+1)} = - \frac{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{d}_g^{(k+1)}}{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{d}_r^{(k+1)}} \quad (8.14)$$

Na Figura 8.3, apresenta-se a rotina de cálculo resumida para a técnica de controle do trabalho externo constante.

**Figura 8.3 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no trabalho externo constante**

Para  $i = 1:n_{\text{máx}}$  faça

Se  $k = 0$  tem-se que

$$\Delta W = {}^0\Delta W \left( \frac{Nd}{t_k} \right)^{0,5}$$

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta W}{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{d}_r^k}$$

$$\Delta\mathbf{d}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r$$

Para  $k = 1:k_{\text{máx}}$  faça

$$\delta\lambda^{k+1} = \frac{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{d}_g^{k+1}}{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{d}_r^{k+1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\mathbf{d}^{(k)} = \delta\lambda^{(k)} \delta\mathbf{d}_r^{(k)} + \delta\mathbf{d}_g^{(k)} \\ \delta\mathbf{d}^{(k)} = \delta\lambda^{(k)} \delta\mathbf{d}_r^{(k)} + \delta\mathbf{d}_g^{(k)} - \frac{(\delta\lambda^{(k)} \delta\mathbf{d}_r^{(k)} + \delta\mathbf{d}_g^{(k)})^T \delta\mathbf{d}_r^{(k)}}{(\delta\mathbf{d}_r^{(k)})^T \delta\mathbf{d}_r^{(k)}} \delta\mathbf{d}_r^{(k)} \end{array} \right.$$

Aplica-se critério de convergência

FONTE: Autor (2022)

#### 8.4 TÉCNICA DE CONTROLE DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEAR CONSTANTE

De encontro ao que foi publicado por Riks (1972) e Wempner (1971), impõe-se que a equação de restrição aplicada à Equação 7.14 seja da seguinte forma mostra na Equação 8.15:

$$c(\mathbf{d}, \lambda) = \delta\mathbf{d}^{k+1T} \Delta\mathbf{d}^0 + \delta\lambda^{k+1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (8.15)$$

Substituindo a Equação 5.15 na equação acima, tem-se que:

$$[(\delta\lambda^{k+1} \delta\mathbf{d}_r^{k+1} + \delta\mathbf{d}_g^{k+1})^T \Delta\mathbf{d}^0 = 0 \quad (8.16)$$

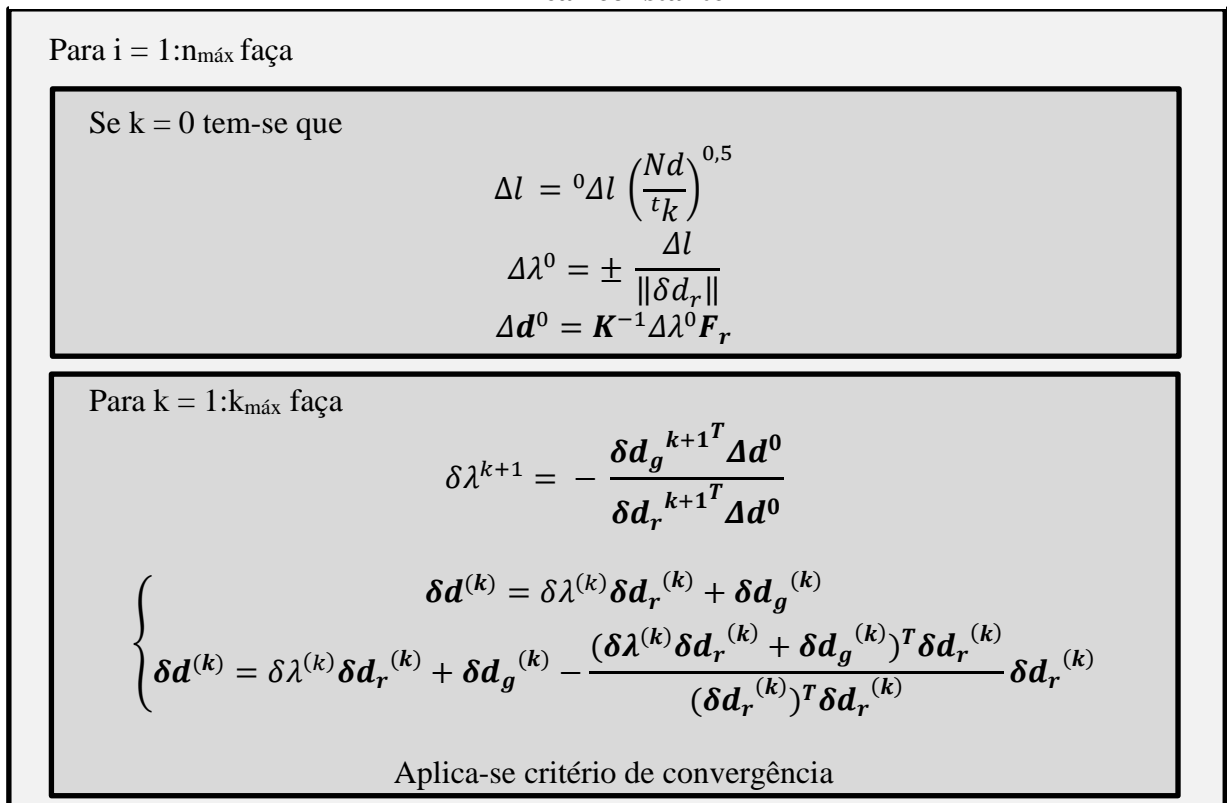
$$\delta \mathbf{d}_g^{k+1 T} \Delta \mathbf{d}^0 + \delta \lambda^{k+1} \delta \mathbf{d}_r^{k+1 T} \Delta \mathbf{d}^0 = 0 \quad (8.17)$$

$$\delta \lambda^{k+1} (\delta \mathbf{d}_r^{k+1 T} \Delta \mathbf{d}^0) = -\delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d}^0 \quad (8.18)$$

$$\delta \lambda^{k+1} = -\frac{\delta \mathbf{d}_g^{k+1 T} \Delta \mathbf{d}^0}{\delta \mathbf{d}_r^{k+1 T} \Delta \mathbf{d}^0} \quad (8.19)$$

Assim, constata-se que os valores obtidos durante o ciclo iterativo são ortogonais ao incremento preditivo. Na Figura 8.4, apresenta-se a rotina de cálculo resumida.

**Figura 8.4 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no comprimento de arco linear constante**



FONTE: Autor (2022)

## 8.5 TÉCNICA DE CONTROLE DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEAR ATUALIZADO

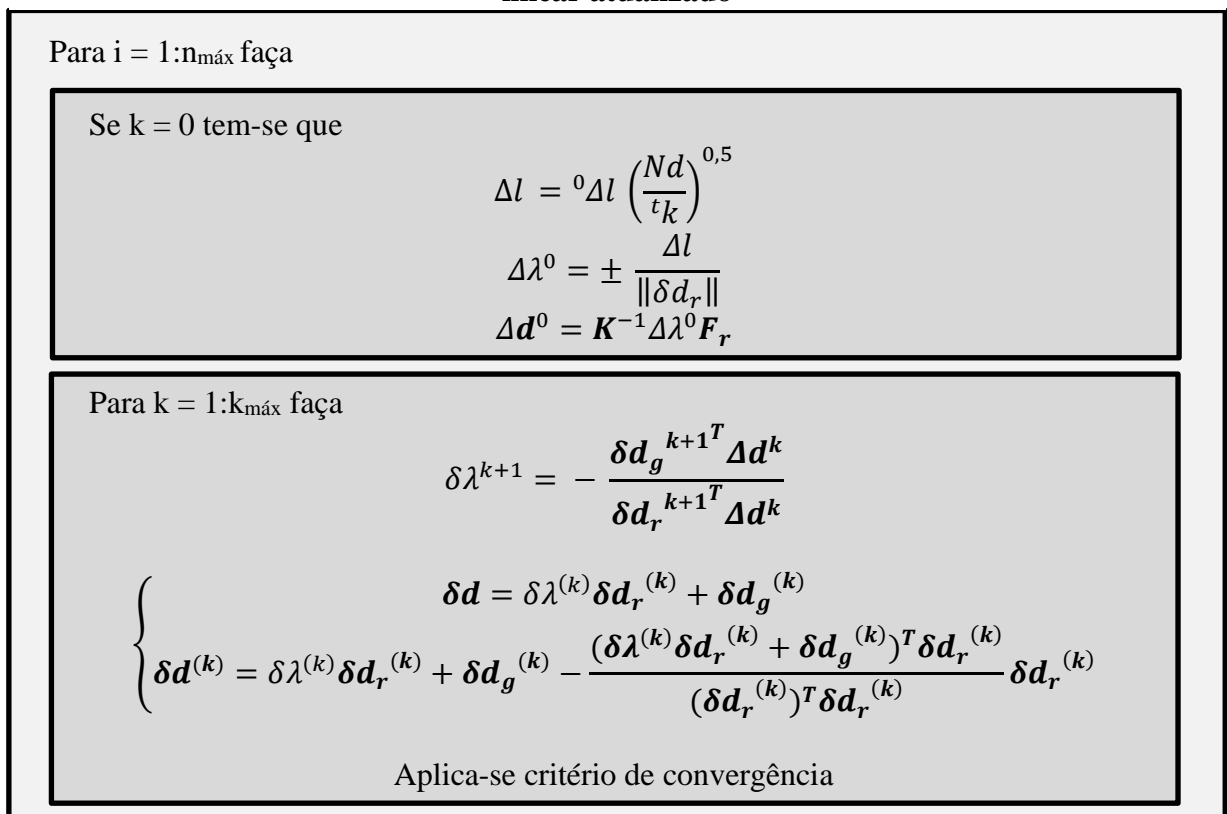
Opcionalmente à técnica apresentada anteriormente, Ramm (1981) sugere atualizar o incremento dos deslocamentos nodais a cada determinação do sub-incremento do parâmetro de carga, assim, ao contrário do controle de comprimento de arco linear fixo, as soluções obtidas deixam de ser ortogonais ao incremento preditivo e passam ser perpendiculares às soluções do

passo anterior. Analogamente ao desenvolvimento realizado entre as Equações 8.16 a 8.19, determina-se que o sub-incremento do parâmetro de carga passa a ser calculado pela 8.20:

$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{\delta\mathbf{d}_g^{k+1T} \Delta\mathbf{d}^k}{\delta\mathbf{d}_r^{k+1T} \Delta\mathbf{d}^k} \quad (8.20)$$

Em contrapartida, a determinação do incremento preditor não se altera, como é mostrado no fluxograma da Figura 8.5.

**Figura 8.5 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no comprimento de arco linear atualizado**



FONTE: Autor (2022)

## 8.6 TÉCNICA DE CONTROLE NORMA MÍNIMA DOS DESLOCAMENTOS RESIDUAIS

Alternativamente aos métodos apresentados anteriormente, Chan (1988) salienta que, embora esses métodos consigam traçar o caminho de equilíbrio posterior aos pontos limites, muitas vezes obtém soluções da maneira menos eficiente, por meio de correções do parâmetro de carga através de restrições geométricas ou de restrições de energia, a depender da técnica a ser utilizada.

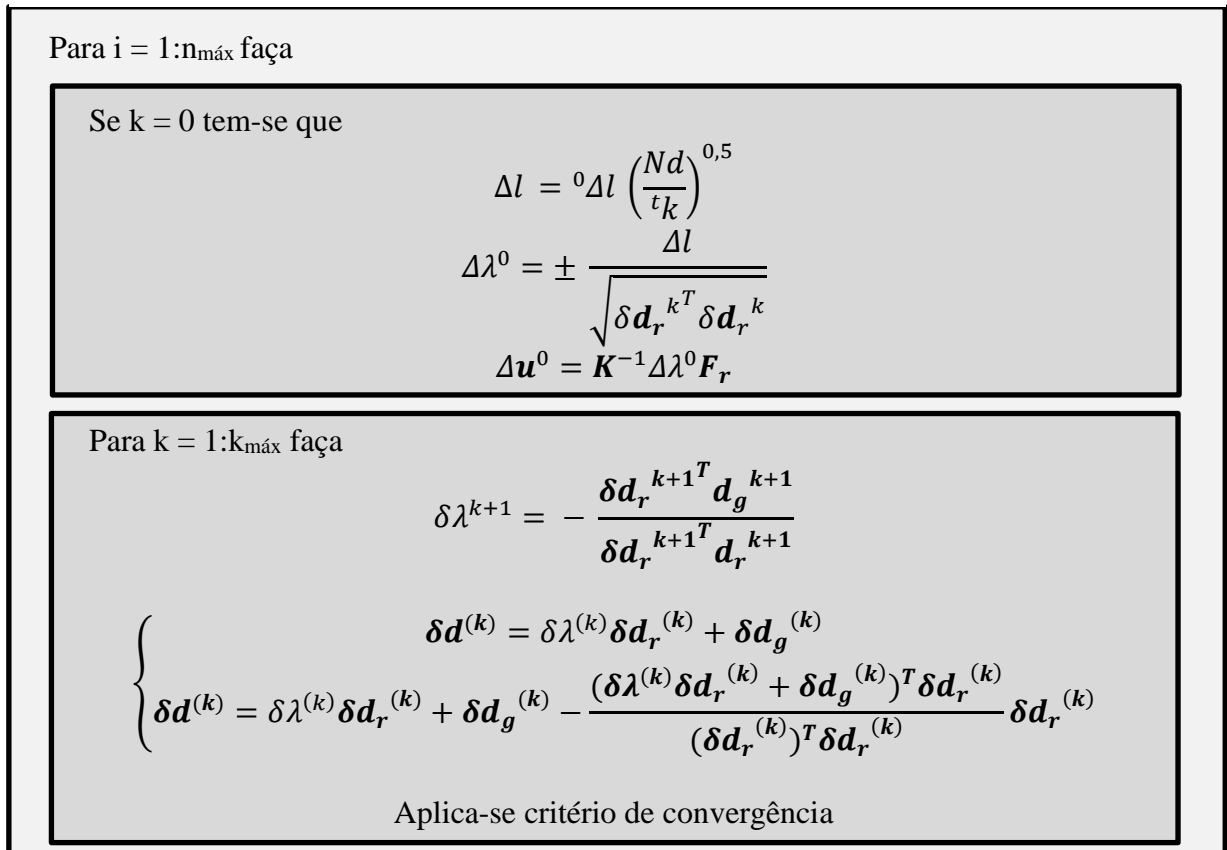
Assim, a técnica de controle de norma mínimo dos deslocamentos residuais busca em zerar o deslocamento residual devido às forças desbalanceadas, tornando-se uma rotina incremental-iterativa bastante vantajosa por exigir menos custo computacional para chegar à solução. Além disso, esta técnica consegue identificar *snap-through* e resolver problemas não lineares mais complexos que a técnica de controle de arco dificilmente consegue solucionar (CHAN, 1988).

Desta forma, na Equação 8.21, é fornecido a expressão para o cálculo do sub-incremento do parâmetro de carga corrente baseado na norma mínimo dos deslocamentos residuais a cada iteração:

$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{\delta\mathbf{d}_r^{k+1T} \mathbf{d}_g^{k+1}}{\delta\mathbf{d}_r^{k+1T} \mathbf{d}_r^{k+1}} \quad (8.21)$$

Na Figura 8.6, é dado o fluxograma que contém uma síntese do processo incremental-iterativo.

**Figura 8.6 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada na norma mínima dos deslocamentos residuais**



FONTE: Autor (2022)

## 8.7 TÉCNICA DE CONTROLE DE DESLOCAMENTO GENERALIZADO (GDCM)

Conforme foi observado pelos autores Yang e Kuo (1994), a aplicação da técnica de controle de comprimento de arco pode se tornar trabalhosa, já que se trata de uma equação polinomial de grau 2, ficando a cargo da escolha de uma raiz adequada e/ou à medida que é necessário manipular com números complexos.

Diante desse fato, a técnica de controle apresentada por Yang e Kuo (1994) é uma alternativa à anterior, contornando os contratempos mencionados. O GDCM utiliza um parâmetro de rigidez geral (GSP) para a determinação do incremento predito do parâmetro de carga, como se vê na Equação 8.22 e na Equação 8.23.

$$GSP = - \frac{{}^1\delta d_r^T {}^1\delta d_r}{{}^1\delta d_r^T d_r^k} \quad (8.22)$$

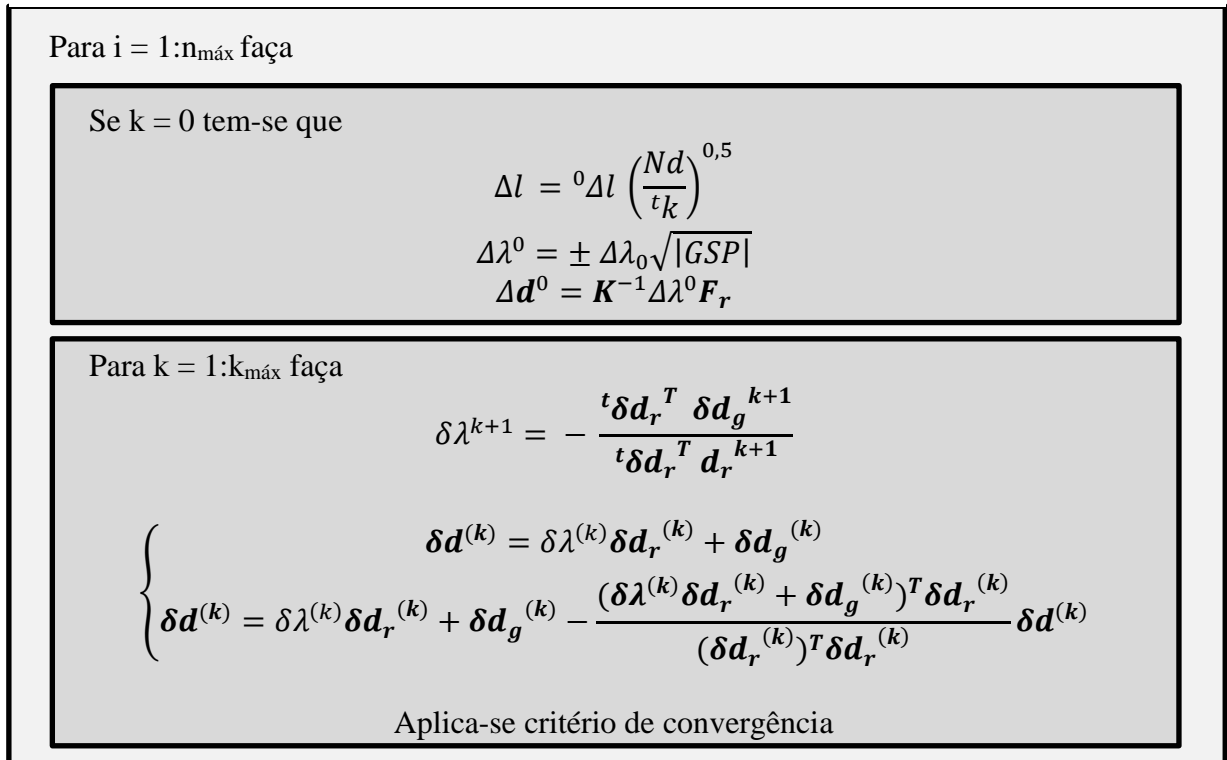
$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_0 \sqrt{|GSP|} \quad (8.23)$$

Enquanto que, para cada etapa iterativa, extrai-se o sub-incremento de parâmetro de carga conforme a Equação 8.24.

$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{{}^t\delta d_r^T {}^1\delta d_g^{k+1}}{{}^t\delta d_r^T d_r^{k+1}} \quad (8.24)$$

Na Figura 8.7, tem-se o ciclo iterativo de forma sucinta para o *Generalized Displacement Control Method* (GDCM).

**Figura 8.7 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada no controle do deslocamento generalizado**

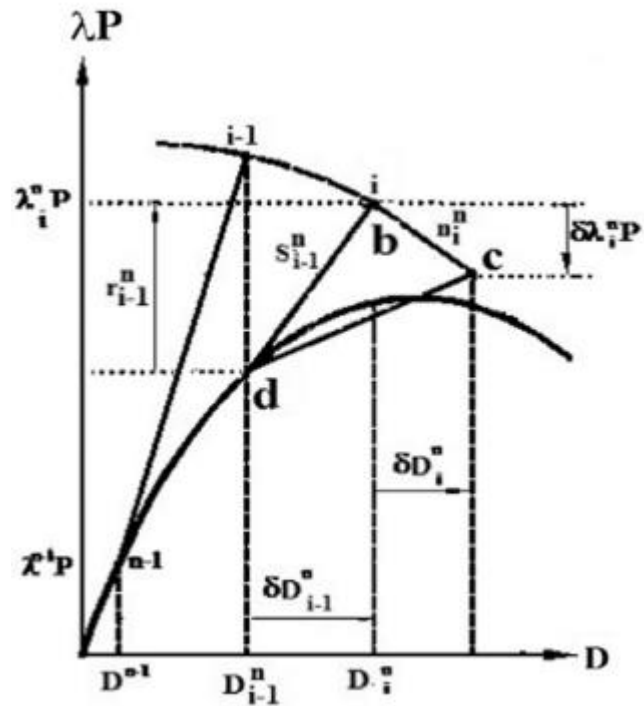


FONTE: Autor (2022)

## 8.8 TÉCNICA DE CONTROLE GEOMÉTRICO DELIMITADO POR ÁREA TRIANGULAR

De acordo com os autores Rezaiee-Pajand e Naserian (2015), estabelece-se uma restrição geométrica do gráfico que relaciona o parâmetro de carga com o deslocamento por um triângulo, no qual a técnica busca aproximar tanto quanto for possível a área do mesmo de zero. Na Figura 8.8, tem-se graficamente os pontos indicados por b, c e d, que delimitam o triângulo a ser analisado.

Figura 8.8 – Representação gráfica do triângulo que restringe a área delimitada pelos pontos b, c e d



FONTE: Rezaiee-Pajand e Naserian (2015)

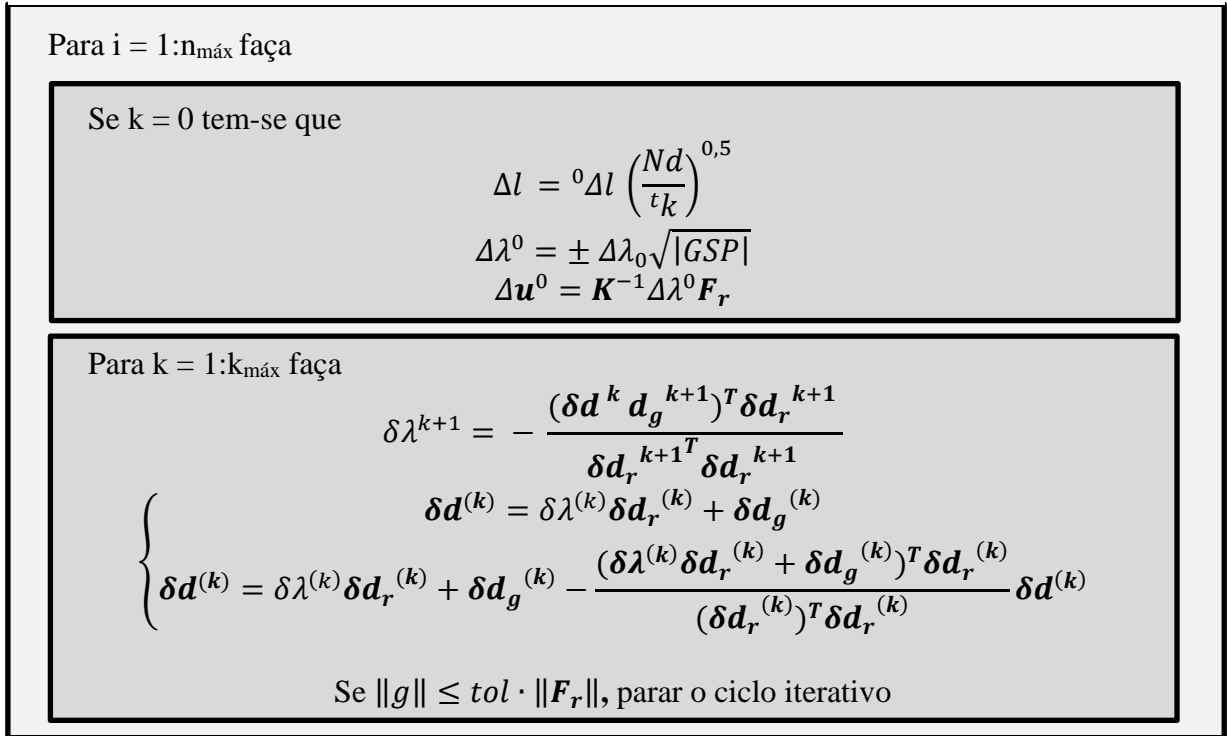
Por meio de relações geométrica, determina-se que a Equação 8.25 aplica a técnica de continuação baseado na minimização da área denotada.

$$\delta \lambda^{k+1} = - \frac{(\delta d^k d_g^{k+1})^T \delta d_r^{k+1}}{\delta d_r^{k+1 T} \delta d_r^{k+1}}$$

Na Figura 8.9, apresenta-se a rotina de cálculo empregando o uso da técnica de controle baseado na restrição geométrica do triângulo  $bcd$ .



**Figura 8.9 – Rotina de cálculo da técnica de iteração baseada na restrição geométrica da área triangular**



FONTE: Autor (2022)

## 8.9 CRITÉRIOS DE PARADA ADOTADOS

Tendo em vista que o procedimento incremental-iterativo se trata de uma metodologia de aproximação, isto é, testa-se novos resultados até que o erro residual persistente não atrapalhe na interpretação dos resultados. Entretanto, o refinamento excessivo dos resultados pode tornar cálculo ineficiente, devido ao custo computacional maior para atender aos critérios estipulados.

Assim sendo, a solução será considerada satisfatória quando atender um ou ambos critérios de convergência, os quais devem ser validados no fim de uma determinada iteração. Na Equação 8.26, tem-se a primeira inequação de convergência, que relaciona o vetor de forças desequilibradas com o vetor de forças externas.

$$tol_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{k+1}\|}{\|\mathbf{F}_r\|} \leq tol \quad (8.26)$$

em que:  $tol$  : tolerância determinada pelo operador;

$\|\mathbf{g}^{k+1}\|$ : norma euclidiana das forças desequilibradas;

$\|\mathbf{F}_r\|$ : norma euclidiana do vetor de forças externas;

Paralelamente a este critério, estabelece-se também a Equação 8.27, que relaciona o sub0incremento de deslocamento nodais com o incremento de deslocamento nodais.

$$tol_2 = \frac{\|\delta\mathbf{d}^{k+1}\|}{\|\Delta\mathbf{d}^{k+1}\|} \leq tol \quad (8.27)$$

em que:  $tol$ : tolerância determinada pelo operador;

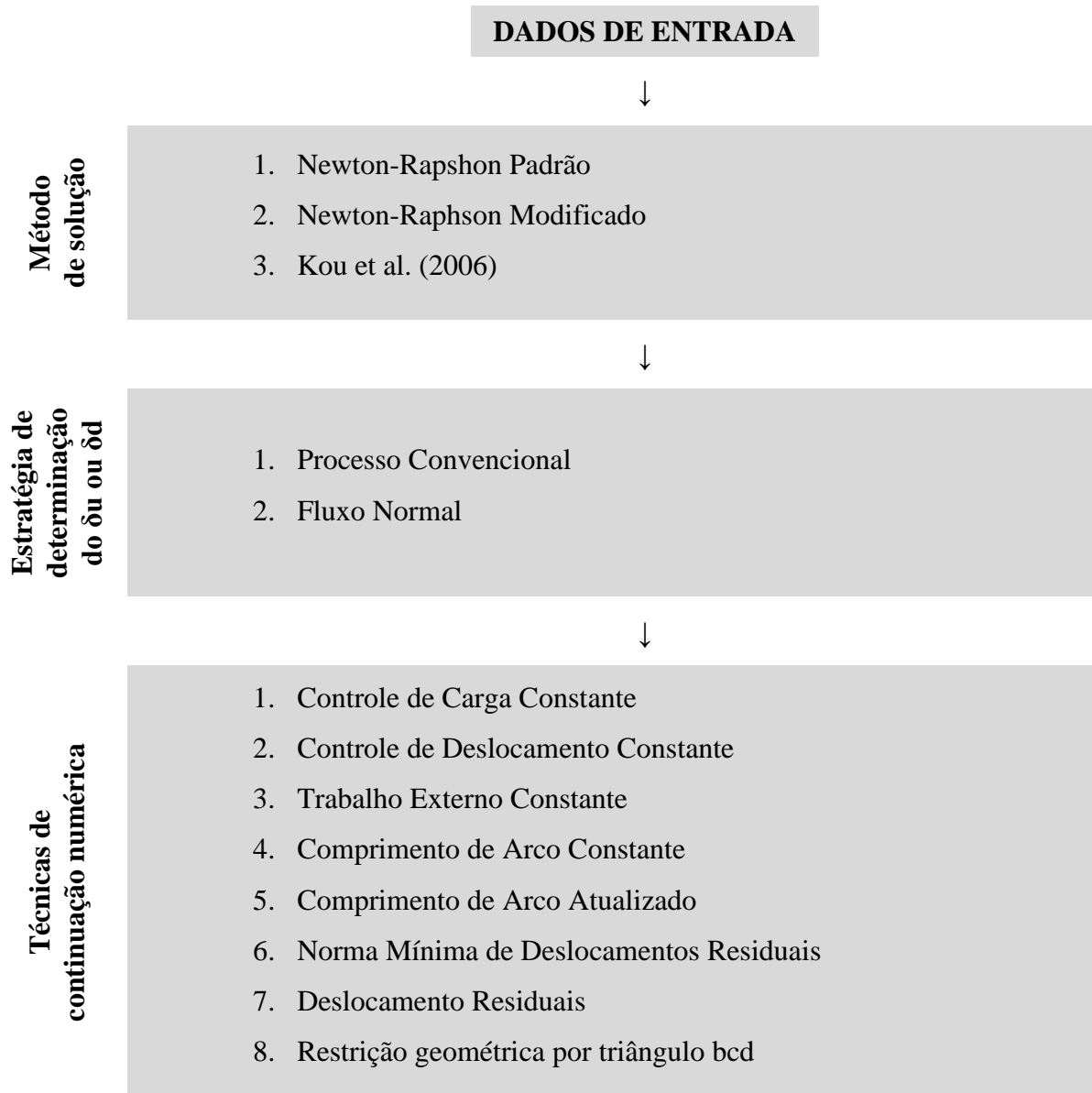
$\|\mathbf{g}^{k+1}\|$ : norma euclidiana das forças desequilibradas;

$\|\mathbf{F}_r\|$ : norma euclidiana do vetor de forças externas;

## 9 PROGRAMA COMPUTACIONAL

A análise estrutural é implementada no programa computacional, de acesso livre e gratuito, Scilab 6.1.1 (2021), em que a rotina de cálculo é elaborada para o estudo de cada problema a ser estudado. Na Figura 9.1, têm-se as metodologias numéricas que foram programadas.

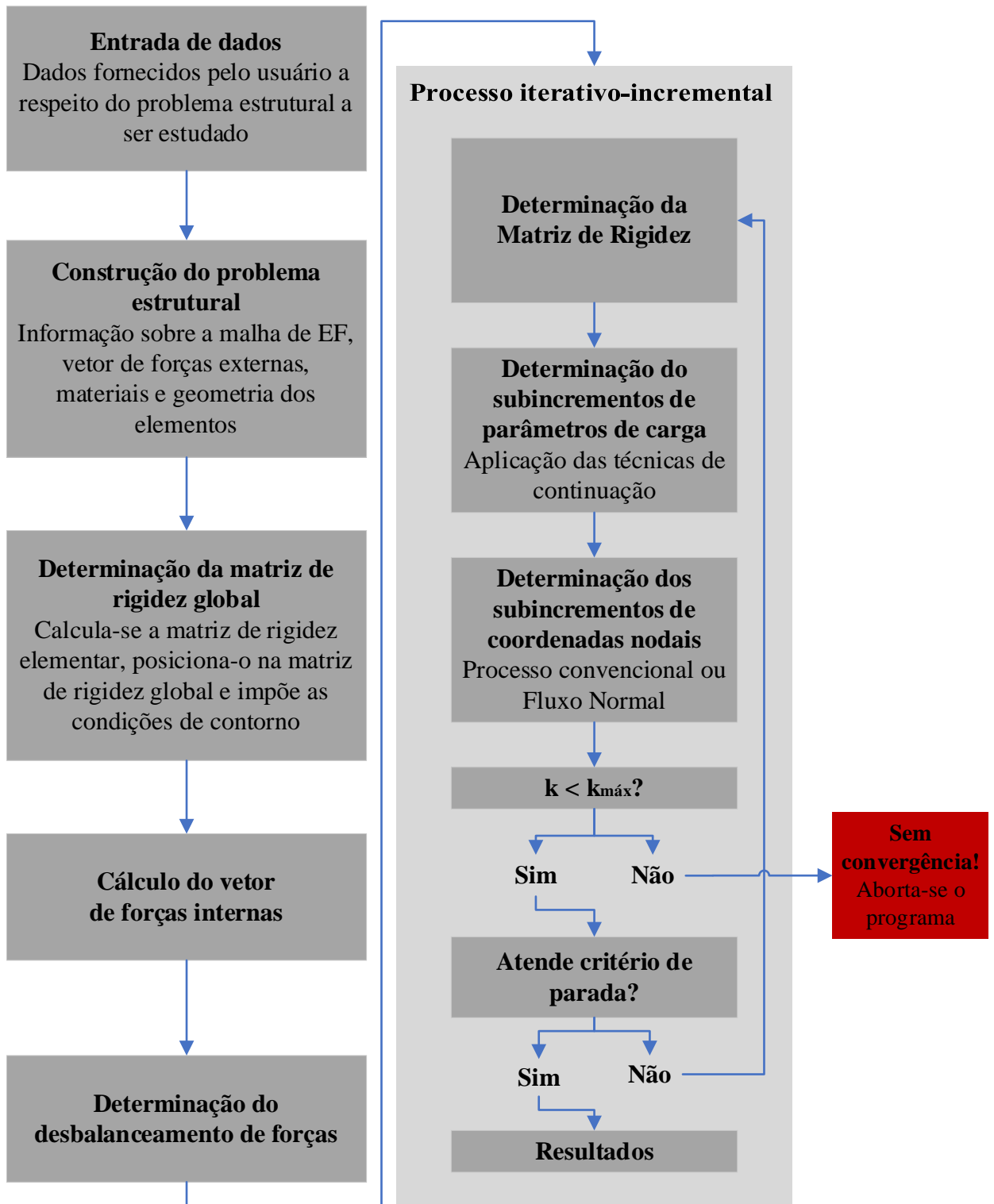
**Figura 9.1 – Metodologias numéricas disponíveis na rotina de cálculo do presente trabalho**



Fonte: Autor (2022)

Além das abordagens numéricas presentes no programa desenvolvido, na Figura 9.2, tem-se a esquematização da rotina de cálculo implementada para a obtenção da trajetória de equilíbrio.

**Figura 9.2 – Esquematização da implementação no Scilab**



Fonte: Autor (2022)

Antes de dar início ao processo de cálculo, para a obtenção da trajetória de equilíbrio, o operador deve fornecer alguns parâmetros de entrada: número de iteração máxima, número de iteração desejada por passo de carga, tolerância para o teste do critério de parada, comprimento inicial do parâmetro restritivo e o incremento de carga. Na Tabela 9.1, apresentam-se os parâmetros, os quais devem ser designados pelo calculista.

**Tabela 9.1 – Parâmetros de entrada do software**

Símbolo	Descrição
tol	tolerância
$k_{m\acute{a}x}$	número máximo de iterações
${}^0\Delta l$	magnitude do comprimento de arco inicial para a solução predita
$N_d$	número de iterações desejadas
$\Delta p$	incremento de carga

Fonte: Autor (2022)

Durante o processamento, se porventura o número de iterações supere o número máximo de iterações estipulado, notifica-se o operador de que a convergência não ocorreu. Portanto, o processamento é abortado. Por outro lado, caso não atinja o número máximo de iterações, o *software* mostra na janela de comandos os dados de saída, tais como: número de passos de carga, quantidade total de iterações, média de iterações por passo de carga e o tempo gasto para o cálculo. Além disso, plota-se os resultados gráficos (trajetórias de equilíbrio e configuração deformada da estrutura) pertinentes a cada exemplo a ser analisado. Na Tabela 9.2, têm-se os parâmetros de saída fornecidos pelo programa.

**Tabela 9.2 – Parâmetros de saída**

Símbolo	Descrição
NP	número total de passos de carga
$k_t$	número total de iterações
$k_m$	número médio de iterações
CPU	tempo de processamento em segundos

Fonte: Autor (2022)

Enfatiza-se que para a obtenção dos tempos de processamento, o programa é executado três vezes e adota-se o valor médio dos resultados, para melhor representatividade dos mesmos.

## 10 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Esta seção é subdivida em duas partes: a primeira etapa está direcionada à análise da eficiência entre as diversas técnicas de continuação implementadas, por meio de dois exemplos planos de treliça, ambas com diversos pontos críticos na trajetória; já a segunda parte consiste no estudo dos procedimentos incrementais e iterativos de solução, utilizando exemplos de treliças espaciais e planas.

### 10.1 ANÁLISE-COMPARATIVA ENTRE AS TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO

O enfoque desta seção é analisar a eficiência numérica entre as seguintes técnicas de continuação: Carga constante, Deslocamento Constante, Deslocamento Generalizado, Deslocamento Residual, Trabalho Externo, Comprimento de Arco Linear fixo, Comprimento de Arco Linear atualizado e Área Triangular bcd. Para isso, são empregadas as metodologias de solução baseadas nos procedimentos de Newton-Raphson clássico e modificado, associados ao processo convencional e ao fluxo normal.

Na Figura 10.1, apresenta-se o algoritmo desenvolvido para a obtenção da trajetória de equilíbrio com o processo incremental-iterativo descrito.

**Figura 10.1 – Algoritmo para análise comparativa das técnicas de continuação**

<p>Entrada: <math>NP_{max}</math>, <math>k_{max}</math>, <math>\Delta P</math>, <math>{}^0\Delta l</math>, <math>tol_1</math>, <math>tol_2</math>, <math>Nd</math>, <math>{}^0d</math>  Saída: <math>d</math>, <math>u</math>, <math>LS</math>, <math>\lambda</math>, <math>k_t</math>, <math>km</math>, <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>d \leftarrow {}^0d</math>, <math>\Delta d \leftarrow 0</math>, <math>\lambda \leftarrow 0</math>, <math>k_t \leftarrow 0</math>, <math>\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l</math></li> <li>2. <math>aux1 \leftarrow tol_1 \ F_r\ </math></li> <li>3. tic() (inicia-se o cronômetro)</li> <li>4. Para <math>NP \leftarrow 1, \dots, NP_{max}</math> faça</li> <li>5. Decomposição de <math>K</math> em matrizes <math>L</math> e <math>U</math> (fatoração <math>LU</math>)</li> <li>6. <math>aux2 \leftarrow [L]^{-1} F_r</math></li> <li>7. <math>\delta d_r \leftarrow [U]^{-1} aux2</math></li> <li>8. <math>\Delta \lambda^{(0)} \leftarrow \Delta l / \ \delta d_r\ </math></li> <li>9. Se <math>\Delta d^T \delta d_r &lt; 0</math> então</li> <li>10. <math>\Delta \lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta \lambda^{(0)}</math></li> <li>11. Fim-Se</li> <li>12. <math>\Delta d^{(0)} \leftarrow \Delta \lambda^{(0)} \delta d_r</math></li> <li>13. <math>\Delta d \leftarrow \Delta d^{(0)}</math></li> <li>14. <math>g \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) F_r - F_{int}(d + \Delta d)</math></li> <li>15. Para <math>k \leftarrow 1, \dots, k_{max}</math> faça</li> <li>16. Decomposição de <math>K</math> em matrizes <math>L</math> e <math>U</math> (fatoração <math>LU</math>)</li> <li>17. <math>aux2 \leftarrow [L]^{-1} F_r</math></li> <li>18. <math>\delta d_r \leftarrow [U]^{-1} aux2</math></li> <li>19. <math>aux2 \leftarrow [L]^{-1} g</math></li> <li>20. <math>\delta d_g \leftarrow [U]^{-1} aux2</math></li> <li>21. <math>\delta \lambda \leftarrow 0</math> ou,  <math>\delta \lambda \leftarrow \delta d_{gj} / \delta d_{rj}</math> ou,  <math>\delta \lambda \leftarrow F_r^T \delta d_g / F_r^T \delta d_r</math> ou,  <math>\delta \lambda \leftarrow -(\Delta d^{(0)} \delta d_g^T) / (\Delta d^{(0)} \delta d_r^T)</math> ou,</li> </ol>	$\delta \lambda \leftarrow -(\Delta d^{(k)} \delta d_g^T) / (\Delta d^{(k)} \delta d_r^T)$ ou, $\delta \lambda \leftarrow -(\delta d_r^T d_g) / (\delta d_r^T d_r)$ ou, $\delta \lambda \leftarrow -(^t \delta d_r^T \delta d_g) / (^t \delta d_r^T \delta d_r)$ ou, $\delta \lambda \leftarrow -((\delta d^{k-1} d_g^k)^T \delta d_r^k) / (\delta d_r^{kT} \delta d_r^k)$ 22. $\delta d \leftarrow \delta \lambda \delta d_r + \delta d_g$ ou $\delta d \leftarrow \delta \lambda \delta d_r + \delta d_g - \frac{(\delta d_g + \delta \lambda \delta d_r)^T \delta d_r}{\delta d_r^T \delta d_r} \delta d_r$ 23. $\Delta d \leftarrow \Delta d + \delta d$ 24. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta \lambda + \delta \lambda$ 25. $g \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) F_r - F_{int}(d + \Delta d)$ 26. Se $\ g\  < aux1$ or $\ \delta d\  < tol_2 \ \Delta d\ $ então 27. Exit the loop 28. Fim-Se 29. Fim-Para 30. Se $k = k_{max}$ então 31. messagebox('Não convergiu') 32. Sair do ciclo 33. Fim-Se 34. $d \leftarrow d + \Delta d$ 35. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta \lambda$ 36. $u \leftarrow d - {}^0d$ 37. $\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l (Nd/k)^{0.5}$ 38. $k_{total} \leftarrow k_{total} + k$ 39. Fim-Para 40. $k_m \leftarrow k_t / NP$ 41. $t \leftarrow toc()$ (lê-se o cronômetro)
--	--

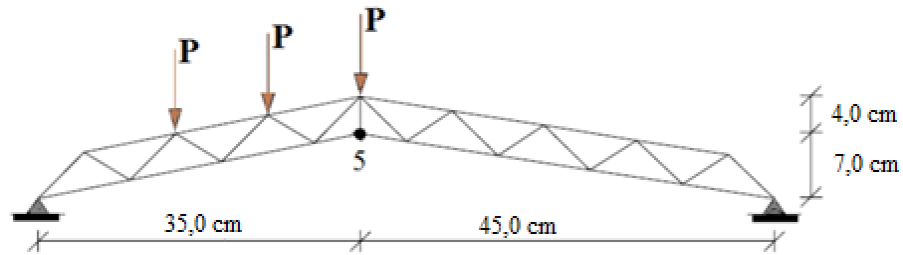
Fonte: Autor (2022)

**10.1.1 Treliça abatida assimétrica (POWELL; SIMONS, 1981)**

Anteriormente analisado por Powell e Simons (1981) e por Menin (2006), o arranjo estrutural de treliça abatida assimétrica, conforme pode-se observar na Figura 10.2, tem as características listadas abaixo:

- a) número de elementos de barra: 33;
- b) quantidade de nós: 18;
- c) rigidez axial das barras (EA):  $9,0 \times 10^6$  N;
- d) as forças  $P$  estão aplicadas nos nós como indicado na Figura 10.2; e
- e) apoios de segundo gênero nos nós indicados na Figura 10.2.

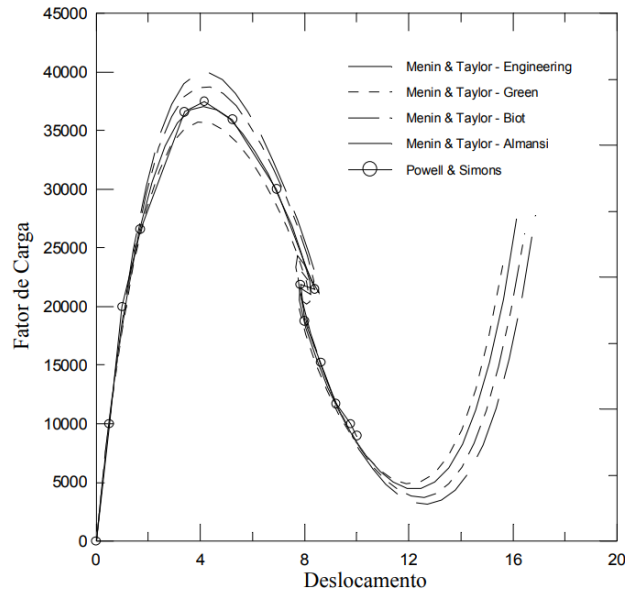
**Figura 10.2 – Treliça abatida assimétrica de Powell e Simons (1981)**



Fonte: Powell e Simons (1981)

A trajetória de equilíbrio apresentada na literatura científica, que é utilizada para confrontar com os resultados obtidos no presente trabalho, está presente na Figura 10.3, em que se denota o deslocamento do nó 5.

**Figura 10.3 – Trajetória de equilíbrio obtida por Powell e Simon (1981) e Menin (2006)**



Fonte: POWELL E SIMONS (1981) E MENIN (2006)

Em relação aos dados de entrada, na Tabela 10.1, têm-se os valores adotados. Durante o processamento, a medida de deformação utilizada foi a de Green-Lagrange.

**Tabela 10.1 – Dados de entrada**

Dado de entrada	Valor
$tol_1$	$1,0 \times 10^{-6}$
$tol_2$	$1,0 \times 10^{-6}$
$k_{m\acute{a}x}$	150
${}^0\Delta l$	0,5
$N_d$	6
$\Delta P$	$1,0 \times 10^{-6}$

Fonte: Autor (2022)



Os resultados obtidos para o exemplo de treliça abatida assimétrica estão apresentados na Tabela 10.2. Ressalta-se que as cédulas destacadas em verde se encontram em concordância numérica com os resultados obtidos por Menin (2006), enquanto que as técnicas que estão destacadas em cédulas amarelas não apresentam a trajetória de equilíbrio esperada.

**Tabela 10.2 – Resultados obtidos com Newton-Raphson Padrão do exemplo de treliça abatida assimétrica**

Newton-Raphson Padrão								
Técnica de Continuação	Processo Convencional				Técnica de Fluxo Normal			
	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>
ALF	45	133	2,96	3,15	54	154	2,85	3,26
ALA	44	129	2,93	3,00	47	152	3,23	3,60
DR	45	132	2,93	3,11	45	132	2,93	3,29
TE	34	137	4,02	3,18	47	155	3,29	3,63
DG	45	133	2,96	2,96	47	154	3,28	3,24
DC	39	119	3,05	2,63	47	155	3,29	3,34
CC	Não convergiu!				69	510	7,39	4,04
BCD	Não convergiu!				47	132	2,81	3,31

NOTAS:

1: O tempo de processamento gasto pelo CPU é expresso em segundos (s);

As técnicas de continuação utilizadas são: Arco Linear Fixo (ALF), Arco Linear Atualizado (ALA), Deslocamento Residual (DR), Trabalho Externo (TE), Deslocamento Generalizado (DG), Deslocamento Constante (DC), Carga Constante (CC) e triângulo BCD (BCD);

Cores da tabela: as cédulas em verde representam que descrevem a trajetória de equilíbrio conforme o esperado; em amarelo indicam que a trajetória de equilíbrio foi traçada desrespeitando algum(uns) ponto(s) crítico(s) – é possível verificar a trajetória gerada para os respectivos casos nas figuras abaixo –, ocorrendo salto dinâmico sob controle de carga (*snap-through*) e/ou sob controle de deslocamento (*snap-back*); já as cédulas em vermelho sinalizam que não houve convergência ou que o processamento não foi realizado.

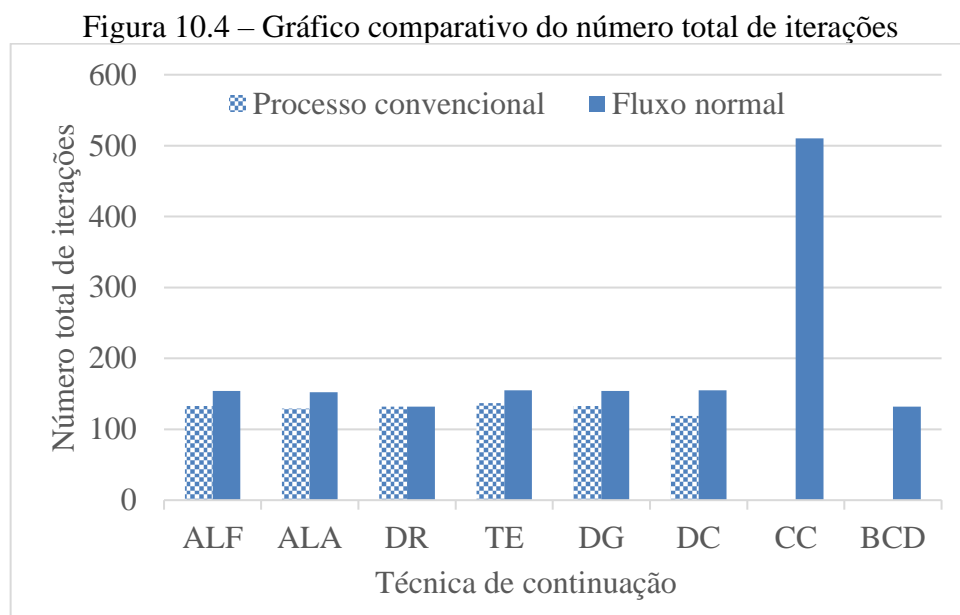
Fonte: Autor (2022)

Durante a aplicação do método do Newton-Raphson Padrão, observa-se que algumas trajetórias de equilíbrio não são obtidas adequadamente com o uso do processo convencional para a obtenção do vetor de sub-incrementos de coordenadas nodais. Por exemplo, percebe-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas pelas técnicas de continuação baseadas no trabalho externo constante e no deslocamento constante apresentam salto dinâmico, sem identificar corretamente o ponto singular presente no caminho de equilíbrio, as quais estão identificadas em cédulas amarelas na Tabela 10.2.

Além disso, ao ser selecionada a estratégia baseada na carga constante e na área triangular, a rotina de cálculo não converge, isto é, atinge-se o número máximo de 150 iterações sem atender ao critério de parada. Em contrapartida, dentre os resultados satisfatórios, a técnica de continuação baseada no deslocamento generalizado processa a rotina de cálculo em menor tempo, embora não seja a estratégia com menor número de iterações totais.

Por outro lado, quando se emprega a estratégia de fluxo normal, tem-se que a estabilidade numérica é garantida, promovendo a convergência em todos os casos. Contudo, a solução é obtida com maior número de iterações e de tempo de processamento.

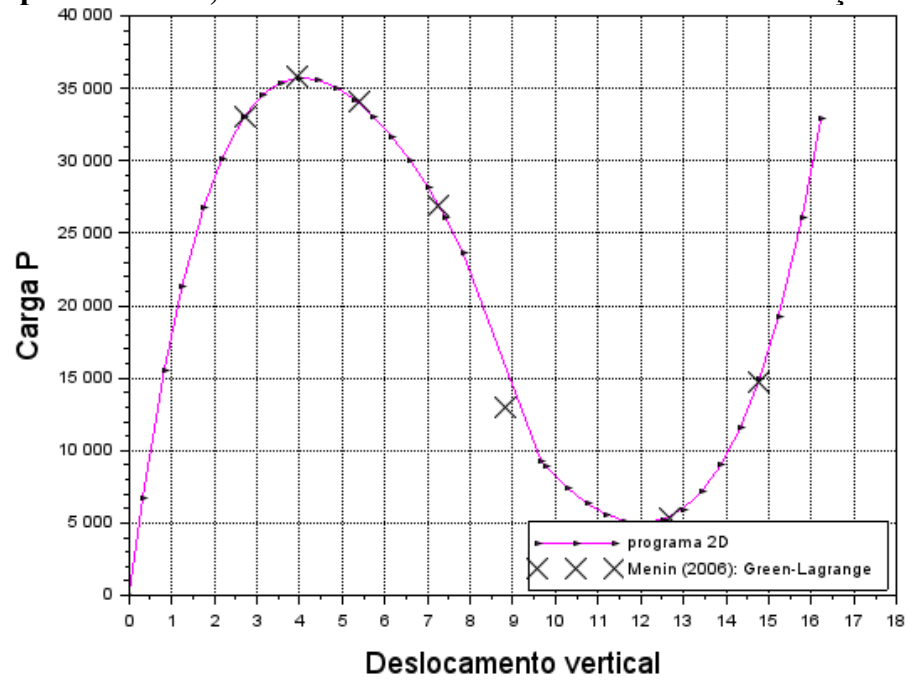
Dentre as estratégias que traçam a curva de equilíbrio corretamente, o maior aumento de tempo de processamento é na ordem de 20% na técnica baseada no comprimento de arco atualizado quando comparada com a técnica análoga associada ao processo convencional, com aumento de 17,8% no número de iterações totais. Na Figura 10.4, compara-se o número total de iterações entre o processo convencional e o fluxo normal.



Fonte: Autor (2022)

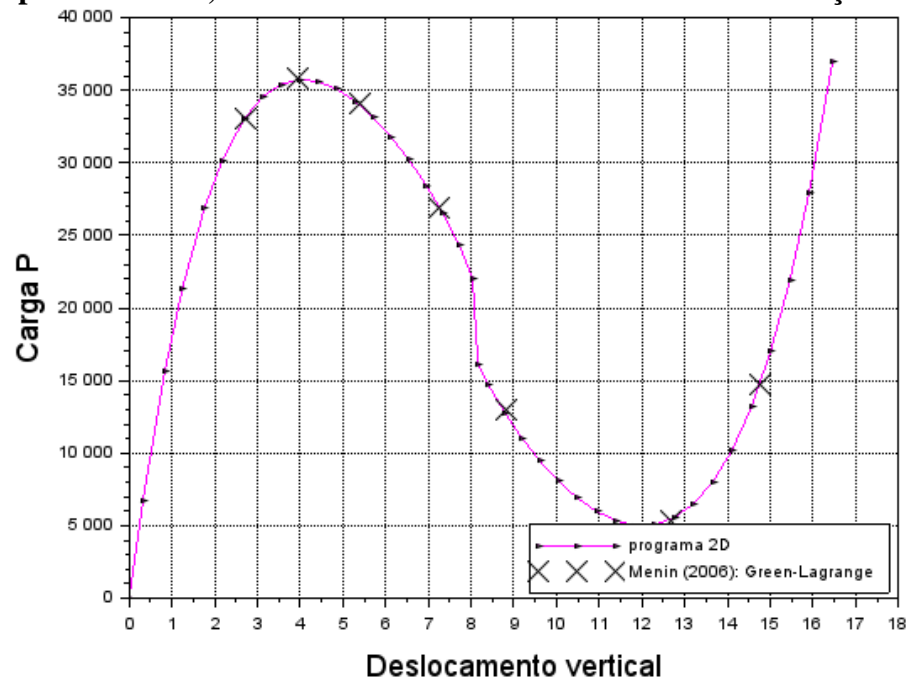
Na Figura 10.5, na Figura 10.6 e na Figura 10.7, as trajetórias de equilíbrio que apresentam salto dinâmico são mostradas, evidenciadas em cédulas amarelas na Tabela 10.2.

**Figura 10.5 – Trajetória de equilíbrio da treliça abatida assimétrica, com Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação TE**



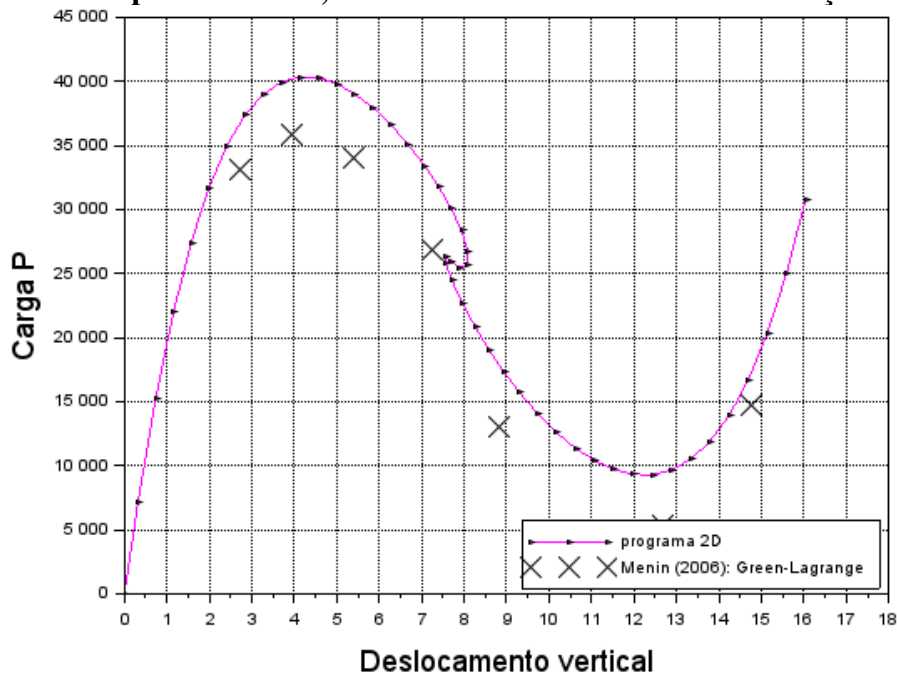
Fonte: Autor (2022)

**Figura 10.6 – Trajetória de equilíbrio da treliça abatida assimétrica, com Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação DC**



Fonte: Autor (2022)

**Figura 10.7 – Trajetória de equilíbrio da treliça abatida assimétrica, com Newton-Raphson Padrão, Fluxo Normal e técnica de continuação CC**



Fonte: Autor (2022)

Uma vez que o Newton-Raphson Padrão tenha sido aplicado, recorre-se ao Newton-Raphson Modificado, no qual a matriz de rigidez não é atualizada. Os resultados obtidos estão expressos na Tabela 10.3. Tabela 10.3 – Resultados obtidos pelo Scilab utilizando o Newton-Raphson Modificado para o exemplo de treliça abatida assimétrica

**Tabela 10.3 – Resultados obtidos pelo Scilab utilizando o Newton-Raphson Modificado para o exemplo de treliça abatida assimétrica**

Newton-Raphson Modificado								
Técnica de Continuação	Processo Convencional				Técnica de Fluxo Normal			
	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>
ALF	85	285	3,35	3,59	85	285	3,35	3,23
ALA	85	284	3,34	3,38	85	285	3,35	3,32
DR	85	285	3,35	3,59	85	285	3,35	3,51
TE	Não convergiu!				89	291	3,27	3,34
DG	85	284	3,35	3,50	85	285	3,35	3,15
DC	Não convergiu!				85	285	3,35	3,10
CC	Não convergiu!				108	582	5,39	5,50
BCD	Não convergiu!				85	285	3,35	3,09

NOTAS:

1: O tempo de processamento gasto pelo CPU é expresso em segundos (s);

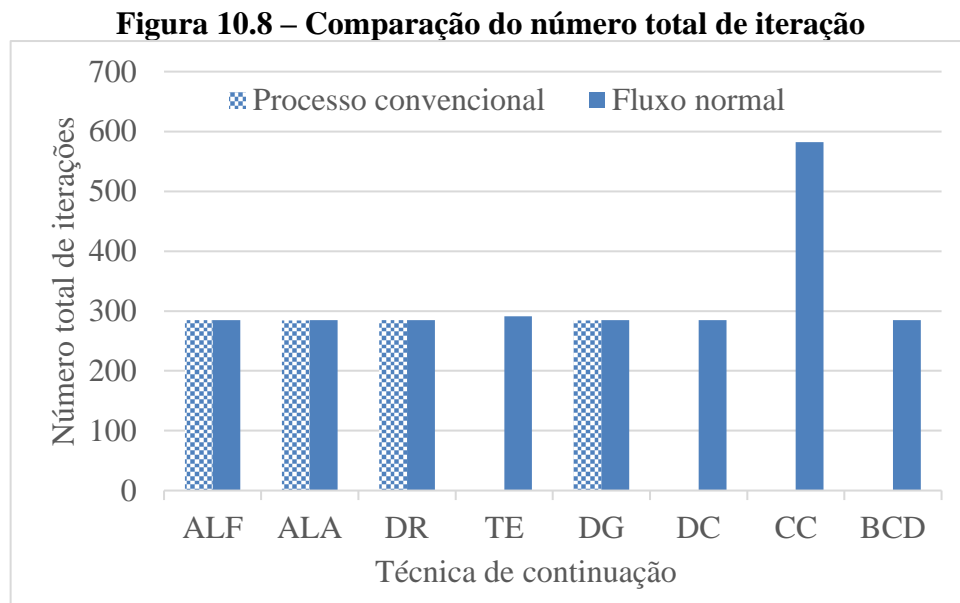
As técnicas de continuação utilizadas são: Arco Linear Fixo (ALF), Arco Linear Atualizado (ALA), Deslocamento Residual (DR), Trabalho Externo (TE), Deslocamento Generalizado (DG), Deslocamento Constante (DC) e Carga Constante (CC);

Cores da tabela: as células em verde representam que descrevem a trajetória de equilíbrio conforme o esperado; em amarelo indicam que a trajetória de equilíbrio foi traçada desrespeitando algum(uns) ponto(s) crítico(s) – é possível verificar a trajetória gerada para os respectivos casos na figura abaixo –, ocorrendo salto dinâmico sob controle de carga (*snap-through*) e/ou sob controle de deslocamento (*snap-back*); já as células em vermelho sinalizam que não houve convergência ou que o processamento não foi realizado.

Fonte: Autor (2022)

Em primeiro lugar, tem-se que o número de casos em que não houve convergência teve aumento de 100% em relação ao Newton-Raphson Padrão, o que já era esperado devido à não atualização da matriz de rigidez nos processos de cálculos. Ademais, o tempo de processamento e o número de iterações totais são maiores em todos os casos.

Na Figura 10.8, confrontam-se os valores totais de iterações para a metodologia baseada no Newton-Raphson Modificado.

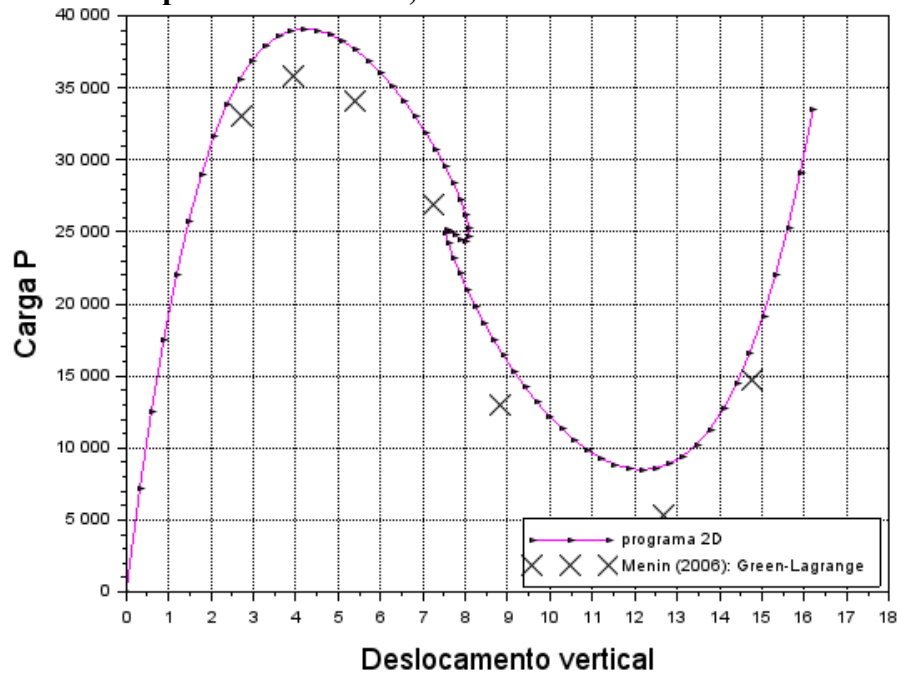


Fonte: Autor (2022)

Como observa-se no método anterior, o fluxo normal garante o traçado do caminho de equilíbrio, mesmo na técnica de continuação baseada na carga constante, em que a trajetória está transladada verticalmente em relação aos valores de Menin (2006). Como é mostrado na Figura 10.9, o perfil da curva é mantido e inclusive é reconhecido os pontos de singularidade.

Diferentemente do que se observa quando o Newton-Raphson Padrão é utilizado para buscar as soluções, com o Newton-Raphson Modificado o tempo de processamento é menor em todos os casos relacionados ao fluxo normal, levando a reduzir em até 10%, como pode ser observado pela técnica do deslocamento generalizado, embora o número de iterações seja o mesmo para ambas as metodologias de solução.

**Figura 10.9 – Trajetória de equilíbrio para a treliça abatida assimétrica, utilizando o Newton-Raphson Modificado, Fluxo Normal e técnica de continuação CC**



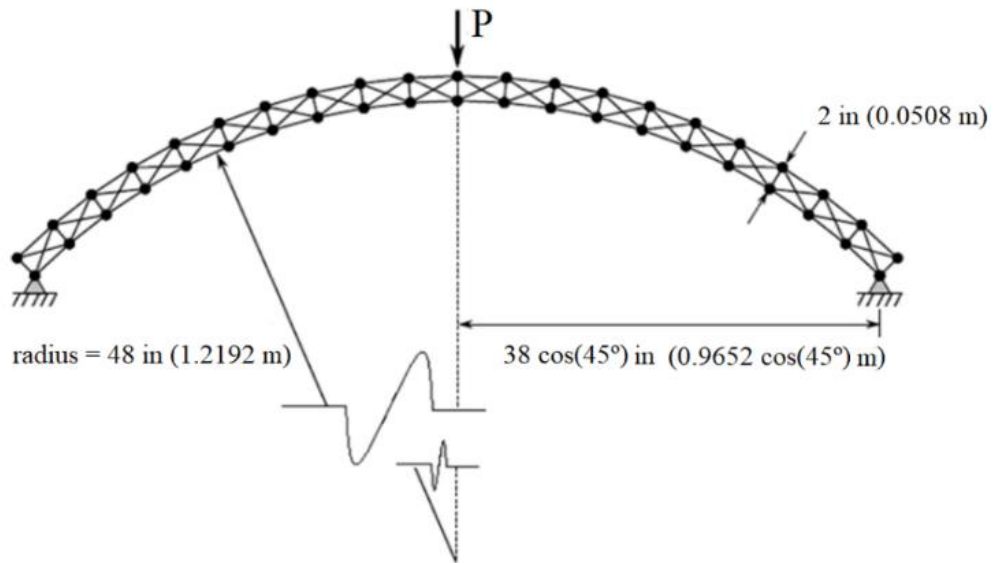
Fonte: Autor (2022)

### 10.1.2 Arco circular treliçado (CRISFIELD, 1991)

Apresentado originalmente por Crisfield (1991) e posteriormente estudado por Hrinda (2010) e por diversos outros autores, o arco circular treliçado, apresentado na Figura 10.10, possui a trajetória de equilíbrio demonstrada na Figura 10.11. Adicionalmente, as características e as condições de contorno que regem a estrutura estão listadas abaixo:

- número de elementos de barra: 101;
- quantidade de nós: 42;
- rigidez axial das barras (EA):  $1,0 \times 10^7$  lb;
- o carregamento P está aplicado no nó localizado no topo do arco circular; e
- apoios de segundo gênero nos nós indicados na Figura 10.11.

**Figura 10.10 – Arco circular treliçado proposto por Crisfield (1991)**



Fonte: CRISFIELD (1991)

A trajetória de equilíbrio (curva deslocamento vertical *versus* carga P) presente na Figura 10.11 foi obtida do trabalho da Hrinda (2005), que consta quatro pontos limites de força e três pontos limites de deslocamento, caracterizando laços (*loopings*) no traçado.

**Figura 10.11 – Trajetória de equilíbrio obtida por Hrinda (2005)**



Fonte: Adaptado de HRINDA (2005)

Antes de dar início ao processamento, insere-se os dados de entrada conforme a Tabela 10.4. No processamento, a medida de deformação utilizada é a de Green-Lagrange.

**Tabela 10.4 – Dados de entrada**

Dado de entrada	Valor
$tol_1$	$1,0 \times 10^{-6}$
$tol_2$	$1,0 \times 10^{-6}$
$k_{m\acute{a}x}$	150
${}^0\Delta I$	0,5
$N_d$	6
$\Delta P$	$1,0 \times 10^6$

Fonte: Autor (2022)

Os resultados obtidos para o exemplo arco treliçado abatido estão apresentados na Tabela 10.5. Nessa tabela, as cédulas em verde encontram-se em concordância numérica com os resultados obtidos por Hrinda (2007).

**Tabela 10.5 – Resultados obtidos pelo Scilab utilizando o Newton-Raphson Modificado para o exemplo de arco treliçado**

Newton-Raphson Padrão								
Técnica de Continuação	Processo Convencional				Técnica de Fluxo Normal			
	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>
ALF	584	1113	1,91	129,88	760	1466	1,93	155,47
ALA	661	1287	1,95	133,30	759	1452	1,91	160,96
DR	755	1418	1,88	149,18	755	1418	1,88	150,46
TE	364	767	2,10	76,54	830	1818	2,19	182,75
DG	573	1040	1,82	109,20	760	1466	1,93	158,23
DC	364	702	1,92	75,90	830	1818	2,19	195,65
CC	Não convergiu!				974	2907	2,98	264,40
BCD	364	772	3,835	79,21	830	1818	2,19	187,35

NOTAS:

1: O tempo de processamento gasto pelo CPU é expresso em segundos (s);

As técnicas de continuação utilizadas são: Arco Linear Fixo (ALF), Arco Linear Atualizado (ALA), Deslocamento Residual (DR), Trabalho Externo (TE), Deslocamento Generalizado (DG), Deslocamento Constante (DC) e Carga Constante (CC);

Cores da tabela: as cédulas em verde representam que descrevem a trajetória de equilíbrio conforme o esperado; em amarelo indicam que a trajetória de equilíbrio foi traçada desrespeitando algum(uns) ponto(s) crítico(s) – é possível verificar a trajetória gerada para os respectivos casos na figura abaixo –, ocorrendo salto dinâmico sob controle de carga (*snap-through*) e/ou sob controle de deslocamento (*snap-back*); já as cédulas em vermelho sinalizam que não houve convergência ou que o processamento não foi realizado.

Fonte: Autor (2022)

Comparativamente, este problema possui mais pontos de singularidades na trajetória de equilíbrio do que a do primeiro exemplo. Desta forma, é possível analisar acerca da robustez das metodologias numéricas empregadas.

Utilizando o Newton-Raphson Padrão acoplado ao processo convencional, tem-se que as técnicas de continuação de comprimento de arco linear fixo e atualizado, trabalho externo

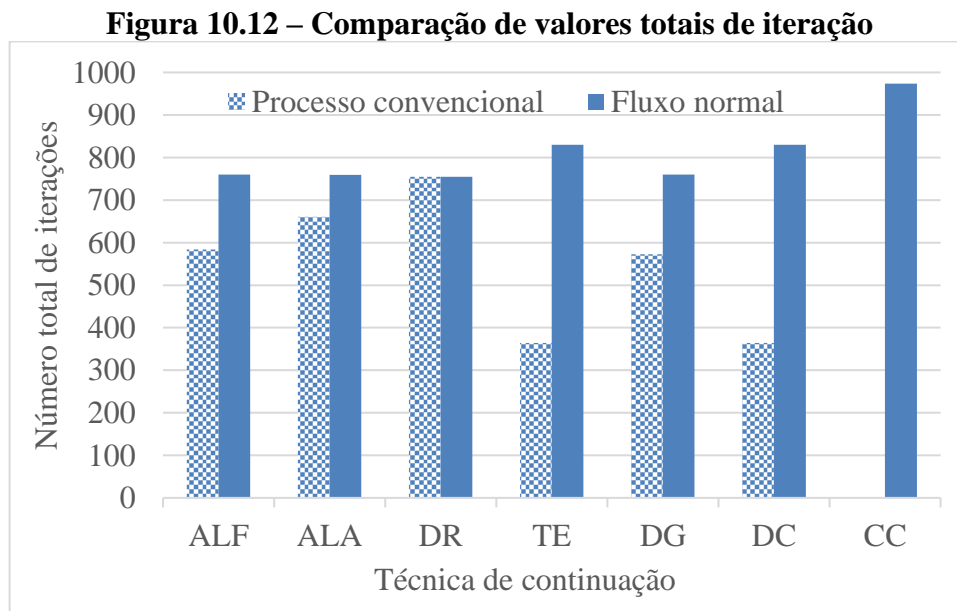


constante e deslocamento generalizado não são capazes de fornecer a curva de equilíbrio, levando a conclusões errôneas, como pode ser visto na Figura 10.13 e na Figura 10.14. Adjacente a isso, na estratégia baseada na carga constante, o *software* não apresenta convergência numérica.

Alternativamente, aplicando o Newton-Rapshon Padrão acoplado à estratégia de fluxo normal, vê-se que a trajetória de equilíbrio é obtida em todos os casos, com a ressalva de que na técnica de continuação baseada na carga constante a trajetória fica transladada verticalmente para cima, fenômeno que também ocorre no problema anterior, mantendo o perfil da curva e os pontos singulares existentes, como é possível observar na Figura 10.15.

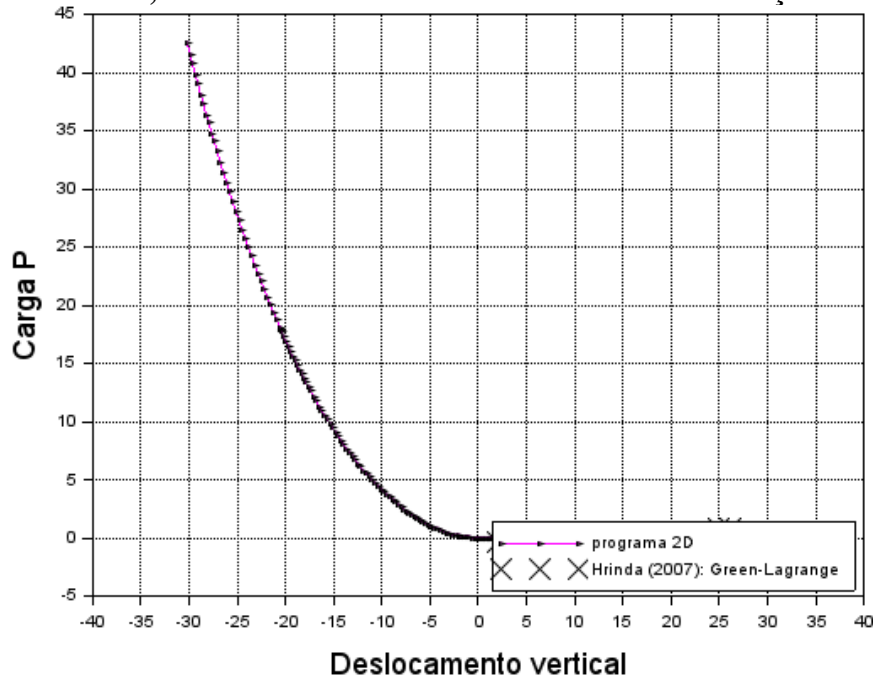
Neste problema analisado, considerando as técnicas que conseguem contornar as singularidades, tanto no processo convencional quanto no fluxo normal, as diferenças de tempo de processamento, bem como de número de iterações totais mais expressivas, são obtidas da estratégia baseada no deslocamento constante, sendo de 260% e 258%, respectivamente.

Destaca-se que, para a estratégia baseada no deslocamento residual, o número de iterações totais realizadas é o mesmo e os tempos de processamento são praticamente idênticos. Graficamente, é possível observar a Figura 10.12 que compara os valores totais de iteração.



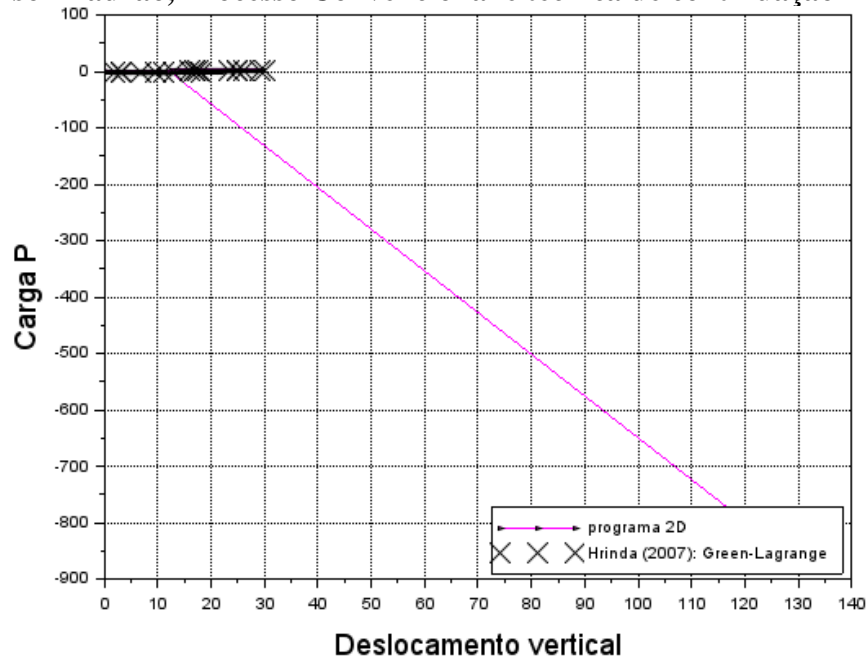
Fonte: Autor (2022)

**Figura 10.13 – Trajetória de equilíbrio para arco treliçado, utilizando o Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação ALF, TE e DG**



Fonte: Autor (2022)

**Figura 10.14 – Trajetória de equilíbrio para arco treliçado, utilizando o Newton-Raphson Padrão, Processo Convencional e técnica de continuação ALA**



Fonte: Autor (2022)



**Figura 10.16 – Algoritmo para processo incremental-iterativo**

<p>Entrada: <math>NP_{max}</math>, <math>k_{max}</math>, <math>\Delta P</math>, <math>{}^0\Delta l</math>, <math>tol_1</math>, <math>tol_2</math>, <math>Nd</math>, <math>{}^0\mathbf{d}</math>  Saída: <math>\mathbf{d}</math>, <math>\mathbf{u}</math>, <math>LS</math>, <math>\lambda</math>, <math>k_t</math>, <math>k_m</math>, <math>t</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\mathbf{d} \leftarrow {}^0\mathbf{d}</math>, <math>\Delta\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}</math>, <math>\lambda \leftarrow 0</math>, <math>k_t \leftarrow 0</math>, <math>\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l</math></li> <li>2. <math>aux1 \leftarrow tol_1 \ \mathbf{F}_r\ </math></li> <li>3. tic() (inicia-se o cronômetro)</li> <li>4. Para <math>LS \leftarrow 1, \dots, NP_{max}</math> faça</li> <li>5. Decomposição de <math>\mathbf{K}</math> em matrizes <math>\mathbf{L}</math> e <math>\mathbf{U}</math> (fatoração LU)</li> <li>6. <math>\mathbf{aux2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{F}_r</math></li> <li>7. <math>\delta\mathbf{d}_r \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{aux2}</math></li> <li>8. <math>\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow \Delta l / \ \delta\mathbf{d}_r\ </math></li> <li>9. Se <math>\Delta\mathbf{d}^T \delta\mathbf{d}_r &lt; 0</math> então</li> <li>10. <math>\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta\lambda^{(0)}</math></li> <li>11. Fim-Se</li> <li>12. <math>\Delta\mathbf{d}^{(0)} \leftarrow \Delta\lambda^{(0)} \delta\mathbf{d}_r</math></li> <li>13. <math>\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d}^{(0)}</math></li> <li>14. <math>\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})</math></li> <li>15. Para <math>k \leftarrow 1, \dots, k_{max}</math> faça</li> <li>16. Decomposição de <math>\mathbf{K}</math> em matrizes <math>\mathbf{L}</math> e <math>\mathbf{U}</math> (fatoração LU)</li> <li>17. <math>\mathbf{aux2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{F}_r</math></li> <li>18. <math>\delta\mathbf{d}_r \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{aux2}</math></li> <li>19. <math>\mathbf{aux2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{g}</math></li> <li>20. <math>\delta\mathbf{d}_g \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{aux2}</math></li> <li>21. Se NR ou NRM então <math display="block">\delta\lambda_1 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)</math> <math display="block">\delta\mathbf{d} \leftarrow \delta\lambda \delta\mathbf{d}_r + \delta\mathbf{d}_g - \frac{(\delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda \delta\mathbf{d}_r)^T \delta\mathbf{d}_r}{\delta\mathbf{d}_r^T \delta\mathbf{d}_r} \delta\mathbf{d}_r</math> <math display="block">\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}</math> <math display="block">\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda</math> Senão <math display="block">\delta\lambda_1 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)</math> <math display="block">\delta\mathbf{d}_1 \leftarrow \delta\lambda_1 \delta\mathbf{d}_r + \delta\mathbf{d}_g - \frac{(\delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda_1 \delta\mathbf{d}_r)^T \delta\mathbf{d}_r}{\delta\mathbf{d}_r^T \delta\mathbf{d}_r} \delta\mathbf{d}_r</math> </li> </ol>	$\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda + \delta\lambda_1) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d} - \delta\mathbf{d}_1)$ $\mathbf{aux2} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{g}$ $\delta\mathbf{d}_{gy} \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{aux2}$ $\delta\lambda_2 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$ $\delta\mathbf{d}_2 \leftarrow \delta\lambda_2 \delta\mathbf{d}_r + \delta\mathbf{d}_{gy} - \frac{(\delta\mathbf{d}_{gy} + \delta\lambda_2 \delta\mathbf{d}_r)^T \delta\mathbf{d}_r}{\delta\mathbf{d}_r^T \delta\mathbf{d}_r} \delta\mathbf{d}_r$ $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} - \delta\mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{d}_2$ $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_2$ <ol style="list-style-type: none"> <li>22. Fim-Se</li> <li>23. <math>\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})</math></li> <li>24. Se <math>\ \mathbf{g}\  &lt; aux1</math> or <math>\ \delta\mathbf{d}_2\  &lt; tol_2 \ \Delta\mathbf{d}\ </math> então</li> <li>25. Exit the loop</li> <li>26. Fim-Se</li> <li>27. Fim-Para</li> <li>28. Se <math>k = k_{max}</math> então</li> <li>29. messagebox('Não convergiu')</li> <li>30. Sai do ciclo</li> <li>31. Fim-Se</li> <li>32. <math>\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}</math></li> <li>33. <math>\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda</math></li> <li>34. <math>\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{d} - {}^0\mathbf{d}</math></li> <li>35. <math>\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l (Nd/k)^{0.5}</math></li> <li>36. <math>k_t \leftarrow k_t + k</math></li> <li>37. Fim-Se</li> <li>38. <math>k_m \leftarrow k_t / NP</math></li> <li>39. <math>t \leftarrow toc()</math> (lê)</li> </ol>
---	--

Fonte: Autor (2022)

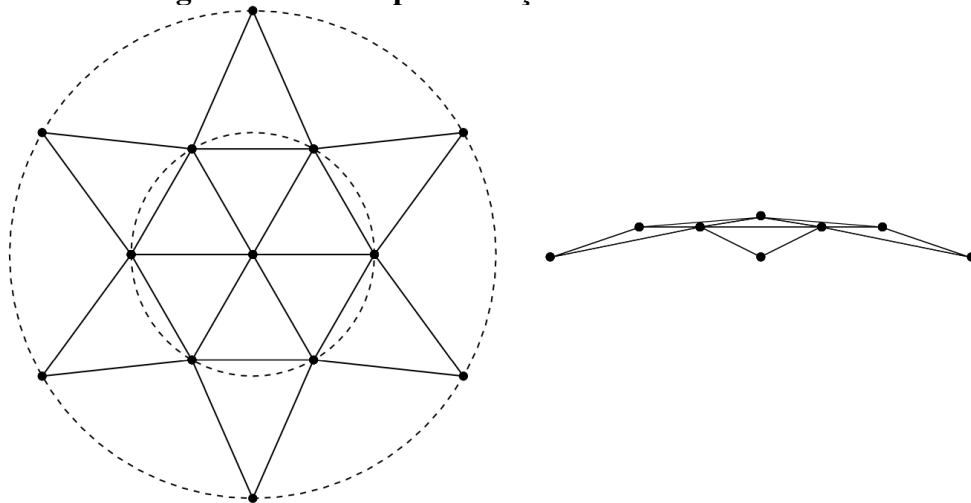
### 10.2.1 Cúpula treliçada de 24 elementos

Como é mostrada na Figura 10.17, a cúpula treliçada de 24 elementos foi anteriormente estudada por Bonet, Gil e Wood (2012) e por Yaw (2011), que contém as seguintes características:

- a) número de elementos de barra: 24;
- b) quantidade de nós: 13 (em que 6 nós estão equidistantes sobre um círculo externo de raio de 50 metros, na referência de nível nulo; os outros 6 nós estão igualmente distribuídos sobre um círculo interno de raio de 25 metros, com o nível locado a 6,216 metros; e o vértice, no qual a força está aplicada, encontra-se a 8,816 metros);

- c) módulo de elasticidade: 1,0 kN/cm<sup>2</sup>;
- d) área da seção transversal das barras: 1,00 cm<sup>2</sup>;
- e) a força P está aplicada no vértice como indicado na Figura 10.17;
- f) coeficiente de Poisson: 0,5.

**Figura 10.17 – Cúpula treliçada de 24 Elementos**



Fonte: Bonet, Gil e Wood (2012)

A análise estrutural deste exemplo numérico é feita utilizando a medida de deformação de Engenharia, em que os dados de entrada estão denotados na Tabela 10.6.

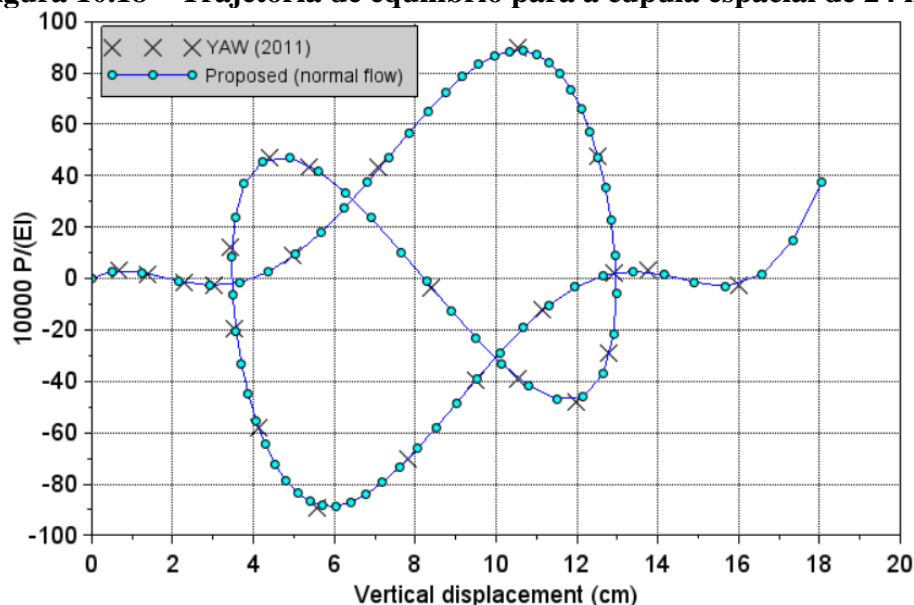
**Tabela 10.6 – Parâmetros de entrada**

Dado de entrada	Valor
$tol_1$	$1,0 \times 10^{-10}$
$tol_2$	$1,0 \times 10^{-10}$
$k_{m\acute{a}x}$	150
${}^0\Delta l$	0,5
$N_d$	7
$\Delta P$	1,0

Fonte: Autor (2022)

Considerando que o caminho de equilíbrio a ser analisado é em relação ao deslocamento nodal central, na Figura 10.18, demonstra-se que a trajetória obtida por meio da metodologia de solução proposta por Kou et al. (2006) associado ao fluxo normal vai ao encontro do caminho de equilíbrio apresentado por Yaw (2011).

**Figura 10.18 – Trajetória de equilíbrio para a cúpula espacial de 24 nós**



Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

Os resultados em relação aos números totais de passos de carga NP e de iterações acumuladas  $k_t$ , ao número médio de iterações por passo de carga  $k_m$  e ao tempo de processamento em segundos CPU, com o enfoque em comparar as metodologias de solução, estão presentes na Tabela 10.7.

**Tabela 10.7 – Dados de saída para o exemplo da cúpula espacial de 24 elementos**

Metodologia de solução	Processo Convencional				Técnica de Fluxo Normal			
	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>
Kou et al. (2006)	66	135	2,04	3,36	80	238	2,97	5,27
Newton-Raphson	79	236	2,98	4,46	86	297	3,45	5,53
Newton-Raphson Modificado	Não convergiu!				Não convergiu!			

NOTAS:

1: O tempo de processamento gasto pelo CPU é expresso em segundos (s);

Cores da tabela: as células em verde representam que descrevem a trajetória de equilíbrio conforme o esperado; já as células em vermelho sinalizam que não houve convergência ou que o processamento não foi realizado.

Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

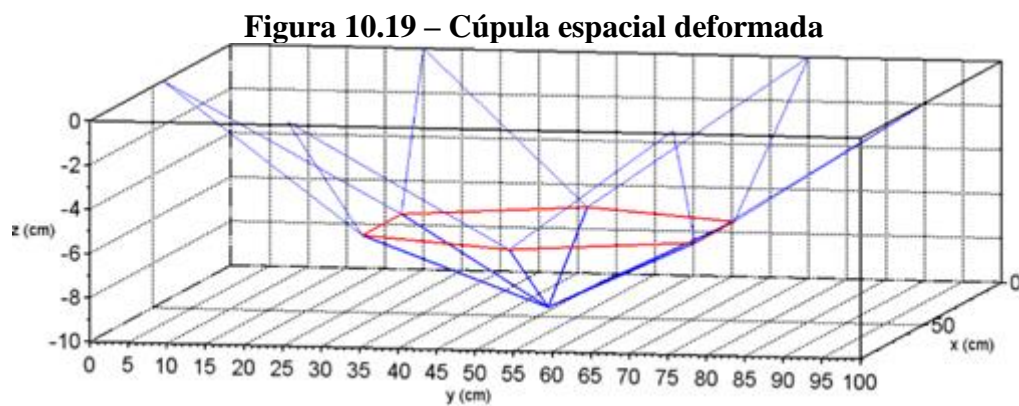
À primeira vista, deve-se denotar que a metodologia de solução baseado no Newton-Raphson Modificado (NRM) não converge, mesmo que seja associada à estratégia do fluxo normal. Devido à trajetória com comportamento fortemente não linear, o NRM propõe que a matriz de rigidez não seja atualizada a cada iteração, o que contribui para que o método não convirja.

Embora na seção anterior o uso da abordagem do fluxo normal para a obtenção do vetor de sub-incremento de coordenadas nodais tenha garantido a estabilidade numérica, é possível

observar que, dentre as metodologias que convergem, esse traça o caminho de equilíbrio com número maior de passos de carga e de iteração em relação ao processo convencional.

Para as metodologias de solução, observa-se que a formulação proposta com o método de Kou et al. (2006) é mais eficiente do que as dos métodos NR e NRM, oferecendo uma redução de 16,5% com relação ao número de passos de cargas utilizando o processo convencional.

Na Figura 10.19, tem-se a posição deformada para a treliça espacial de 24 elementos no passo de carga 80, no qual as barras em azul indicam tração e em vermelho, compressão.



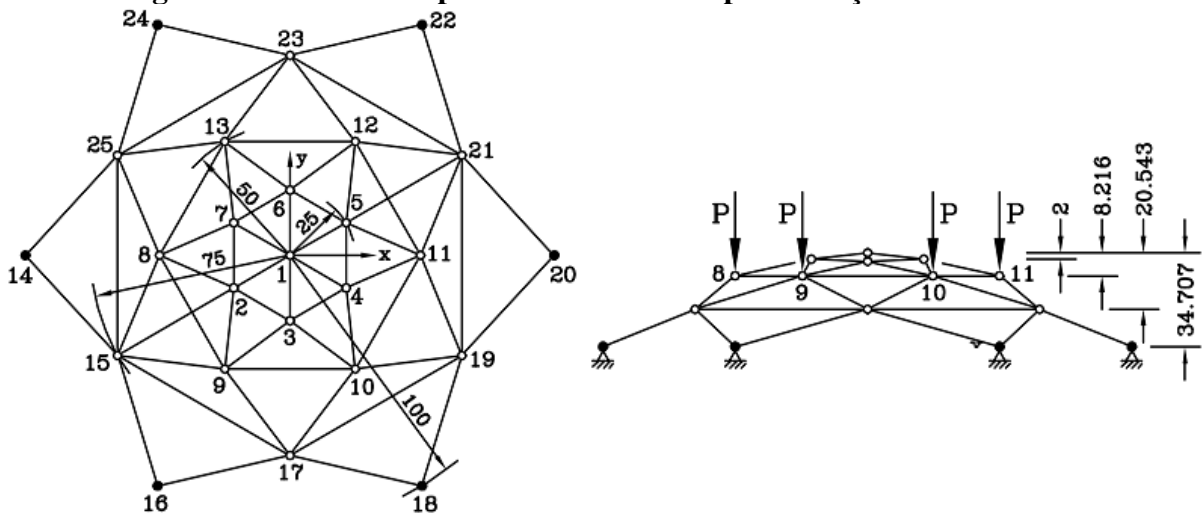
Fonte: Autor (2022)

### 10.2.2 Cúpula treliçada de 60 elementos

Previamente estudado por Matias (2002), a cúpula treliçada espacial, conforme está representada na Figura 10.20, possui as características definidas a seguir:

- a) número de elementos de barra: 60;
- b) quantidade de nós: 25, dispostos conseguintes à Figura 10.20;
- c) rigidez axial das barras (EA):  $1,0 \times 10^4$  N;
- d) a força P está aplicada sobre os nós 19, 20, 21, 22, 23 e 24, que estão distribuídos sobre uma circunferência de raio de 50 metros; e
- e) os apoios dos nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são de segundo gênero.

**Figura 10.20 – Vista superior e lateral da cúpula treliça de 60 elementos**



Fonte: Matias (2022)

Utiliza-se a medida de deformação de Green-Lagrange, inserindo os dados de entrada presentes na Tabela 10.8.

**Tabela 10.8 – Dados de entrada**

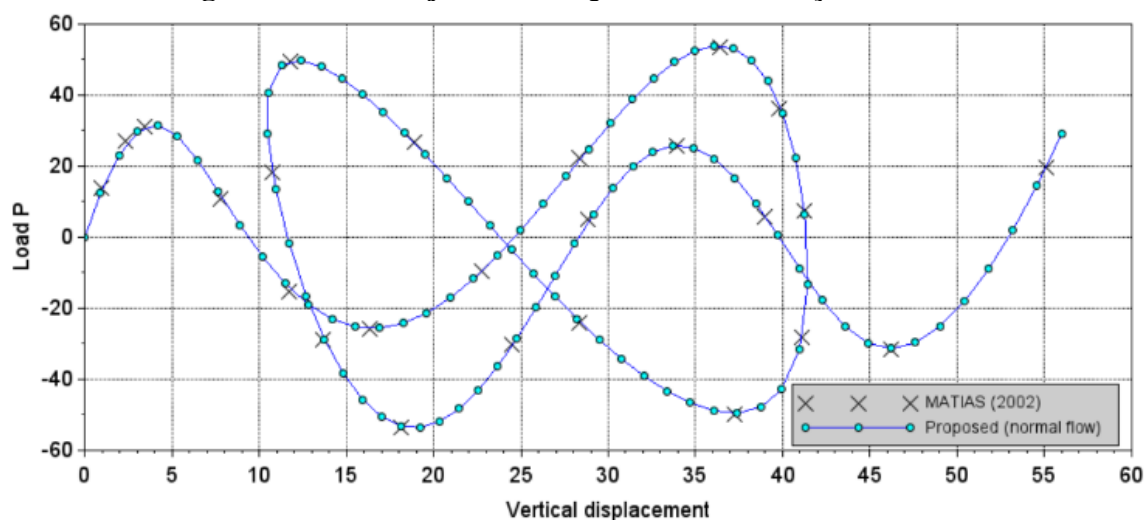
Dado de entrada	Valor
tol <sub>1</sub>	$1,0 \times 10^{-10}$
tol <sub>2</sub>	$1,0 \times 10^{-10}$
k <sub>máx</sub>	150
<sup>0</sup> Δl	4,0
N <sub>d</sub>	5
ΔP	0,1

Fonte: Autor (2022)

A trajetória de equilíbrio a ser analisada é em relação ao deslocamento do nó central, 25, denotada na Figura 10.21, confrontando os resultados obtidos por Matias (2002), na qual observa-se que estão em concordância.



**Figura 10.21 – Trajetória de equilíbrio em relação ao nó 25**



Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

Com as informações dispostas, mostra-se na Tabela 10.9 os resultados obtidos em relação à análise comparativa das metodologias de solução.

**Tabela 10.9 – Resultados obtidos para o exemplo da cúpula treliçada de 60 elementos**

Metodologia de solução	Processo Convencional				Técnica de Fluxo Normal			
	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>
Kou et al. (2006)	100	303	3,03	22,77	102	309	3,02	24,12
Newton-Raphson	112	431	3,84	25,71	114	443	3,88	27,95
Newton-Raphson Modificado	Não convergiu!				Não convergiu!			

NOTAS:

1: O tempo de processamento gasto pelo CPU é expresso em segundos (s);

Cores da tabela: as células em verde representam que descrevem a trajetória de equilíbrio conforme o esperado; já as células em vermelho sinalizam que não houve convergência ou que o processamento não foi realizado.

Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

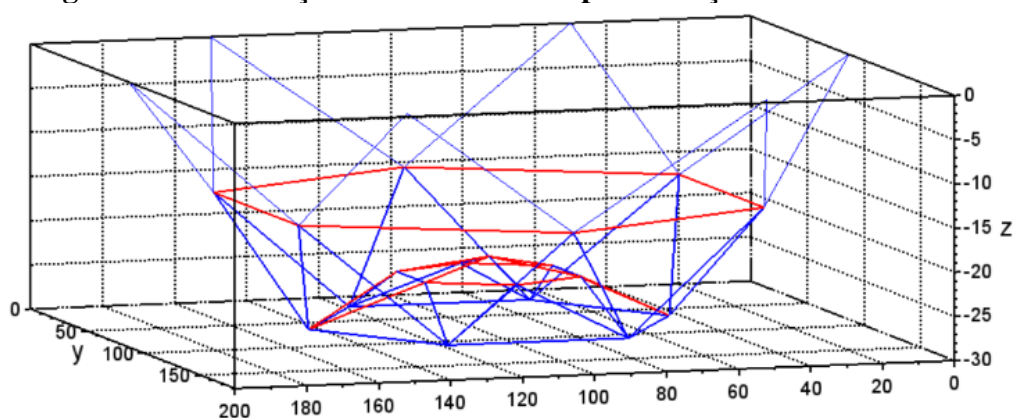
Com inúmeros pontos críticos presentes na trajetória de equilíbrio, o Newton-Raphson Modificado não apresenta convergência, uma vez que a instabilidade se torna presente, devido a não atualização da matriz de rigidez.

Seguindo o mesmo padrão do exemplo anterior, a aplicação da estratégia do fluxo normal para a obtenção do vetor de sub-incremento de coordenadas nodais implica no aumento do custo computacional, uma vez que é necessário quantidade maior de passos de carga e de iteração. Porém, ressalta-se que os resultados são próximos, quando analisados no contexto da mesma metodologia de solução: para o procedimento proposto com o método de Kou et al. (2006), o aumento do número de iterações é de 2,0%; já para o Newton-Raphson, o número de iteração acresce em 2,8%.

Partindo para a análise entre as metodologias de solução, novamente as expressões propostas com o método de Kou et al. (2006) se mostram mais eficientes que o método tradicional de Newton-Raphson, em que a redução do número total de iteração é da ordem de 30%.

Consoante a isso, na Figura 10.22, tem-se a posição deformada da cúpula treliçada de 60 elementos para o passo de carga 82, em que os elementos de barras em tração estão em azul e em compressão estão em vermelho.

**Figura 10.22 – Posição deformada da cúpula treliçada de 60 elementos**



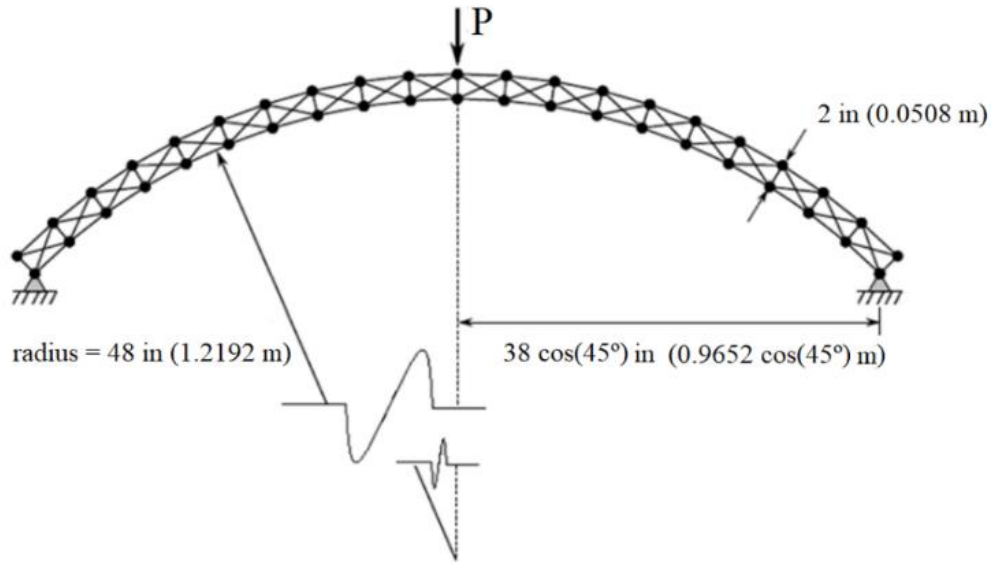
Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

### 10.2.3 Arco circular treliçado

Este exemplo numérico já foi analisado na seção anterior, porém, elegeu-se também para ser submetido à comparação entre as metodologias de solução. Conforme publicado por Hrinda (2010), o arco circular treliçado, apresentado na Figura 10.23, possui a trajetória de equilíbrio demonstrada na Figura 10.24, em que confronta a trajetória obtida pelo algoritmo e por Hrinda (2010). Adicionalmente, as características e as condições de contorno que regem a estrutura estão listadas abaixo:

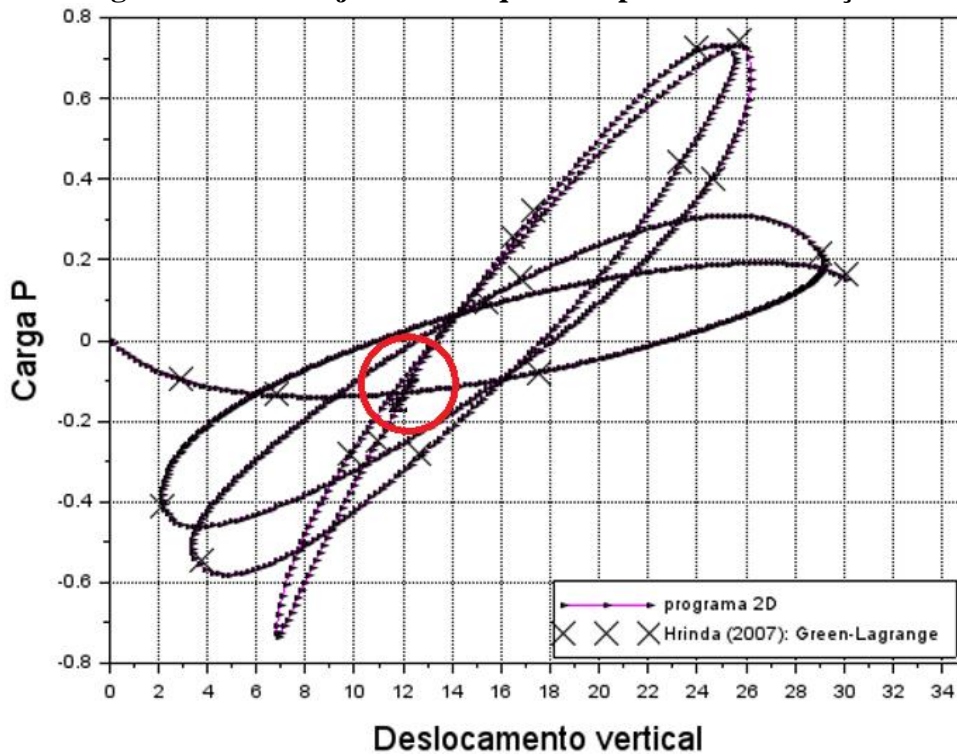
- número de elementos de barra: 101;
- quantidade de nós 42;
- rigidez axial das barras (EA):  $1,0 \times 10^7$  lb;
- o carregamento P está aplicado no nó localizado no topo do arco circular; e
- apoios de segundo gênero nos nós indicados na Figura 10.23.

Figura 10.23 – Arco circular treliçado proposto por Hrinda (2010)



Fonte: CRISFIELD (1991)

Figura 10.24 – Trajetória de equilíbrio para o arco treliçado



Fonte: Autor (2022)

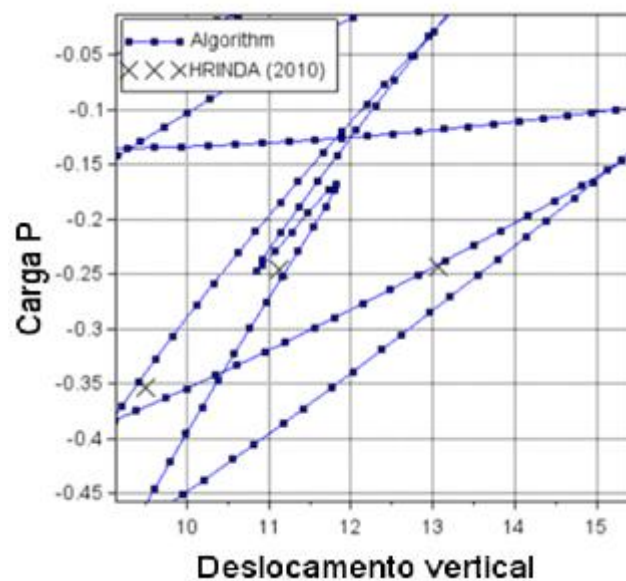
Especifica-se que no presente exemplo, emprega-se a medida de deformação de Engenharia associado aos dados de entrada listados na Tabela 10.10.

**Tabela 10.10 – Dados de entrada**

Dado de entrada	Valor
tol <sub>1</sub>	$1,0 \times 10^{-6}$
tol <sub>2</sub>	$1,0 \times 10^{-6}$
k <sub>máx</sub>	150
${}^0\Delta l$	0,5
N <sub>d</sub>	6
$\Delta P$	$1,0 \times 10^6$

Fonte: Autor (2022)

Na Figura 10.24 há um círculo vermelho destacando um trecho da trajetória de equilíbrio em que há pontos limites de força e de deslocamento. Esse trecho ampliado está presente na Figura 10.25.

**Figura 10.25 – Detalhe da trajetória de equilíbrio**

Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

Desta forma, os resultados obtidos, que estão descritos na Tabela 10.11, mostram que não houve convergência para nenhuma metodologia de solução associado ao processo convencional, bem como para o Newton-Raphson Modificado associado à técnica do fluxo normal. Como já explicitado na seção 10.1, a estratégia do fluxo normal garante a convergência do processo de cálculo e a consequente obtenção do caminho de equilíbrio.

Tabela 10.11 – Dados de saída para o exemplo do arco treliçado

Metodologia de solução	Processo Convencional				Técnica de Fluxo Normal			
	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>	NP	$k_t$	$k_m$	CPU <sup>1</sup>
Kou et al. (2006)	Não convergiu!				697	1126	1,61	98,34
Newton-Raphson	Não convergiu!				750	1386	1,84	99,22
Newton-Raphson Modificado	Não convergiu!				Não convergiu!			

NOTAS:

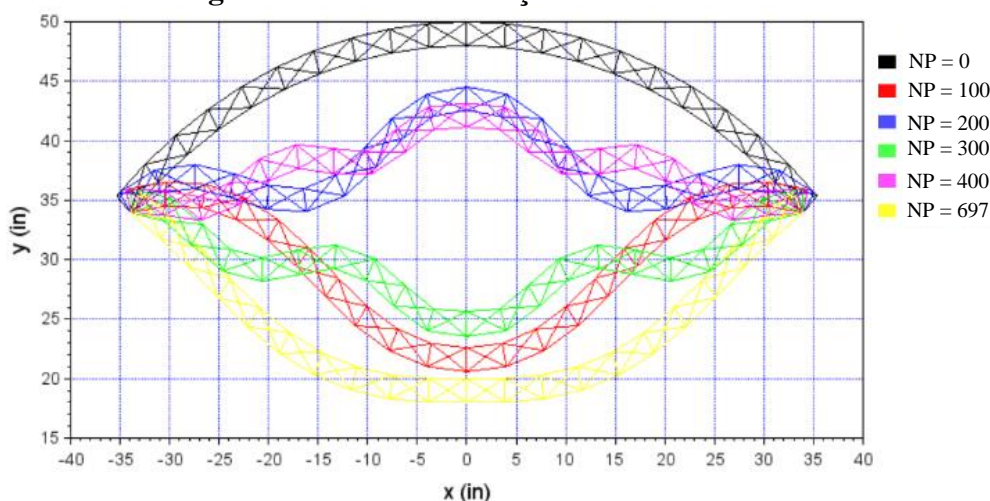
1: O tempo de processamento gasto pelo CPU é expresso em segundos (s);

Cores da tabela: as células em verde representam que descrevem a trajetória de equilíbrio conforme o esperado; já as células em vermelho sinalizam que não houve convergência ou que o processamento não foi realizado.

Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

Observa-se que a metodologia de solução proposta por Kou et al. (2006) proporciona uma redução de 18,75% no número de iterações totais, apesar do tempo de processamento ser muito próximo. Na Figura 10.26, têm-se as posições deformadas nos respectivos passos de cargas indicados na legenda.

Figura 10.26 – Arco treliçado circular deformado



Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

### 10.3 DISCUSSÃO

Em relação à seção 10.1, na qual é analisada a eficiência numérica das técnicas de continuação, percebe-se que o Newton-Raphson Modificado possui maior dificuldade em traçar as trajetórias de equilíbrio, uma vez que a matriz de rigidez não atualizada nos processos iterativos e, em contexto de deformações excessivas, os parâmetros deixam de ser válidos, necessitando a reformulação.

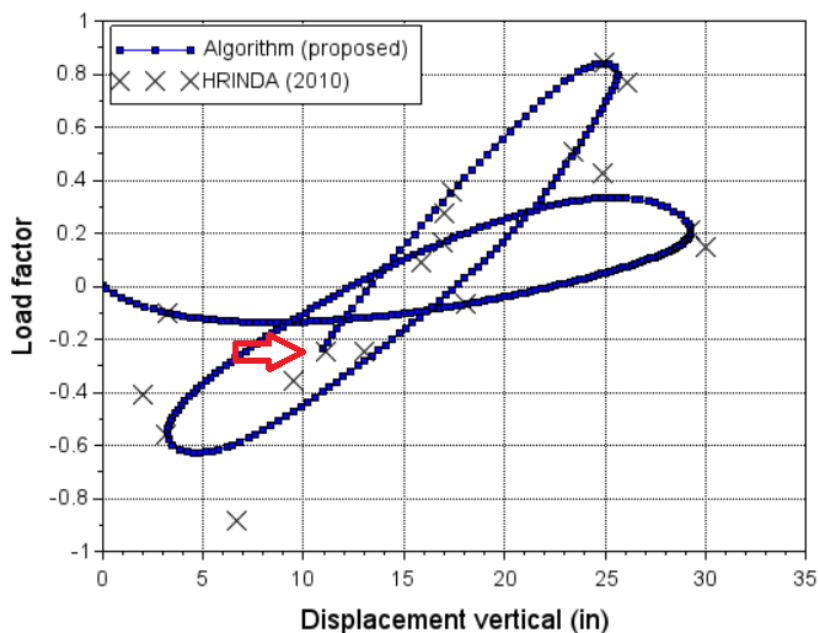
Além disso, é notório como o fluxo normal permite à metodologia numérica a solução do sistema de equações não linear, garantindo a convergência, isto é, para um problema estrutural que contém a trajetória de equilíbrio com comportamento fortemente não linear, o

fluxo normal é capaz de identificar e ultrapassar as perturbações nas vizinhas e nos pontos críticos, apresentando resultados adequados e satisfatórios. Entretanto, para todos os casos, o fluxo normal exigiu um número de iterações equivalente ou consideravelmente superior quando comparado com o processo convencional, uma vez que para a análise mais refinada é necessário maior custo computacional.

Dentre as técnicas de continuação aplicadas, percebe-se que as formulações mais rudimentares como carga constante, deslocamento constante e trabalho externo apresentam maiores dificuldade em garantir a continuidade do método numérico. Por outro lado, o deslocamento residual consegue oferecer resultados adequados em todos os casos em que houve convergência. Em relação à técnica da área triangular, não se percebeu melhoria em relação às tradicionais técnicas de continuação.

No que tange à seção 10.2, a robustez das metodologias de soluções pode ser avaliada por meio de testes, reduzindo o valor do comprimento de arco inicial e o número de iterações desejadas por passo de cargas, em que se percebe que não se obtém a trajetória de equilíbrio completa. Na Figura 10.27 e na Figura 10.28, têm-se as trajetórias obtidas pela formulação proposta e NR, respectivamente.

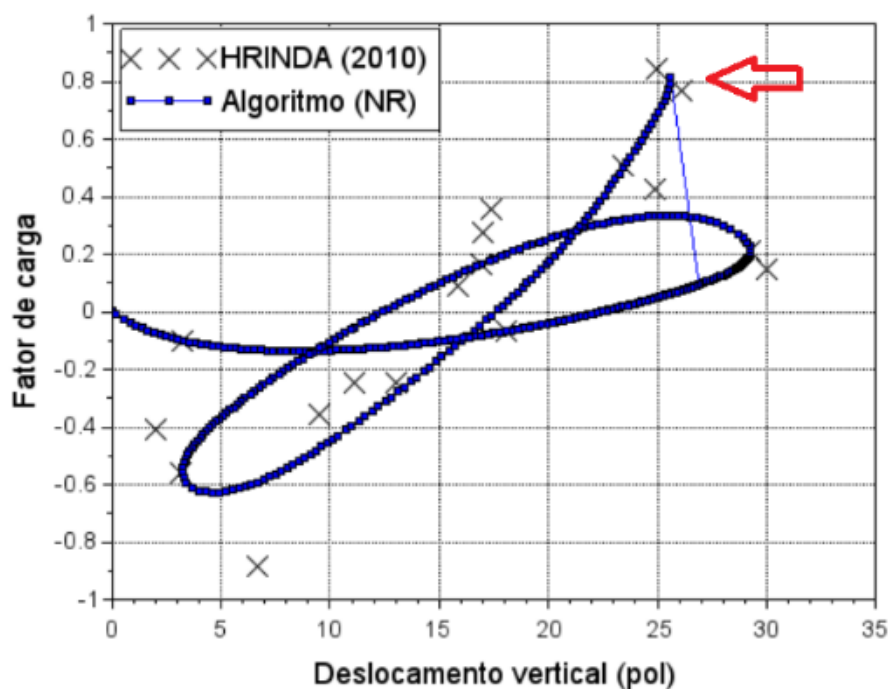
**Figura 10.27 – Ponto de não convergência na trajetória de equilíbrio para o método proposto**



Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)



**Figura 10.28 – Ponto de não convergência na trajetória de equilíbrio para o método de NR**

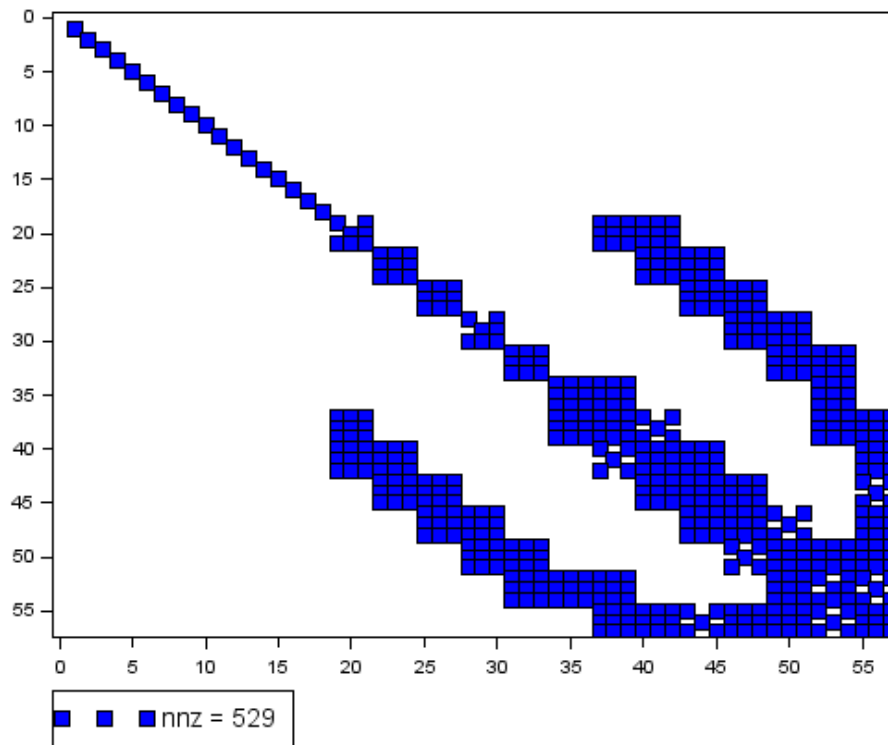


Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

Durante o processamento, ressalta-se que a matriz de rigidez possui muitos elementos nulos, o que resulta em operações desnecessárias, uma vez que o procedimento iterativo-incremental poderia chegar à solução em intervalo de tempo menor, considerando-se somente os índices não nulos da matriz. Na Figura 10.29, apresenta-se em azul os elementos não nulos da matriz de rigidez, em que a porcentagem da matriz esparsa é de 83,72%.

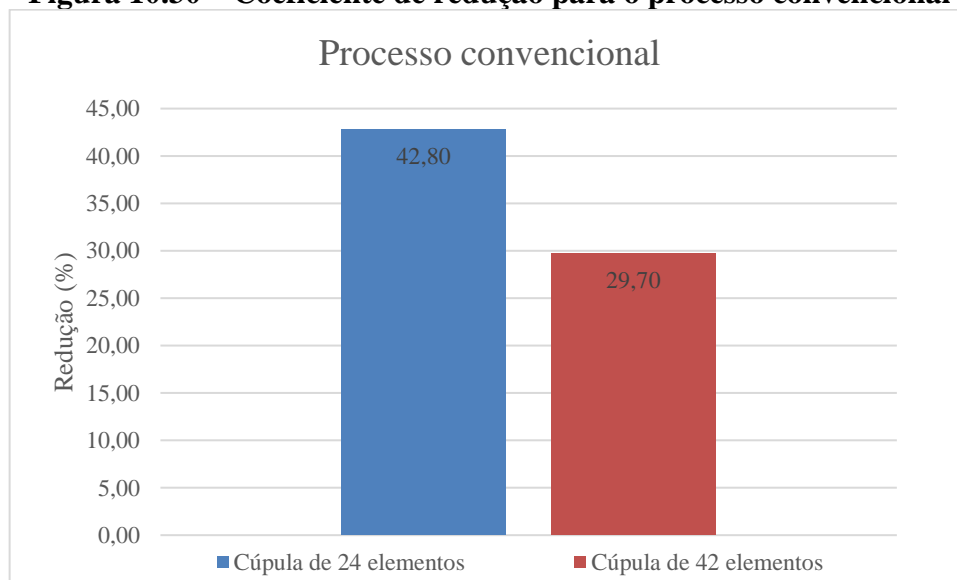
Diante disso, é vantajoso implementar na programação uma variável que armazenasse os índices não nulos, com a finalidade de economia e de memória de cálculo. Na Figura 10.30 e na Figura 10.31, apresentam-se os coeficientes de redução de número de iterações após de realizar adaptações na formulação.

**Figura 10.29 - Matriz de rigidez esparsa**



Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

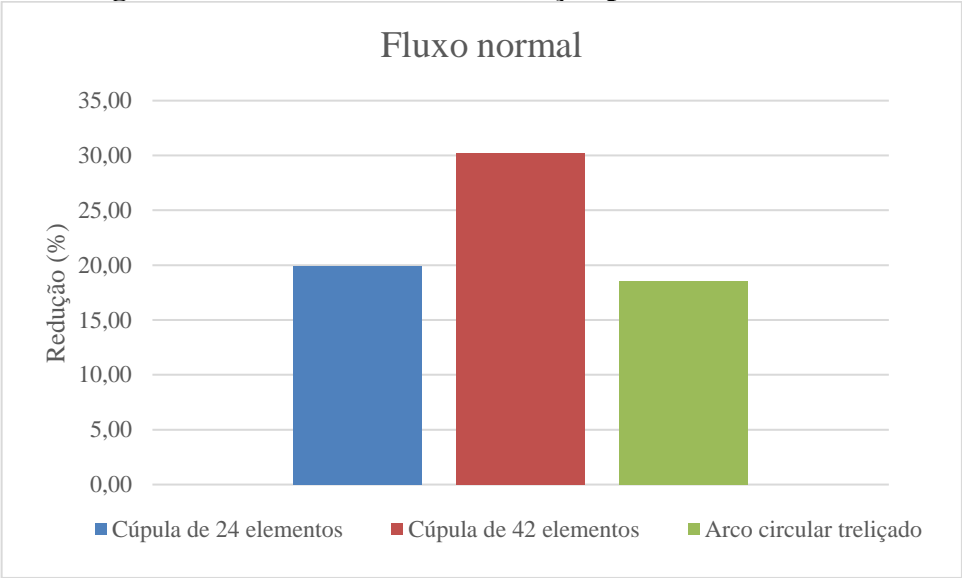
**Figura 10.30 – Coeficiente de redução para o processo convencional**



Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)



**Figura 10.31 – Coeficiente de redução para o fluxo normal**



Fonte: Souza, Doná Junior e Silva (2022)

## 11 CONCLUSÃO

Os exemplos estruturais analisados são caracterizados por possuírem comportamento fortemente não linear, havendo em suas respectivas trajetórias de equilíbrios diversos pontos limites de força e de deslocamento. Assim, identificar e encontrar as soluções numéricas em regiões críticas – nos pontos limites e nas suas vizinhanças – permite o estudo comportamental dessas estruturas.

De maneira geral, o presente trabalho mostrou que a aplicação do fluxo normal como estratégia de obtenção do vetor de sub-incremento de coordenadas nodais pode ser vantajosa, uma vez que a convergência é garantida, mesmo que o número de iterações e o respectivo tempo de processamento seja maior. Porém, para casos em que o processo convencional consiga convergir adequadamente, pode ser preferível devido ao menor tempo de processamento, a depender do objetivo do analista estrutural.

No que concerne às técnicas de continuação, obteve-se que o deslocamento residual (DR) proporcionou soluções adequadas nas condições em que houve convergência, em ambos problemas analisados. Além do DR, no exemplo da treliça abatida assimétrica, as técnicas de continuação baseado no arco linear fixo e atualizado e deslocamento generalizado também apresentaram resultados assertivos, tanto associado ao Newton Raphson padrão quanto o modificado. Já para o arco circular treliçado, como os resultados foram obtidos somente para o Newton Raphson padrão, destaca-se também o deslocamento constante e o triângulo BCD, ambas técnicas de continuação em adição ao DR se manifestaram bastante estáveis frente a comportamento extremamente não linear

Diametralmente opostos, as técnicas de continuação baseada na carga constante, no deslocamento constante e no trabalho externo constante se mostraram não capazes de extrair o caminho de equilíbrio, devido às formulações rudimentares, que não conseguem contornar o evento da instabilidade do ponto crítico.

Aliado a isso, dentre das metodologias de soluções empregadas, a formulação proposta advinda do método originalmente publicado por Kou et al. (2006) tem apresentado eficiência numérica maior quando comparado ao Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado. Além disso, percebe-se que o NRM possui dificuldade em traçar o caminho de equilíbrio, já que a matriz rigidez não é atualizada a cada iteração, sucumbindo a não convergência.

Como sugestão para trabalho futuro, listam-se alguns desdobramentos do presente trabalho:

- Aplicar as metodologias numéricas implementadas em problemas estruturais com número maior de elementos, a fim de analisar a robustez das mesmas;
- Estender o estudo comparativo de metodologia de soluções às outras formulações disponíveis na literatura, aplicando a método de dois passos, três passos ou de grau convergência maior;
- Buscar e comparar a eficiência numérica de técnicas de continuação que foram recentemente publicadas na literatura; e
- Realizar a análise comparativa dos procedimentos implementados em problemas de vigas e pórticos com elementos de viga-pilar.

## REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, A. T. **Análise de alternativas estruturais para edifícios em concreto armado**. 1999. Dissertação (Mestrado). São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, Escola de Engenharia de São Carlos. 1999, 108p.
- ALLGOWER, E. L.; GEORG, K.; **Homotopy methods for approximating several solutions to nonlinear systems of equations**. In: Numerical solution of highly nonlinear problems. Amsterdam. p. 253-270, 1980.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos**. 3ed, Editora Unicamp, Campinas, 2020.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118** – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BARBOZA, M. R. **Concepção e análise de estruturas de edifícios em concreto armado**. Relatório Final de Iniciação Científica, Bauru, Faculdade de Engenharia – UNESP, Departamento de Engenharia Civil, 2008.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Prentice Hall, 2006
- BATHE, K; DVORKIN, E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equation. **Computers & Structures**. v. 17, n 5-6, p. 871-879, 1983.
- BATOZ, J. L.; DHAT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.
- BECHO, J. S. **Formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórticos**. 2016. Dissertação (Mestrado). Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Programa de pós-graduação em engenharia de estruturas. 2016, 136p.
- BERGAN, P. G. Solution algorithms for nonlinear structural problems. **Computers & Structures**. v. 12, p. 497-509, 1980.
- CHALAL, H; ABDED-MERAIM, F. Quadratic Solid-Shell Finite Elements for Geometrically Nonlinear Analysis of Functionally Graded Material Plates. **Materials**. 2018.
- CHAN, S. L. Geometric and Material Non-Linear Analysis of Beam-Columns and Frames Using the Minimum Residual Displacement Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, p. 2657-2669, 1988.
- CLARKE, M. J; HANCOCK, M. J. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses. **International Journal for Numerical Methods Engineering**. v. 29, p. 1365-1391, 1990.
- CODA, H. B; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**. v. 193, p. 3451-3557, 2004.

COOK, R. D; MALKUS, D. S; PLESHA, M. E; WITT, R. J. **Concept and applications of finite element analysis**. 4ed, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 2002.

COSTA, O. V. **Estudo de alternativas de projetos estruturais em concreto armado para uma mesma edificação**. 1997. Dissertação (Mestrado). Fortaleza, Universidade Federal do Ceará – UFC. 1997.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles (Snap-Through). **Computers & Structures**. v. 13, p. 52-62, 1981.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. John Wiley & Sons. v. 1, 1991.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. John Wiley & Sons. v. 2, 1997.

ELLOBODY, E; FENG, R; YOUNG, B. Chapter 4 – Linear and Nonlinear Finite Element Analyses. **Finite Element Analysis and Design of Metal Structures**. p. 56-71, 2014.

ERIKSSON, A; NORDMARK, A. Constrained stability of conservative static equilibrium. **Computational Mechanics**. v. 64, p. 1199-1219, 2019.

DEGHANI, H.; MANSOURI, I.; FARZAMPOUR, A.; HU, J. W. Improved homotopy perturbation method for geometrically nonlinear analysis of space trusses. **Applied Sciences**, v. 10, n. 8, p. 2987, 2020.

FONTES, F. F. **Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003**. Dissertação (Mestrado), São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 2005, 137p.

GARCIA, L. F. T. **Elasticidade não linear teoria geral e aplicações**. Letra Capital, Rio de Janeiro, 2007.

GRECO, M; FERREIRA, I. P. Logarithmic strain measure Applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**. n. 45, p. 632-639, 2009.

GRECO, M; MENIN, R. C. G; FERREIRA, I. P; BARROS, F. B. Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses. **Structural Engineering and Mechanics**. v. 41, n. 6, p. 735-750, 2012.

HRINDA, G. A. Geometrically nonlinear static analysis of 3D trusses using the arc-length method. **Computational Methods and Experimental Measurements**. v. XIII, p. 243-252 (2007)

JERSCHL, M; SÜß, D; WILLNER, K. Path continuation for the concept of non-linear normal modes using a normal flow algorithm. In: International Conference on Noise and Vibration Engineering, 26., 2014, Leuven. **Proceedings...** Leuven: ISMA, 2014, p. 3059-3064.

KASSIMALI, A. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. **Journal of Structural Engineering**. v. 109, p. 1869-1886, 1983.

KIMURA, A. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculo de edifícios com uso de sistema computacionais**. São Paulo, Ed. Pini, 2007, 624p.

KONDOH, K; ALTURI, S. N. Influence of local buckling on global instability: simplified, large deformation, post-buckling analysis of plane trusses. **Computers & Structures**. v. 21, n. 4, p. 613-627, 1985.

KOOHESTANI, K. A hybrid method for efficient solution of geometrically nonlinear structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 1, p. 21-29, 2013.

KOU, J.; LI, Y.; WANG, X. A modification of Newton method with third-order convergence. **Applied Mathematics and Computation**, v. 181, n. 2, p. 1106-1111, 2006.

KUMAR, R. V; VARGHESE, B. Effect of construction sequence analysis along with P-Delta and material non linearity on floating column structure. **International Research Journal of Engineering and Technology**, v. 4, n. 5, p. 1946-1949, 2017.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LEON, S. E.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A., MENEZES, I. F.; LAGES, E. N. A unified library of nonlinear solution schemes. **Applied Mechanics Reviews**, v. 64, n. 4, 2011.

LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method**. 4ed, Thomson Learning, Platteville, 2007.

LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear**. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Portugal, 1999.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado). São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, Escola de Engenharia de São Carlos. 2008, 153p.

MAHDAVI, S. H.; RAZAK, H. A.; SHOJAEE, S.; MAHDAVI, M. S. A comparative study on application of Chebyshev and spline methods for geometrically non-linear analysis of truss structures. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 101, p. 241-251, 2015.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Primeira edição, Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2010.

MATIAS, W. T. El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 18, n. 4, p. 549-572, 2002.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Rem: Revista Escola de Minas**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. 2006. Tese (Doutorado). Brasília, Universidade de Brasília – UnB, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. 2006, 190p.

MOHIT, M.; SHARIFI, Y.; TAVAKOLI, A. Geometrically nonlinear analysis of space trusses using new iterative techniques. **Asian Journal of Civil Engineering**, v. 21, n. 5, p. 785-795, 2020.

MONCAYO, W. J. Z. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estruturas de concreto armado**. 2011. Dissertação (Mestrado). São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, Escola de Engenharia de São Carlos. 2011. 219p.

MOUSAVI, S. M; SADR, M. H; JELVEH, M. Forced vibration analysis of nonlinear systems using eficiente path-following method. **Journal of Vibration and Control**. v. 0, p. 1-15, 2020.

MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. A continuation method with combined restrictions for nonlinear structure analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 130, p. 53-64, 2017.

PARENTE JUNIOR, E. **Análise não linear de estruturas**. Fortaleza, CE, Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, UFC: 2012. (Notas de Aula).

POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 10, p. 1455-1467, 1981.

QUYEN, V. T. B; TIEN, D. N. Hybrid finit elemento formulation for geometrically nonlinear buckling analysis of truss with initial lenght imperfection. **Construction and Architecture: Theory and Praticce of Innovative Development**. v. 281, 2021.

RAMM, E. **Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics**. Wunderlich, W. Berlin: Springer-Verlag, pp. 63-89, 1981.

REZAIIEE-PAJAND, M; NASERIAN, R. Geometrical nonlinear analysis based on optimization technique. **Applied Mathematical Modeling**. v. 58, p. 32-48, 2018.

REZAIIEE-PAJAND, M; NASERIAN, R. Using residual areas for geometrically nonlinear structural analysis. **Ocean Engineering**. v. 105, p. 327-335, 2015.

RHEINBOLDT, W. C. Solution Fields of nonlinear equations and continuation methods. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 17, n. 2, p. 221-237, 1980.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal Solids Structures**. v. 15, p. 529-551, 1979.

RIKS, E. Some Computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. **Computer methods in Applied mechanics and engineering**. v. 47, p. 219-259, 1984.

RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. **The American Society of Mechanical Engineers: Journal of Applied mechanics**, v. 39, n. 4, p. 1060-1065, 1972.

ROCHA, G. **Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas**. 2000. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, 2000.

RODRIGUES, P. F. N. **Ferramentas numéricas para a análise não linear física e geométrica de estruturas reticuladas na exploração de petróleo offshore**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2000.

SAFFARI, H; FADAEE, M. J; TABATABAEI, R. A new formulation based upon trigonometric function for finite circular arch elements. **Journal of Mechanical Engineering Science**. v. 222, p. 1371-1380, 2008.

SAFFARI, H.; MANSOURI, I. Non-linear analysis of structures using two-point method. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 46, n. 6, p. 834-840, 2011.

SCHWEIZERHOF, K. H; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 59, p. 261-279, 1986.

SCILAB, versão 6.1.1. France: **ESI Group**, 2021.

SHEN, J; GROH, R. M J; PIERRA, A. Experimental Path-Following of Equilibria Using Newton's Method. Part 1: Theory, Modelling, Experiments. **International Journal of Solids and Structures**. v. 210-211, p.203-223, 2020.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; ALIANO FILHO, A.; MACHADO, R. D. **Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order**. TEMA (São Carlos), v. 19, n. 1, p. 161-179, 2018.

SOUZA, L. A. F.; DONÁ JUNIOR, W.; SILVA, E. L. S. Two-step incremental procedure associated with the normal flow technique applied to trusses. **Semina: Ciências exatas e tecnológicas**, v.43, n. 1-Especial, p. 29-40, 2022.

SOUZA, L. A. F. Formulação posicional e corrotacional de elementos finitos aplicada em estruturas planas com barras biarticuladas. **Em: Encontro Internacional de Produção Científica**. 11p, 2019.

SOUZA, R. M.; MAGALHÃES, R. R.; ANDRADE, E. T. Comparative study of non-linear simulations of reinforced concrete slender column using finite elemento method and P-Delta. **Theoretical and Applied Engineering**, v. 3, n.1, p. 1-11, 2019.

SRACIC, M. W; ALLEN, M. S. Numerical continuation of periodic orbits for harmonically forced nonlinear systems. **Civil Engineering Topics**. v. 4, p. 51-69, 2011.



STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. 2007. Tese (Doutorado), Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Programa de pós-graduação em engenharia civil, 2007, 238p.

TURCO, E.; BARCHIESI, E.; GIORGIO, I.; DELL'ISOLA, F. A Lagrangian Hencky-type non-linear model suitable for metamaterials design of shearable and extensible slender deformable bodies alternative to Timoshenko theory. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 123, p. 103481, 2020.

WEMPNER, G. Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, p. 1581–1599, 1971.

YANG, Y. B.; KUO, S. R. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Singapore: Prentice - Hall, 1994.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.

ZHANG, W; LI, Q; MENG, Z. Complex bifurcation analysis of an impacting vibration system based on path-following method. **International Journal of Non-Linear Mechanics**. n. 133, 2021.

ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L; ZHU, J. Z. **The finite element method: its basis and fundamentals**. 6 ed, Elsevier Butterworth Heinemann, Barcelona, 2005.